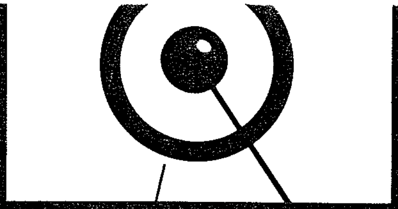


J. L. Meriam \ L. G. Kraige

Mecánica para Ingenieros

Estática

3ª Edición

ISBN 978-84-291-4257-0

9 788429 142570

ORIAL REVERTÉ
.reverte.com

Edición
m \ Kraige

Mecánica para Ingenieros
Estática

531.2
M561
1998
v.1
c.92

EDITORIAL
REVERTÉ

J. L. Meriam \ L. G. Kraige

Mecánica para Ingenieros

Estática

3ª Edición

EDITORIAL REVERTÉ

USM. BIBLIOTECA CENTRAL
3560900135161

FACTORES DE CONVERSIÓN DE LAS U. S. CUSTOMARY UNITS EN UNIDADES SI

Para convertir	En	Multiplicar por
(*Aceleración*)		
pie/segundo^2 (ft/sec^2)	metro/segundo^2 (m/s^2)	$3{,}048 \times 10^{-1*}$
pulgada/segundo^2 (in./sec^2)	metro/segundo^2 (m/s^2)	$2{,}54 \times 10^{-2*}$
(*Área*)		
pie^2 (ft^2)	metro^2 (m^2)	$9{,}2903 \times 10^{-2}$
pulgada^2 (in.^{2})	metro^2 (m^2)	$6{,}4516 \times 10^{-4*}$
(*Densidad*)		
libra masa/pulgada^3 (lbm/in.^{3})	kilogramo/metro^3 (kg/m^3)	$2{,}7680 \times 10^4$
libra masa/pie^3 (lbm/ft^3)	kilogramo/metro^3 (kg/m^3)	$1{,}6018 \times 10$
(*Fuerza*)		
kip (1000 lb)	newton (N)	$4{,}4482 \times 10^3$
libra fuerza (lb)	newton (N)	4,4482
(*Longitud*)		
pie (ft)	metro (m)	$3{,}048 \times 10^{-1*}$
pulgada (in.)	metro (m)	$2{,}54 \times 10^{-2*}$
milla (mi), (U. S. statute)	metro (m)	$1{,}6093 \times 10^3$
milla (mi), (náutica internacional)	metro (m)	$1{,}852 \times 10^{3*}$
(*Masa*)		
libra masa (lbm)	kilogramo (kg)	$4{,}5359 \times 10^{-1}$
slug (lb-sec^2/ft)	kilogramo (kg)	$1{,}4594 \times 10$
tonelada (2000 lbm)	kilogramo (kg)	$9{,}0718 \times 10^2$
(*Momento de fuerza*)		
libra-pie (lb-ft)	newton-metro (N · m)	1,3558
libra-pulgada (lb-in.)	newton-metro (N · m)	0,1129 8
(*Momento de inercia, área*)		
pulgada^4	metro^4 (m^4)	$41{,}623 \times 10^{-8}$
(*Momento de inercia, masa*)		
libra, pie, segundo^2	kilogramo-metro^2 (kg · m^2)	1,3558
(*Cantidad de movimiento, lineal*)		
libra-segundo (lb-sec)	kilogramo-metro/segundo (kg · m/s)	4,4482
(*Cantidad de movimiento, angular*)		
libra-pie-segundo	newton-metro-segundo (kg · m^2/s)	1,3558
(*Potencia*)		
pie-libra/minuto (ft-lb/min)	watt (W)	$2{,}2597 \times 10^{-2}$
caballo de vapor (550 ft-lb/sec)	watt (W)	$7{,}4570 \times 10^2$
(*Presión, carga*)		
atmósfera (estándar) (14,7 lb/in.^{2})	newton/metro^2 (N/m^2 o Pa)	$1{,}0133 \times 10^5$
libra/pie^2 (lb/ft^2)	newton/metro^2 (N/m^2 o Pa)	$4{,}7880 \times 10$
libra/pulgada^2 (lb/in.^{2} o psi)	newton/metro^2 (N/m^2 o Pa)	$6{,}8948 \times 10^3$
(*Constante del resorte*)		
libra/pulgada (lb/in.)	newton/metro (N/m)	$1{,}7513 \times 10^2$
(*Velocidad*)		
pie/segundo (ft/sec)	metro/segundo (m/s)	$3{,}048 \times 10^{-1*}$
nudo (náutico mi/hr)	metro/segundo (m/s)	$5{,}1444 \times 10^{-1}$
milla/hora (mi/hr)	metro/segundo (m/s)	$4{,}4704 \times 10^{-1*}$
milla/hora (mi/hr)	kilómetro/hora (km/h)	1,6093
(*Volumen*)		
pie^3 (ft^3)	metro^3 (m^3)	$2{,}8317 \times 10^{-2}$
pulgada^3 (in.^{3})	metro^3 (m^3)	$1{,}6387 \times 10^{-5}$
(*Trabajo, energía*)		
Unidad térmica inglesa (BTU)	joule (j)	$1{,}0551 \times 10^3$
pie-libra fuerza (ft-lb)	joule (J)	1,3558
kilowatt-hora (kw-hr)	joule (J)	$3{,}60 \times 10^{6*}$

* Valor exacto.

UNIDADES SI UTILIZADAS EN MECÁNICA

Magnitud	Unidad	Símbolo SI
(*Unidades básicas*)		
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
(*Unidades derivadas*)		
Aceleración, lineal	metro/segundo^2	m/s^2
Aceleración, angular	radián/segundo^2	rad/s^2
Área	metro^2	m^2
Densidad	kilogramo/metro^2	kg/m^3
Fuerza	newton	N (= kg · m/s^2)
Frecuencia	hertz	Hz (= 1/s)
Impulso, lineal	newton-segundo	N · s
Impulso, angular	newton-metro-segundo	N · m · s
Momento de fuerza	newton-metro	N · m
Momento de inercia, área	metro^4	m^4
Momento de inercia, masa	kilogramo-metro^2	kg · m^2
Cantidad de movimiento, lineal	kilogramo-metro/segundo	kg · m/s (= N · s)
Cantidad de movimiento, angular	kilogramo-metro^2/segundo	kg · m^2/s (= N · m · s)
Potencia	watt	W (= J/s = N · m/s)
Presión, carga	pascal	Pa (= N/m^2)
Producto de inercia, área	metro^4	m^4
Producto de inercia, masa	kilogramo-metro^2	kg · m^2
Constante del resorte	newton/metro	N/m
Velocidad, lineal	metro/segundo	m/s
Velocidad, angular	radián/segundo	rad/s
Volumen	metro^3	m^3
Trabajo, energía	joule	J (= N · m)
(*Unidades suplementarias y otras unidades aceptables*)		
Distancia (navegación)	milla náutica	(= 1,852 km)
Masa	tonelada (métrica)	t (= 1000 kg)
Ángulo plano	grados (decimal)	°
Ángulo plano	radián	–
Velocidad	nudo	(1,852 km/h)
Tiempo	día	d
Tiempo	hora	h
Tiempo	minuto	min

PREFIJOS DE LAS UNIDADES SI

Factor de multiplicación	Prefijo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^9	giga	G
1 000 000 = 10^6	mega	M
1000 = 10^3	kilo	k
100 = 10^2	hecto	h
10 = 10	deca	da
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p

ALGUNAS REGLAS IMPORTANTES PARA ESCRIBIR MAGNITUDES MÉTRICAS

1. (a) Utilizar los prefijos para mantener los valores numéricos dentro del intervalo 0,1 a 1000.
   (b) Evitar el uso de los prefijos hecto, deca, deci y centi, excepto en los casos de ciertas áreas y volúmenes en los que los números serían confusos.
   (c) En las combinaciones de unidades, utilizar prefijos solamente en el numerador. La única excepción es la unidad básica kilogramo. (*Ejemplo*: se escribe kN/m, no N/mm; J/kg, no mJ/g.)
   (d) No utilizar prefijos dobles. (*Ejemplo*: se escribe GN, no kMN.)
2. Escritura de unidades
   (a) Utilizar un punto para la multiplicación de unidades. (*Ejemplo*: se escribe N · m, no Nm.)
   (b) No utilizar barras inclinadas dobles. (*Ejemplo*: se escribe N/m^2, no N/m/m.)
   (c) Los exponentes se refieren a toda la unidad. (*Ejemplo*: mm^2 significa (mm)^2.)
3. Agrupamiento de números
   Utilizar un espacio en lugar de un punto para separar los números en grupos de tres cifras, contando a partir de la coma decimal y en ambas direcciones. (*Ejemplo*: 4 607 321,048 72.) En los números de cuatro cifras el espacio se puede omitir. (*Ejemplo*: 4296 ó 0,0476.)

Mecánica para Ingenieros

Estática

3ª Edición

Mecánica para Ingenieros

Estática

3ª Edición

J. L. Meriam
University of California
Santa Barbara

L. G. Kraige
Virginia Polytechnic Institute and
State University

U. T. F. S. M.
BIBLIOTECA CENTRAL

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • México

Título de la obra original:
Engineering Mechanics. Statics. Volume One. Third Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por
John Wiley & Sons, Inc., 11 River Street, Hoboken, New Jersey 07030-USA

Copyright © John Wiley & Sons, Inc.

Versión española por
Dr. José Vilardell
Universidad Politécnica de Cataluña

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36 Fax: (34) 93 419 51 89
e-mail: reverte@reverte.com
www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

Edición en español:

© Editorial Reverté, S. A., 1999

Reimpresión, mayo de 2007

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN: 978-84-291-4257-0 Volumen I
ISBN: 978-84-291-4280-8 Obra completa

Depósito Legal: B-27166-2007

Impreso por Liberdúplex

Prólogo

No es posible ponderar las innovaciones y contribuciones introducidas por el Dr. James L. Meriam en el campo de la Mecánica Técnica, ya que sin duda su influencia sobre la enseñanza de esta disciplina ha sido superior a la de cualquier otra persona durante el último cuarto de siglo. En 1951, sus primeros libros reconstruyeron literalmente la enseñanza de esta materia y se convirtieron en los textos definitivos durante los decenios siguientes. Sus textos, organizados con lógica, se leían fácilmente y estaban dirigidos al estudiante de ingeniería medio con una gran profusión de estimulantes ejemplos, basados en problemas de auténtica ingeniería estupendamente ilustrados. Aquellos libros pasaron a ser modelos para otros textos de Mecánica Técnica desde los años 1950 hasta ahora.

El Dr. Meriam comenzó sus trabajos en Mecánica aplicada en la Universidad de Yale, donde se graduó en Ingeniería y se doctoró en Ingeniería y Física. No tardó en adquirir experiencia industrial en Pratt and Whitney Aircraft y en General Electric Company, lo cual sirvió de estímulo para sus primeras contribuciones a la mecánica mediante estudios sobre tensiones internas tanto analíticos como experimentales. Durante la II Guerra Mundial sirvió en los guardacostas.

Durante veintiún años el Dr. Meriam fue miembro de la Universidad de California-Berkeley, donde prestó sus servicios como profesor de Mecánica para ingenieros, Decano Ayudante de Estudios Superiores y Presidente de la División de Mecánica y Proyectos. En 1963 fue Decano de Ingeniería de la Universidad de Duke, donde dedicó todas sus energías al desarrollo de la Escuela de Ingeniería de la misma. Fiel a sus deseos de dedicarse nuevamente de lleno a la enseñanza, en 1972 aceptó el nombramiento de profesor de Mecánica Técnica de la Universidad Politécnica Estatal de California, de donde se retiró en 1980. Durante los diez años siguientes ejerció de profesor visitante en la Universidad de California, Santa Bárbara, retirándose por segunda vez en 1990. El Dr. Meriam ha dado siempre gran énfasis a la enseñanza, característica que ha sido reconocida por sus alumnos en todos los lugares donde la ha practicado. En Berkeley fue el primero en recibir, en 1963, el premio Outstanding Faculty que la sociedad Tau Beta Pi otorga principalmente por la excelencia en la enseñanza. En 1978 la Asociación Americana para la Enseñanza de la Ingeniería le concedió el premio Distinguished Educator por sus sobresalientes servicios a la enseñanza de la Mecánica Técnica.

El profesor Meriam fue el primer autor que mostró claramente cómo emplear el método de los trabajos virtuales para resolver cierto tipo de problemas de Estática en su mayoría despreciados por autores anteriores. Por lo que respecta a la Dinámica, clarificó notablemente la exposición del movimiento plano y en ediciones posteriores la Cinemática y la Cinética tridimensionales recibieron el mismo tratamiento. Es, además, el profesor Meriam uno de los primeros promotores del Sistema Internacional de Unidades y las versiones de este sistema en sus libros *Estática* y *Dinámica* publicados en 1975 fueron los primeros textos de Mecánica en unidades SI de Estados Unidos.

También el Dr. L. Glenn Kraige, coautor por segunda vez de esta MECÁNICA PARA INGENIEROS, ha efectuado importantes contribuciones a la enseñanza de la Mecánica. Cursó sus estudios en la Universidad de Virginia, donde se graduó y doctoró en ciencias e ingeniería, principalmente en tecnología aeroespacial, y actualmente ejerce de profesor de Ciencia de la Ingeniería y Mecánica en la Universidad Estatal e Instituto Politécnico de Virginia.

Además de su reconocida labor investigadora y divulgadora en el campo de la dinámica de las naves especiales, el profesor Kraige ha prestado gran atención a la enseñanza de la Mecánica, a niveles tanto de iniciación como superior. Su destacada actividad docente está ya generalmente reconocida y le ha hecho merecedor de varios premios, entre los que se cuentan el concedido por AT & T, en 1988, como recompensa por su excepcional labor en el campo de la enseñanza dentro de la Southeastern Section de la Asociación Americana para la Enseñanza Técnica y, también en 1988, el premio Outstanding Educator del Consejo Estatal de Enseñanza Superior de la Commonwealth de Virginia. En su actividad docente acentúa siempre el desarrollo de las capacidades analíticas junto con la consolidación del sentido físico y del razonamiento técnico. Son de destacar, asimismo, sus trabajos de desarrollo de software de simulación de movimientos para ordenadores personales a mediados de los años ochenta. Más recientemente, inició un esfuerzo a largo plazo en el área de procedimientos de multimedia para enseñanza y aprendizaje de Estática y Dinámica.

Esta tercera edición de MECÁNICA PARA INGENIEROS está planteada en el mismo nivel superior que sus predecesoras y a ella se han añadido nuevas aportaciones que resultarán provechosas e interesantes para los estudiantes. Contiene asimismo una vasta colección de interesantes e instructivos problemas. El análisis y las aplicaciones son las piedras angulares del éxito en el aprendizaje de la Mecánica Técnica y J. L. Meriam y L. G. Kraige demuestran una vez más que son los mejores cuando se trata de combinar tan esenciales características.

Robert F. Steidel, Jr.
Profesor emérito de Mecánica Técnica
Universidad de California, Berkeley

Prólogo para el estudiante

Al emprender el estudio de la Mecánica aplicada, primero la Estática y seguidamente la Dinámica, procede Vd. a sentar los cimientos de su capacidad analítica para resolver una gran variedad de problemas de ingeniería. Actualmente, el ejercicio de la ingeniería exige una elevado nivel de capacidad analítica y Vd. comprobará por si mismo que el estudio de la Mecánica le ayudará enormemente a desarrollar esa capacidad.

Merced a la Mecánica aplicada podemos aprender a construir y resolver los modelos matemáticos que describen los efectos de las fuerzas y los movimientos sobre una gran variedad de estructuras y máquinas que son de interés para los ingenieros. Aplicando los principios de la Mecánica se consigue formular dichos modelos incorporando a ellos las hipótesis físicas y las aproximaciones matemáticas adecuadas. Tanto en el planteo como en la resolución de problemas de Mecánica son muy frecuentes las ocasiones para utilizar conocimientos de geometría, álgebra, cálculo vectorial, geometría analítica y cálculo infinitesimal. Y, desde luego, es más que probable que descubra Vd. aspectos nuevos de la importancia de estos instrumentos matemáticos cuando los emplee dentro del campo de la Mecánica.

El éxito en mecánica (y en toda la ingeniería) depende grandemente del desarrollo de un método bien disciplinado para abordar los problemas desde las hipótesis de partida hasta su conclusión y a través del cual se apliquen rigurosamente los principios pertinentes. Por mis muchos años de experiencia como profesor e ingeniero conozco la importancia que tiene representar el trabajo propio desarrollado de una manera clara, lógica y breve. La Mecánica constituye una motivo excelente para desarrollar esos hábitos de pensamiento lógico y exposición eficaz.

Este texto de MECÁNICA PARA INGENIEROS contiene un gran número de problemas tipo cuyas soluciones se presentan con todo detalle. Además, en dichos ejemplos se incluyen observaciones útiles en las que se mencionan los errores y trampas más corrientes que deben evitarse. Adicionalmente, el texto contiene una gran colección de problemas sencillos de tipo introductorio y de problemas de dificultad media, cuyo objetivo es facilitar la confianza inicial y el entendimiento de cada tema nuevo. También se incluyen muchos problemas que ilustran casos importantes y actuales con el fin de estimular el interés del lector y ayudarle a desarrollar su apreciación hacia las muchas aplicaciones de la Mecánica a la Ingeniería.

Nos complace animarle a Vd. como estudiante de Mecánica y esperamos que este libro le sea de utilidad y estímulo para desarrollar su formación como ingeniero.

J. L. Meriam
Santa Bárbara, California

L. Glenn Kraige
Blacksburg, Virginia

Prólogo para el profesor

Básicamente, el estudio de la Mecánica aplicada consiste en desarrollar la capacidad para predecir los efectos de las fuerzas y los movimientos al llevar a cabo el trabajo de diseño creativo propio de la Ingeniería. Una predicción acertada requiere algo más que el simple conocimiento de los principios físicos y matemáticos de la Mecánica. Se necesita también habilidad para imaginar las configuraciones físicas en función de los materiales reales, los vínculos verdaderos y las limitaciones prácticas que rigen el comportamiento de máquinas y estructuras. Uno de los objetivos primordiales cuando enseñemos Mecánica debe ser facilitar al estudiante el desarrollo de esta habilidad para la visualización, algo vital para el planteo de los problemas. Y, además, ocurre que la construcción de un modelo matemático significativo es a menudo más importante que su misma solución. El progreso máximo se consigue cuando los principios y sus limitaciones se aprenden a la vez dentro del contexto de su aplicación a la Ingeniería.

Los estudiantes suelen considerar los cursos de Mecánica como una exigencia dificultosa y, con frecuencia, también como un obstáculo académico carente de interés. La dificultad procede de las grandes dosis de razonamiento en torno a los principios fundamentales que son necesarios, en contraposición al estudio memorizado. El desinterés que a menudo se siente se debe fundamentalmente a que, muchas veces, la Mecánica se presenta como una disciplina académica desprovista en su mayor parte de aplicación práctica. Esta actitud es achacable a la extendida propensión a emplear los problemas más que nada como vehículo para ilustrar la teoría, en lugar de desarrollar ésta con el fin de resolver problemas. Cuando se permite que predomine el primer punto de vista, los problemas tienden a hacerse excesivamente idealizados y sin relación con la práctica, resultando que los ejercicios se hacen aburridos, académicos y faltos de interés; de esta forma, se despoja al estudiante de toda la valiosa experiencia que supone el planteo de problemas y, por tanto, de la posibilidad de descubrir la necesidad y el significado de la teoría. Con el segundo punto de vista se consigue reforzar los motivos para aprender la teoría y se produce un mejor equilibrio entre ésta y sus aplicaciones; por otra parte, no es posible insistir suficientemente en el papel crucial que juegan el interés hacia una disciplina y la utilidad de ésta para provocar la motivación de su estudio. Aún más, debemos resaltar el hecho de que en el mejor de los casos, la teoría sólo puede ser una aproximación al mundo real, pero no que éste sea una aproximación a la teoría. Esta diferencia filosófica es, desde luego, fundamental y distingue a la *ingeniería* de la Mecánica de la *ciencia* de la Mecánica.

Dentro del campo de la enseñanza de la Ingeniería, ha existido durante los últimos treinta años una fuerte tendencia a incrementar la extensión y el nivel de teoría en los cursos de ciencias para ingenieros y en ningún otro lugar se ha hecho sentir más esta tendencia que en los cursos de Mecánica. Mientras los estudiantes estén preparados para hacer frente a tratamientos acelerados, esa tendencia será beneficiosa. No obstante, existen pruebas y una justificable preocupación acerca del hecho de que más recientemente ha aparecido una importante disparidad entre el alcance de las enseñanzas impartidas y lo entendido de ellas. Los factores que a ello contribuyen confluyen de tres direcciones. En primer lugar, parece haber disminuido el énfasis en los contenidos de Geometría y Física de las matemáticas de los cursos preparatorios. En segundo lugar, ha habido una reducción importante, e incluso eliminación, de la enseñanza de representaciones gráficas que en el pasado servían para realzar la visualización y representación de los problemas de Mecánica. Por último, al elevar el nivel del tratamiento matemático de la Mecánica ha aparecido la tendencia a permitir que el manejo de la notación vectorial enmascare o sustituya la visualización geométrica. La Mecánica es intrínsecamente una materia que depende de la percepción física y geométrica y debemos aumentar nuestros esfuerzos para que se desarrolle de esa forma.

Como profesores de Mecánica, una de nuestras responsabilidades es emplear la matemática más adecuada a cada tipo de problema. Así, la utilización de la notación vectorial en problemas monodimensionales es generalmente banal; en el caso de problemas bidimensionales suele ser optativa; pero en los problemas tridimensionales suele ser esencial. Cuando introduzcamos operaciones vectoriales en problemas bidimensionales, es particularmente importante insistir en su significado geométrico, ya que una ecuación vectorial aparece en correspondencia a un polígono vectorial, que a menudo revela, merced a su geometría, el método de resolución más corto. Por supuesto, existen muchos problemas de Mecánica cuyas variables tienen entre ellas unas dependencias tan complejas que rebasan las capacidades de visualización y percepción normales y es esencial confiar en el cálculo. No obstante este hecho, los estudiantes llegarán a ser mejores ingenieros si su capacidad de percibir, visualizar y representar se desarrolla al máximo.

Como profesores de Mecánica para ingenieros tenemos la mayor de las obligaciones hacia la profesión de ingeniero en el sentido de situar nuestra actuación a un nivel razonable y de mantener ese nivel. Adicionalmente, tenemos la grave responsabilidad de alentar a nuestros alumnos a que piensen por sí mismos. Por ello, una ayuda excesiva para detalles que los estudiantes deben conocer ya de antes puede ser tan nociva como una ayuda escasa y fácilmente puede condicionar al estudiante haciéndolo demasiado dependiente de los demás, sin que ejercite su propia iniciativa y capacidad. Además, cuando se divide la Mecánica en un número excesivo de pequeños compartimientos, cada uno de ellos con instrucciones detalladas y repetitivas, el estudiante puede tener dificultad para distinguir entre los "árboles" y el "bosque" y, en consecuencia, deje de percibir la unidad de la Mecánica y el gran alcance práctico que tiene el reducido número de sus principios y métodos fundamentales.

Al igual que sus predecesoras, esta tercera edición de *Mecánica para Ingenieros* se ha escrito teniendo presente la anterior filosofía. Pensada especialmente para un primer curso de Mecánica, que generalmente se imparte en el segundo curso de carrera, se ha redactado en un estilo a la vez conciso y llano. Frente a la posibilidad de presentar una multitud de casos particulares, se ha preferido insistir fuertemente en mostrar la cohesión entre los conceptos fundamentales, que son relativamente pocos, y la gran variedad de problemas que con tan pocos conceptos se pueden resolver. Por ello, una característica de mayor importancia de esta obra es el tratamiento tan amplio que reciben los problemas tipo, los cuales se presentan de modo que puedan estudiarse cómodamente sin ayuda del profesor. Además, las soluciones a estos problemas tipo se ofrecen con todo detalle, con comentarios y advertencias y llamada a los puntos notables del proceso de resolución impresos en color.

El tomo I, Estática, contiene 75 problemas tipo y 950 problemas sin resolver de los que pueden extraerse enseñanzas muy variadas. De estos problemas, más de la mitad son completamente nuevos en esta tercera edición y todos ellos representan muchos casos prácticos e ejemplos de interés técnico extraídos de una gran variedad de situaciones reales.

Como novedad, en esta tercera edición la mayoría de los conjuntos de problemas se agrupan en dos secciones tituladas *Problemas introductorios* y *Problemas representativos*. Los primeros son ejercicios sencillos, sin complicaciones, pensados para que el estudiante adquiera confianza con cada nuevo tema, mientras que los segundos son problemas de dificultad y extensión regulares. En general, se presentan ordenados por dificultad creciente y los más difíciles, que se identifican con la señal ▶, se han colocado hacia el final de los *Problemas representativos*. Cada capítulo se cierra con una sección especial de problemas orientados al uso de ordenador, ubicada tras los *Problemas de repaso*. Se ofrece, además, la respuesta a todos los problemas impares y también a los más difíciles. Todos los cálculos han sido realizados y comprobados sin redondear los resultados intermedios, por lo que las respuestas finales deben coincidir con los valores indicados en lo que respecta a las cifras significativas.

Y aquí es oportuna una observación acerca del uso de ordenador. Los autores desean recalcar que la experiencia en el planteo de problemas, que permite desarrollar el raciocinio y el sentido de las cosas, es considerablemente más importante para los estudiantes que el puro ejercicio manipulativo de calcular la solución. Por ello, creemos que el empleo del ordenador debe limitarse escrupulosamente. En este estadio, la construcción de diagramas de sólido libre y la formulación de las ecuaciones será mejor hacerlas con papel y lápiz. Hay, por otra parte, ocasiones en que el *proceso de resolución* de esas ecuaciones y sus *soluciones* se ejecuta y se representa, respectivamente, mucho mejor vía ordenador. Pero los problemas orientados al ordenador deben ser genuinos en el sentido de que exista una condición de diseño o de criticalidad que deba ser determinada, sin que se trate de simples problemas "de trajín" en los que se hace variar algún parámetro sin otro motivo evidente que forzar un empleo artificial del ordenador. Con esta idea hemos confeccionado los problemas para ordenador de esta tercera edición. Para preservar un tiempo suficiente destinado al planteo de problemas se sugiere que a los alumnos se les asigne únicamente un número limitado de problemas para ordenador.

En el capítulo 2 se desarrollan las propiedades de las fuerzas, momentos, pares de fuerzas y resultantes de forma que el estudiante pueda pasar directamente a los sistemas de fuerzas no concurrentes del capítulo 3 sin que necesite bregar innecesariamente con el caso relativamente trivial del equilibrio de fuerzas concurrentes. En estos dos capítulos se presenta el estudio de los problemas bidimensionales antes que el de los tridimensionales. Se ha hecho así porque la gran mayoría de los estudiantes adquieren un mayor dominio de la Mecánica ejercitándose primero en el análisis bidimensional antes de enfrentarse a la tercera dimensión.

En el capítulo 4 se introduce la aplicación de los principios del equilibrio a las armaduras simples y a los entramados centrándose la atención esencialmente en los sistemas bidimensionales. Se incluye, no obstante, un número de ejemplos tridimensionales suficiente para que el estudiante pueda ejercitarse con las herramientas más generales de cálculo vectorial.

Al comienzo del capítulo 5 se presentan los conceptos y categorías relativos a las fuerzas distribuidas y el resto se ha dividido en dos secciones generales. En la sección A se trata de centroides y centros de masa mediante la presentación de ejemplos detallados para facilitar al estudiante el dominio de sus primeras aplicaciones de cálculo infinitesimal a problemas físicos y geométricos. En la sección B se incluyen los temas particulares de vigas, cables flexibles y fuerzas hidrostáticas y que pueden omitirse sin perder la continuidad de los conceptos fundamentales.

El capítulo 6, que trata del rozamiento, está dividido en las secciones A, sobre el fenómeno del rozamiento seco, y B, sobre aplicaciones escogidas a las máquinas. Aunque la sección B pueda omitirse por falta de tiempo, las materias que cubre proporcionan una valiosa experiencia para que el estudiante se habitúe a trabajar con fuerzas distribuidas.

En el capítulo 7 se presenta una introducción condensada del principio de los trabajos virtuales cuya aplicación se limita a los sistemas de un grado de libertad. En él se insiste particularmente en las ventajas del método basado en los trabajos virtuales y en la energía para tratar con sistemas interconectados y para determinar la estabilidad del equilibrio. El método de los trabajos virtuales proporciona una oportunidad excelente para convencer a los estudiantes de la eficacia del análisis matemático en Mecánica.

En el apéndice A se presentan los momentos y productos de inercia de las superficies. Con este tema se salva la separación entre la Estática y la Dinámica de sólidos. El apéndice C contiene un resumen de temas escogidos de matemática elemental y también varios procedimientos numéricos, el estudiante conviene que esté preparado para utilizarlos en los problemas a resolver con ordenador.

Los autores desean mencionar especialmente la magnífica contribución que a estos textos de Mecánica realizó durante veinticinco años el ilustrador John Balbalis, muerto en Octubre de 1991. Su dedicación y su elevado nivel en el arte de la ilustración acrecentaron enormemente el potencial educativo de estos libros, brindando claridad, realismo e interés a los miles de estudiantes que fueron estimulados por sus esfuerzos.

Un reconocimiento especial se debe al Dr. A. L. Hale, de Bell Telephone Laboratories, por su continuada contribución en forma de inestimables sugerencias y cuidadosa revisión del manuscrito. El Dr. Hale prestó una ayuda similar en todas las versiones anteriores de esta obra y su colaboración ha sido un activo inestimable. Expresamos además nuestro aprecio al profesor J. M. Henderson, de la Universidad de California-Davis, por sus útiles sugerencias y comentarios en torno a la selección de problemas. Extendemos nuestro agradecimiento al profesor Alfonso Díaz-Jiménez de la Universidad de Bogotá (Colombia) por los constructivos comentarios y observaciones formulados durante años. Un grupo de miembros del Departamento de Ciencia de la Ingeniería y Mecánica del Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia, entre los que se cuentan los profesores Norman E. Dowling, J. Wallace Grant, Scott L. Hendricks, Arpad A. Pap, Saad A. Ragab y George W. Swift, nos ha ofrecido sus útiles sugerencias. La contribución del personal de John Wiley & Sons, Inc., incluida la de su directora Charity Robey, refleja un elevado nivel de competencia profesional que debidamente reconocemos. Reconocemos asimismo el apoyo prestado, en forma de permiso sabático, por la Universidad Estatal e Instituto Politécnico de Virginia. Por último deseamos agradecer a nuestras esposas, Julia y Dale, la paciencia y comprensión mostradas durante las muchas horas que fueron necesarias para preparar este manuscrito.

J. L. Meriam
Santa Bárbara, California

L. Glenn Kraige
Blacksburg, Virginia

Índice analítico

PRÓLOGO V
PRÓLOGO PARA EL ESTUDIANTE VII
PRÓLOGO PARA EL PROFESOR IX

Capítulo 1: INTRODUCCIÓN A LA ESTÁTICA 1

1.1 MECÁNICA 2
1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES 2
1.3 ESCALARES Y VECTORES 3
1.4 LEYES DE NEWTON 6
1.5 UNIDADES 6
1.6 LEY DE LA GRAVITACIÓN 8
1.7 PRECISIÓN, LÍMITES Y APROXIMACIONES 10
1.8 DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE ESTÁTICA 11

Capítulo 2: SISTEMAS DE FUERZAS 15

2.1 INTRODUCCIÓN 16
2.2 FUERZA 16

SECCIÓN A. SISTEMAS DE FUERZAS BIDIMENSIONALES 18

2.3 COMPONENTES RECTANGULARES 18
2.4 MOMENTO 28
2.5 PAR 36
2.6 RESULTANTES 43

SECCIÓN B. SISTEMAS DE FUERZAS TRIDIMENSIONALES ... 49

2.7 COMPONENTES RECTANGULARES ... 49
2.8 MOMENTO Y PAR ... 56
2.9 RESULTANTES ... 67
2.10 FORMULACIÓN DE PROBLEMAS Y REPASO ... 77

Capítulo 3: EQUILIBRIO 83

3.1 INTRODUCCIÓN ... 84

SECCIÓN A. EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES ... 84

3.2 AISLAMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO ... 84

EJERCICIOS SOBRE EL DIAGRAMA DE SÓLIDO LIBRE ... 91

3.3 CONDICIONES DE EQUILIBRIO ... 94

SECCIÓN B. EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES ... 115

3.4 CONDICIONES DE EQUILIBRIO ... 115
3.5 REPASO Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS ... 131

Capítulo 4: ESTRUCTURAS 139

4.1 INTRODUCCIÓN ... 140
4.2 ARMADURAS PLANAS ... 140
4.3 MÉTODO DE LOS NUDOS ... 142
4.4 MÉTODO DE LAS SECCIONES ... 151
4.5 ARMADURAS ESPACIALES ... 159
4.6 ENTRAMADOS Y MÁQUINAS ... 165
4.7 REPASO Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS ... 181

Capítulo 5: FUERZAS DISTRIBUIDAS 189

5.1 INTRODUCCIÓN ... 190

SECCIÓN A. CENTROS DE MASA Y CENTROIDES ... 191

5.2 CENTRO DE MASA ... 191
5.3 CENTROIDES DE LÍNEAS, SUPERFICIES Y VOLÚMENES ... 193
5.4 FIGURAS Y CUERPOS COMPUESTOS; APROXIMACIONES ... 208
5.5 TEOREMAS DE PAPPO ... 218

SECCIÓN B: TEMAS ESPECIALES ... 223

5.6 VIGAS-EFECTOS EXTERNOS ... 223
5.7 VIGAS-EFECTOS INTERNOS ... 229
5.8 CABLES FLEXIBLES ... 240
5.9 ESTÁTICA DE FLUIDOS ... 252
5.10 REPASO Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS ... 269

Capítulo 6: ROZAMIENTO 277

6.1 INTRODUCCIÓN ... 278

SECCIÓN A. FENÓMENOS DE ROZAMIENTO ... 278

6.2 TIPOS DE ROZAMIENTO ... 278
6.3 ROZAMIENTO SECO ... 279

SECCIÓN B. APLICACIONES DEL ROZAMIENTO A LAS MÁQUINAS ... 297

6.4 CUÑAS ... 297
6.5 TORNILLOS ... 299
6.6 COJINETES DE APOYO ... 306
6.7 COJINETES DE EMPUJE; ROZAMIENTO CIRCULAR ... 307
6.8 CABLES FLEXIBLES ... 313
6.9 RESISTENCIA A LA RODADURA ... 315
6.10 REPASO Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS ... 321

Capítulo 7: TRABAJO VIRTUAL 329

7.1 INTRODUCCIÓN ... 330
7.2 TRABAJO ... 330
7.3 EQUILIBRIO ... 333
7.4 ENERGIA POTENCIAL Y ESTABILIDAD ... 347
7.5 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ... 361

Apéndice A: MOMENTOS DE INERCIA DE UNA SUPERFICIE 367

A.1 INTRODUCCIÓN ... 367
A.2 DEFINICIONES ... 368
A.3 SUPERFICIES COMPUESTAS ... 381
A.4 PRODUCTOS DE INERCIA Y ROTACION DE LOS EJES ... 387

Apéndice B: MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS 399

Apéndice C: TEMAS ESCOGIDOS DE MATEMÁTICAS 401

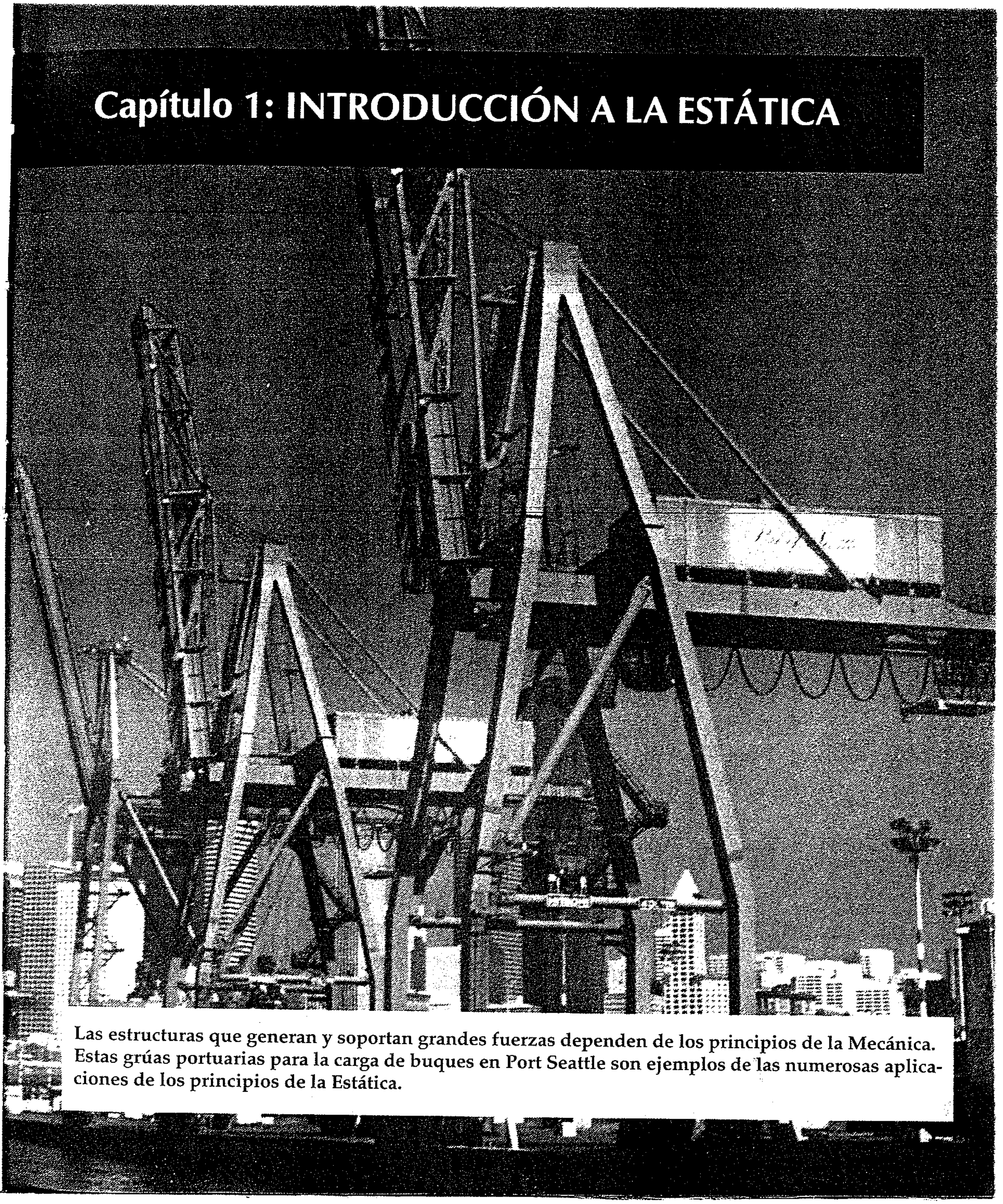
C.1 INTRODUCCIÓN 401
C.2 GEOMETRÍA PLANA 401
C.3 GEOMETRÍA DEL ESPACIO 402
C.4 ÁLGEBRA 402
C.5 GEOMETRÍA ANALÍTICA 403
C.6 TRIGONOMETRÍA 404
C.7 ÁLGEBRA VECTORIAL 404
C.8 SERIES 407
C.9 DERIVADAS 408
C.10 INTEGRALES 408
C.11 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR EL MÉTODO NUMÉRICO DE NEWTON 411
C.12 TÉCNICAS ESCOGIDAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA 412

Apéndice D: TABLAS ÚTILES 417

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS 425

ÍNDICE ALFABÉTICO 427

Capítulo 1: INTRODUCCIÓN A LA ESTÁTICA



Las estructuras que generan y soportan grandes fuerzas dependen de los principios de la Mecánica. Estas grúas portuarias para la carga de buques en Port Seattle son ejemplos de las numerosas aplicaciones de los principios de la Estática.

La Mecánica es la parte de la Física que estudia el estado de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas. En los estudios de ingeniería no hay otra materia que tenga un papel más importante que el de la Mecánica y puede afirmarse que los primeros estudios de esta disciplina constituyen ya los primeros trabajos de ingeniería. La investigación y desarrollo modernos en los campos de las vibraciones, de la estabilidad, de la resistencia de estructuras y máquinas, de los cohetes y naves espaciales, control automático, fabricación de motores, circulación de fluidos, de los aparatos y maquinaria eléctrica y del comportamiento molecular, atómico y subatómico dependen en gran parte de los principios fundamentales de la Mecánica. El conocimiento a fondo de estos principios es un requisito previo esencial para trabajar en éstos y otros muchos campos.

La Mecánica es la más antigua de las ciencias físicas. Los escritos más antiguos conocidos acerca de esta materia son los de Arquímedes (287-212 a.d.J.C.) referentes al principio de la palanca y al principio del empuje hidrostático. A la formulación de las leyes de la combinación vectorial de fuerzas dada por Stevinus (1548-1620) le aguardaba un progreso sustancial, y ese mismo autor enunció la mayoría de los principios de la Estática. El primer estudio de un problema dinámico se debe a Galileo (1564-1642) y se refiere a sus experimentos acerca de la caída de los cuerpos. La formulación exacta de las leyes del movimiento, incluida la ley de la gravitación, fue realizado por Newton (1642-1727), quien también concibió la idea de lo infinito en análisis matemático. También Da Vinci, Varignon, Euler, D'Alambert, Lagrange, Laplace y otros contribuyeron de modo sustancial al desarrollo de la Mecánica.

Los principios de la Mecánica como ciencia incorporan el rigor de la Matemática, de la cual dependen en sumo grado. Así pues, la Matemática representa un importante papel en la consecución del objetivo de la Mecánica Técnica, objetivo que no es sino la aplicación de aquellos principios a los problemas prácticos. En esta obra nos interesan tanto la rigurosidad en el desarrollo de los principios como la aplicación de éstos. El número de principios fundamentales de la Mecánica es relativamente pequeño, pero su campo de aplicación rebasa todo límite y los métodos empleados por la Mecánica se extienden a un gran número de ramas de la Ingeniería.

La Mecánica se divide lógicamente en dos partes: la *Estática*, que trata del equilibrio de los cuerpos bajo la acción de fuerzas, y la *Dinámica*, que trata del movimiento de los cuerpos. Esta *Mecánica para Ingenieros* está dividida en las dos partes mencionadas: Tomo I, *Estática* y Tomo II, *Dinámica*.

1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Hay ciertas definiciones y conceptos que son fundamentales para estudiar Mecánica y que deben ser entendidos desde un principio.

Espacio es la región geométrica ocupada por los cuerpos cuyas posiciones se especifican mediante medidas de longitud y angulares respecto de un sistema de coordenadas. Para problemas tridimensionales, el espacio que utilicemos precisará de tres coordenadas independientes; en los problemas bidimensionales necesitaremos sólo dos coordenadas.

Tiempo es una medida de la sucesión de acontecimientos y en Dinámica constituye una magnitud básica. En los problemas de Estática el tiempo no interviene directamente.

Masa es la medida de la inercia de un cuerpo, que es la resistencia que éste presenta a todo cambio de velocidad. La masa puede también decirse que es la cantidad de materia que contiene un cuerpo. Respecto de la Estática, de mayor importancia para nosotros es que la masa es asimismo la propiedad de los cuerpos en virtud de la cual los mismos se atraen entre sí.

Fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro. Una fuerza tiende a desplazar a un cuerpo en la dirección de su acción sobre dicho cuerpo. La acción de la fuerza se caracteriza por su *módulo* o *intensidad*, por la *dirección y sentido* de su acción, y por su *punto de aplicación*. Las fuerzas son magnitudes vectoriales y en el capítulo 2 se discutirán detalladamente sus propiedades.

Partícula. Se llama así a un cuerpo de dimensiones despreciables. En el aspecto matemático, una partícula es un cuerpo cuyas dimensiones se aproximan a cero, por lo que puede analizarse como una masa puntual. Muchas veces se toma una partícula como elemento infinitesimal o diferencial de un cuerpo. Y también cuando las dimensiones de un cuerpo no influyen en la descripción de su posición ni en las fuerzas aplicadas sobre él, puede tratarse el cuerpo como si fuera una partícula.

Cuerpo rígido. Un cuerpo se supone rígido cuando los movimientos relativos entre sus partes son despreciables en lo que atañe al problema tratado. Por ejemplo, el cálculo de la tensión que soporta el cable de la pluma de una grúa móvil bajo carga no está fundamentalmente afectado por las pequeñas deformaciones internas de los miembros estructurales que forman la pluma; así pues, por lo que respecta a la determinación de las fuerzas exteriores que actúan sobre la pluma, ésta puede tratarse como cuerpo rígido. Primordialmente, la Estática trata del cálculo de las fuerzas externas que actúan sobre cuerpos rígidos en equilibrio. Para determinar los esfuerzos y las deformaciones internas, tendrían que estudiarse las características de deformación del material de la pluma. Este tipo de análisis corresponde a la mecánica de los cuerpos deformables que sigue al estudio de la Estática.

1.3 ESCALARES Y VECTORES

Las magnitudes objeto de la Mecánica son de dos tipos: escalares y vectoriales. Una magnitud *escalar* es la que tiene asociada una única cantidad. Ejemplos de escalares son el tiempo, el volumen, la densidad, la celeridad (módulo de la velocidad), la energía y la masa. Una magnitud *vectorial* es la que tiene asociada, además de una cantidad, una dirección y un sentido y obedece a la ley del paralelogramo para la adición. Son ejemplos de magnitudes vectoriales, o vectores, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el momento y la cantidad de movimiento.

Las magnitudes físicas vectoriales pueden pertenecer a uno de los tres tipos siguientes: vectores libres, vectores deslizantes o vectores fijos.

Vector libre es aquel cuya acción no está confinada o asociada a una única recta. Por ejemplo, si un cuerpo se mueve sin rotar, el movimiento o desplazamiento de uno cualquiera de sus puntos puede representarse mediante un vector y éste describirá igualmente bien la dirección, el sentido y el módulo del desplazamiento de todos los puntos del cuerpo. Por tanto, el desplazamiento de ese cuerpo podemos representarlo con un vector libre.

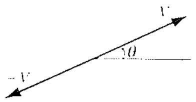
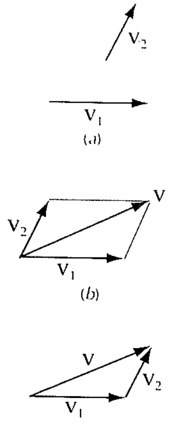


Figura 1.1

Vector deslizante es aquel para el cual hay que conservar una sola recta en el espacio a lo largo de la cual actúa el vector. Al considerar la acción de una fuerza sobre un cuerpo rígido, ésta puede aplicarse en cualquier punto de su línea de acción, o recta soporte, sin que se altere el efecto que produce sobre el cuerpo[1] y, por tanto, puede considerarse como vector deslizante.

Vector fijo es aquel para el cual se especifica un único punto de aplicación y, por ello, ocupa una posición fija en el espacio. La acción de una fuerza sobre un cuerpo deformable, o no rígido, debe especificarse con un vector fijo situado en el punto de aplicación de la fuerza. En este caso, las fuerzas y movimientos internos serán función del punto de aplicación de la fuerza, así como de su recta soporte e intensidad.

Un vector **V** se representa con un segmento rectilíneo (fig. 1.1) que tenga la dirección y sentido apropiados, indicando este último con una punta de flecha. La longitud del segmento orientado representa, a una escala convenida, el módulo |**V**| del vector y se escribe en cursiva *V*. En las ecuaciones escalares y, muchas veces, en los diagramas en que los vectores se rotulan sólo con su módulo, los símbolos correspondientes a aquellos aparecerán en cursivas. Las negritas se emplean para representar vectores cuando el aspecto direccional de la magnitud sea una parte de su representación. Al escribir ecuaciones vectoriales, debemos *siempre* asegurarnos de que se preserve la distinción entre vectores y escalares. Para el trabajo manuscrito se recomienda emplear una marca distintiva para los vectores, tal como un subrayado, $\underline{V}$, o una flecha encima, $\vec{V}$, que haga las veces de la negrita de imprenta. La dirección del vector **V** puede medirse por un ángulo θ tomado a partir de una dirección de referencia conocida. El opuesto a **V** es un vector −**V** cuyo sentido es el contrario al de **V**, tal como se muestra en la figura 1.1.



(*a*)
(*b*)
(*c*)
Figura 1.2

Los vectores, además de poseer módulo, dirección y sentido, deben cumplir la ley del paralelogramo. Esta ley establece que dos vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, tratados como vectores libres (fig. 1.2a), pueden sustituirse por su equivalente **V** que es la diagonal del paralelogramo definido por $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ tal como se muestra en la figura 1.2b. Esta combinación, o suma vectorial, se representa por la igualdad vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

donde el signo + utilizado combinadamente con los vectores (en negritas) significa adición *vectorial* y no *escalar*. La suma escalar de los módulos, o intensidades, de los dos vectores se escribe del modo usual $V_1 + V_2$ y de la geometría del paralelogramo resulta inmediato que $V \neq V_1 + V_2$.

Los dos vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, tratados otra vez como vectores libres, pueden sumarse también colocando el origen de uno en el extremo del otro, según la ley del triángulo, tal como se indica en la figura 1.2*c*, obteniéndose la misma suma vectorial **V**. En el diagrama se ve que el orden de adición de los vectores no altera su suma, por lo que $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1$.

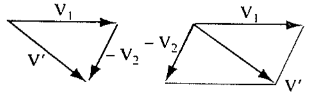


Figura 1.3

---

[1] Es el principio de transmisibilidad que se explica en 2.2.

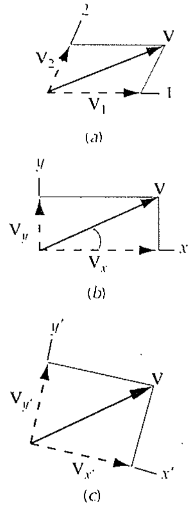
La diferencia $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ entre los dos vectores se obtiene, tal como se muestra en la figura 1.3, sin más que sumar $-\mathbf{V}_2$ a $\mathbf{V}_1$, pudiéndose utilizar indistintamente el método del paralelogramo o el del triángulo. La diferencia **V**′ entre dos vectores se expresa mediante la igualdad vectorial

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$$

donde el signo − denota *sustracción vectorial*.

De dos o más vectores cualesquiera cuya suma sea igual a un cierto vector **V** se dice que son componentes de ese vector. Luego los vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ de la figura 1.4a son las componentes de **V** en las direcciones 1 y 2, respectivamente. Acostumbra a ser más cómodo tratar con componentes mutuamente perpendiculares, a las que se da el nombre de *componentes rectangulares*. Los vectores $\mathbf{V}_x$ y $\mathbf{V}_y$ de la figura 1.4b son, respectivamente, las componentes *x* e *y* de **V**; e igualmente, en la figura 1.4*c*, $\mathbf{V}'_x$ y $\mathbf{V}'_y$ con las componentes *x*′e *y*′ de **V**. Al emplear componentes rectangulares, la dirección del vector respecto, por ejemplo, al eje *x* está claramente especificada por

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{V_y}{V_x}$$



(*a*)
(*b*)
(*c*)
Figura 1.4

Todo vector **V** puede expresarse matemáticamente multiplicando su módulo *V* por un vector **n** de módulo unidad cuya dirección y sentido coincidan con los de **V**. Así,

$$\mathbf{V} = V\mathbf{n}$$

De esta manera tanto el módulo como la dirección y el sentido del vector se encierran en una única expresión matemática. En muchos problemas, especialmente en los tridimensionales, conviene expresar las componentes rectangulares de **V** (fig. 1.5) en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, según las direcciones *x*, *y* y *z*, respectivamente, los cuales tienen módulo unidad. Entonces, la suma vectorial de las componentes se escribe como sigue:

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$

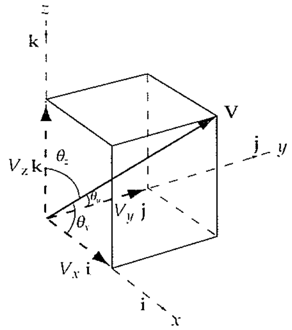


Figura 1.5

Ahora empleamos los *cosenos directores* *l*, *m* y *n* de **V** dados por

$$l = \cos\theta_x \qquad m = \cos\theta_y \qquad n = \cos\theta_z$$

y así podemos expresar como sigue los valores de las componentes de **V**

$$V_x = lV \qquad V_y = mV \qquad V_z = nV$$

siendo

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

Obsérvese que $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

1.4 LEYES DE NEWTON

Sir Isaac Newton fue el primero en enunciar correctamente los principios fundamentales que rigen el movimiento de una partícula y en demostrar su validez. Expresadas en palabras modernas, tales leyes rezan:

Primera. Una partícula sobre la que no actúe ninguna fuerza que no esté equilibrada, o permanece en reposo o sigue un movimiento rectilíneo uniforme.

Segunda. La aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre ella y tiene la dirección y el sentido de dicha fuerza.

Tercera. Cuando un cuerpo ejerce una fuerza, llamada *acción*, sobre otro, éste a su vez ejerce sobre el primero otra fuerza, llamada *reacción*, de iguales módulo y recta soporte, pero de sentido contrario.

La validez de estas leyes se ha comprobado experimentalmente de muchas y muy variadas maneras. En Dinámica, la segunda ley de Newton constituye la base de la mayoría de los análisis. Aplicada a una partícula de masa m puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

donde **F** es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula y **a** es la aceleración resultante. Esta ecuación es *vectorial*, ya que la dirección y sentido de **F** son los mismos que los de **a**, además de ser iguales los módulos de **F** y $m\mathbf{a}$. La primera ley de Newton contiene el principio del equilibrio de las fuerzas, que es la cuestión primordial de la Estática. En realidad, esta ley es consecuencia de la segunda, ya que no habrá aceleración cuando la fuerza sea nula y la partícula deberá estar en reposo o moverse a velocidad constante. La primera ley no aporta nada nuevo a la descripción del

tre, al final del próximo apartado 1.6 se hace una breve referencia al mismo, pero sólo a efectos comparativos. En el cuadro siguiente se resumen las cuatro magnitudes principales y sus unidades y símbolos.

Magnitud	Magnitud dimensional	Unidades SI		SISTEMA TERRESTRE O TÉCNICO	
		Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo
Masa	M	Unidades básicas: kilogramo	kg		UTM
Longitud	L	metro	m	Unidades básicas: metro	m
Tiempo	T	segundo	s	segundo	seg
Fuerza	F	newton	N	kilopondio	kgf, kp

Unidades SI. El Sistema Internacional de Unidades, abreviadamente SI, está ya aceptado universalmente y es una versión moderna del sistema métrico. Por convenio internacional sustituirá paulatinamente a otros sistemas que han sido de uso común. Tal como se muestra en el cuadro, las unidades básicas SI son el kilogramo (kg) para la masa, el metro (m) para la longitud y el segundo (s) para el tiempo, mientras que la unidad de fuerza, el newton (N), es una unidad derivada de las tres anteriores a través de la ec. (1.1). Es decir, fuerza (N) = masa(kg) x aceleración(m/s^2), o sea

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$$

de un nuevo metro patrón, más preciso y fácilmente reproducible, que en la actualidad está definido como 1 650 763,73 longitudes de onda de determinada radiación del átomo de criptón 86.

Tiempo. Inicialmente el segundo se definió como la fracción 1/86 400 del día solar medio. Sin embargo, las irregularidades registradas en la rotación de la Tierra introducían inconvenientes en esta definición, por lo que se adoptó un patrón más preciso y reproducible. Actualmente, el segundo está definido como la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a determinado estado del átomo de cesio 133.

Evidentemente, para la mayoría de los trabajos de ingeniería y para nuestros propósitos al estudiar Mecánica, la precisión de estos patrones se encuentra considerablemente por encima de nuestras necesidades.

Como valor normalizado de la aceleración gravitatoria g se tomó su valor a nivel del mar y a 45° de latitud. Dicho valor es

$$g = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$$

Para la inmensa mayoría de los cálculos técnicos basta con el valor aproximado de 9,81 $\mathrm{m/s^2}$.

En Estática nos importan primordialmente las unidades de longitud y fuerza, y la masa sólo intervendrá cuando hayamos de calcular fuerzas gravitatorias, tal como se expone en el apartado siguiente.

1.6 LEY DE LA GRAVITACIÓN

Tanto en Estática como en Dinámica abundan las ocasiones en que es necesario calcular el peso de un cuerpo (o sea, la fuerza gravitatoria que actúa sobre el mismo). Ese valor depende de la ley de la gravitación, que también fue formulada por Newton

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1.2)$$

donde F es la fuerza de atracción mutua entre dos partículas, G es una constante universal, llamada constante de gravitación, m_1 y m_2 son las masas de las dos partículas, y r es la distancia entre los centros de las partículas.

Las fuerzas mutuas F cumplen la ley de acción y reacción, ya que son iguales y opuestas y están dirigidas a lo largo de la recta que une los centros de las partículas (fig. 1.6). Experimentalmente se ha obtenido $G = 6{,}673 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$. Entre todo par de cuerpos se ejercen fuerzas gravitatorias. En la superficie terrestre la única fuerza gravitatoria de valor apreciable es la debida a la atracción de la Tierra. Así, por ejemplo, dos esferas de hierro de 100 mm de diámetro son atraídas por la Tierra con una fuerza de 37,1 N cada una, fuerza que recibe el nombre de peso. Por otra parte, la atracción mutua entre ambas esferas, cuando ambas están tangentes es de 0,000 000 095 1 N, fuerza evidentemente despreciable frente a la de 37,1 N de la atracción terrestre y, por tanto, ésta será la única fuerza gravitatoria que habrá que tener en cuenta en la mayoría de los experimentos ingenieriles realizados en la superficie terrestre.

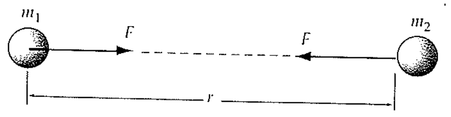


Figura 1.6

A la atracción gravitatoria de la Tierra sobre un cuerpo se le llama *peso* del cuerpo. Esta fuerza existe tanto si el cuerpo está en reposo como si está en movimiento. Dado que se trata de una fuerza, el peso de un cuerpo deberá expresarse en newtons (N) según el sistema SI. Por desgracia, ha sido práctica frecuente referirse al kilogramo como a un peso, porque indebidamente se introducía el sistema terrestre. Pero debe quedar claro que la palabra "peso" expresada en kilogramos denota técnicamente una masa. Para evitar confusiones, en este libro la palabra "peso" se utiliza únicamente como expresión de la fuerza debida a la atracción gravitatoria de la Tierra y que se mide en newtons. La palabra "kilogramo" se reserva exclusivamente para expresar "masas". Ello es así porque se emplea sólo el sistema SI.

La atracción de la Tierra, definida por la expresión 1.2, sobre un cuerpo de masa m situado en la superficie terrestre puede determinarse experimentalmente de forma sencilla. Si esa fuerza gravitatoria, o peso, vale W, como el cuerpo cae con una aceleración g, la ecuación 1.1 nos dará

$$W = mg \qquad (1.3)$$

El peso W se expresará en newtons (N) cuando m se exprese en kilogramos(kg) y g en metros por segundo cuadrado($\mathrm{m/s^2}$). Por lo que respecta a los cálculos de Estática ya hemos dicho que el valor admitido de $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ es suficientemente preciso.

De acuerdo con lo anterior, el peso de la masa patrón en unidades SI será $(1\ \mathrm{kg}) \times (9{,}81\ \mathrm{m/s^2}) = 9{,}81\ \mathrm{N}$.

En el sistema terrestre, o técnico, el peso de la masa patrón es por definición la unidad de fuerza, llamada *kilopondio* (kp) y también *kilogramo-fuerza* (kgf). Resulta entonces que podemos establecer que

$$1\ \mathrm{kp} = 9{,}81\ \mathrm{N}$$

puesto que ambos valores expresan el peso de la misma masa. Según la expresión 1.3, en el sistema técnico la masa de la masa patrón valdrá (1/9,81) UTM. La unidad de masa en el sistema técnico carece de nombre específico y suele expresarse con las iniciales UTM, de unidad técnica de masa. Esta unidad no se emplea en esta obra, en la que se hace uso exclusivo de unidades SI.

Para redondear estas aclaraciones, diremos que un "peso" de 75 kp (sistema técnico) es la misma cantidad que un "peso" de 9,81 x 75 = 735,75 N(SI) y que, según la ecuación 1.3, un cuerpo cuyo peso sea éste posee una "masa" de 75/9,81 = 7,65 UTM, o bien de 735,75/9,81 = 75 kg(SI). En la figura 1.7 se representan ejemplos de peso y masa expresados en ambos sistemas como ayuda para comprender la relación entre esas magnitudes y entre ambos sistemas. Téngase aquí en cuenta que el peso verdadero (atracción gravitatoria de la Tierra) y el peso aparente (el medido por una balanza de resortes) son levemente diferentes. Esta diferencia, que se debe a la rotación de la Tierra, es muy pequeña y la despreciamos. Este efecto se estudiará en el *Tomo II, Dinámica*.

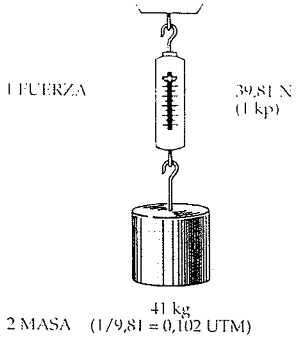


Figura 1.7

1.7 PRECISIÓN, LÍMITES Y APROXIMACIONES

El número de cifras significativas que se consignen en un resultado no debe ser mayor que el que corresponda al mínimo número de cifras significativas de los datos. Así, el área de la sección recta de una barra cuadrada cuyo lado de 24 mm se midió con una aproximación de medio milímetro deberá escribirse igual a 580 mm^2 y no a 576 mm^2 como resultaría al multiplicar los números.

Cuando los cálculos conduzcan a pequeñas diferencias entre cantidades grandes, deberá lograrse una precisión lo mayor posible. Así, será necesario conocer los números 4.2503 y 4.2391 con una precisión de cinco cifras significativas a fin de poder calcular su diferencia 0.0112 con una precisión de tres cifras significativas. En algunos cálculos largos suele ser difícil saber al principio el número de cifras significativas que deben tener los datos originales para asegurar una cierta precisión en la respuesta. La precisión de tres cifras significativas se considera satisfactoria para la mayoría de los cálculos técnicos.

En este texto, las soluciones se muestran por lo general con tres cifras significativas, salvo que el primer dígito sea 1, en cuyo caso las cifras significativas son cuatro. A efectos de cálculo, todos los datos que se ofrecen deben tomarse como exactos.

El *orden* de las cantidades infinitesimales suele ocasionar confusiones. En el límite, los infinitésimos de orden superior se pueden siempre despreciar frente a los de orden inferior cuando nos acercamos al límite matemático. Por ejemplo, el elemento de volumen ΔV de un cono recto de revolución de altura h y base de radio r puede considerarse como una rebanada circular situada a una distancia x del vértice y de espesor Δx. Puede comprobarse que la expresión completa del volumen del elemento se puede escribir en la forma

$$\Delta V = \frac{\pi r^2}{h^2}[x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 + \tfrac{1}{3}(\Delta x)^3]$$

Puede verse que, al pasar al límite yendo de ΔV a dv y de Δx a dx, los términos en los que figuran $(\Delta x)^2$ y $(\Delta x)^3$ desaparecen, quedando simplemente

$$dV = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2\,dx$$

que da una expresión exacta al ser integrada.

Al manejar ángulos muy pequeños, pueden hacerse generalmente hipótesis simplificadoras. Consideremos el triángulo rectángulo de la figura 1.8, donde el ángulo θ, expresado en radianes, es relativamente pequeño. Tomando la hipotenusa como unidad, por la geometría de la figura se ve que la longitud de arco $1 \times \theta$ y sen θ son dos valores muy próximos. Además, lo mismo puede decirse de sen θ y tg θ. Es decir, para ángulos muy pequeños, podemos escribir

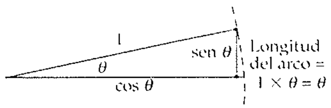


Figura 1.8

$$\text{sen}\ \theta \cong \text{tg}\ \theta \cong \theta \qquad \cos\theta \cong 1$$

Estas aproximaciones equivalen a retener únicamente los primeros términos en los desarrollos en serie de estas tres funciones. Como ejemplo de la aproximación que se consigue, en el caso de un ángulo de 1° se tiene

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 0{,}017\,453\ \text{rad} \qquad & \text{tg}\ 1^\circ &= 0{,}017\,455 \\ \text{sen}\ 1^\circ &= 0{,}017\,452 \qquad & \cos 1^\circ &= 0{,}999\,848 \end{aligned}$$

Cuando se desee mayor precisión, pueden retenerse los dos primeros términos y éstos son

$$\text{sen}\ \theta \cong \theta - \theta^3/6 \qquad \text{tg}\ \theta \cong \theta + \theta^3/3 \qquad \cos\theta \cong 1 - \theta^2/2$$

Al sustituir el seno por el ángulo, el error es sólo del 0,005% si el ángulo es 1°. Si el ángulo es 5°, el error será del 0,13%, y para 10° el error vale 0,51%. Es evidente ahora que cuando el ángulo θ tienda a cero se cumplirán en el límite las siguientes relaciones

$$\text{sen}\ d\theta = \text{tg}\ d\theta = d\theta \qquad \cos d\theta = 1$$

Por supuesto, el ángulo $d\theta$ debe expresarse en radianes.

1.8 DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE ESTÁTICA

El estudio de la Estática versa acerca de la descripción cuantitativa de las fuerzas que se ejercen sobre las estructuras portantes en equilibrio. Las matemáticas establecen las relaciones entre las distintas magnitudes que intervienen en cada caso y permiten predecir, a partir de esas relaciones, los efectos que se producen. Al formular esa descripción es necesario un proceso mental doble. Debe pensarse con arreglo a la situación física y también de acuerdo con la correspondiente descripción matemática. El estudio de todo problema requerirá pasar mentalmente una y otra vez, en ambos sentidos, del punto de vista físico al matemático. Sin duda, uno de los objetivos más importantes para el estudiante debe ser desarrollar su capacidad para realizar sin trabas esas transiciones. Debemos reconocer que la formulación matemática de un problema físico representa un modelo o descripción límite ideal que se aproxima, pero nunca alcanza, a la situación física real.

Al construir el modelo matemático idealizado para un problema técnico dado, siempre se harán ciertas aproximaciones. De éstas, unas serán de índole matemática y otras serán de índole física. Por ejemplo, suele ser necesario despreciar distancias, ángulos o fuerzas de poco valor, frente a otras distancias, ángulos o fuerzas mucho mayores. Una fuerza que de hecho se halle distribuida sobre una pequeña superficie del cuerpo en el que actúa puede tomarse como una fuerza concentrada si las dimensiones de esa superficie son reducidas con respecto a otras dimensiones pertinentes. El peso por unidad de longitud de un cable de acero podrá despreciarse si la tensión de éste es varias veces mayor que su peso total, mientras que el peso no podrá despreciarse si se trata de determinar la flecha del cable suspendido bajo la acción de su propio peso. Así pues, las hipótesis que se hagan dependerán de la información que se desee conseguir y de la precisión exigida. Debemos estar constantemente atentos a las distintas hipótesis a las que recurramos para formular los problemas reales. La capacidad para entender y utilizar unas hipótesis adecuadas al plantear y resolver problemas técnicos es, desde luego, una de las características más importantes de los buenos ingenieros. Uno de los principales fines de esta obra es facilitar un máximo de ocasiones para desarrollar esa capacidad mediante la formulación y análisis de numerosos problemas prácticos en los que intervengan los principios de la Estática.

Los dibujos son asimismo una importante herramienta de análisis y son útiles en tres aspectos. Primero, permiten representar gráficamente un sistema físico mediante un esquema o diagrama. La representación geométrica es vital para la interpretación física y ayudan enormemente a visualizar los aspectos tridimensionales de muchos problemas. Segundo, constituyen muchas veces un medio para resolver situaciones físicas prescindiendo de métodos matemáticos directos que podrían ser engorrosos. Las soluciones gráficas no sólo proporcionan medios prácticos de obtener resultados, sino que, además, son de gran ayuda para hacer la transición mental entre la situación física y la expresión matemática, puesto que ambas están representadas simultáneamente. Un tercer uso de los dibujos es la presentación de resultados sobre diagramas o curvas, lo cual es una ayuda inestimable para la interpretación.

Como ocurre con todos los problemas técnicos, es esencial un método eficaz para abordar los problemas de Estática. El desarrollo de hábitos correctos en el planteo de los problemas y en la representación de los resultados se mostrará como un haber valiosísimo. Cada proceso de resolución debe seguir una sucesión lógica de pasos que lleven desde la hipótesis a la conclusión y su representación debe comprender una exposición clara de las partes siguientes, cada una de ellas perfectamente identificada:

1. Datos conocidos
2. Resultados buscados
3. Diagramas necesarios
4. Cálculos
5. Respuestas y conclusiones

Conviene además incluir una serie de comprobaciones de los cálculos en puntos intermedios del proceso. Debe observarse si son razonables o no los valores numéricos y comprobarse frecuentemente la precisión y la homogeneidad dimensional de los términos. Es también importante que el trabajo se disponga pulcra y ordenadamente. Las soluciones descuidadas que los demás no puedan leer son de poco o ningún valor. La disciplina inherente a una buena presentación es por si misma una ayuda inestimable para desarrollar la capacidad de plantear y analizar. Muchos problemas que al principio pueden parecer difíciles y complicados se clarifican y simplifican cuando se abordan con un método lógico y disciplinado.

La Estática se basa en un número sorprendentemente reducido de conceptos fundamentales y requiere ante todo aplicar esas relaciones fundamentales a una diversidad de situaciones. En esa aplicación, el *método* de análisis es de primera importancia. Al resolver un problema es esencial que las leyes que se apliquen estén bien grabadas en la mente y que esos principios se apliquen literal y exactamente. Al aplicar los principios que definen los requisitos para las fuerzas que actúen sobre un cuerpo, es esencial que el cuerpo esté *aislado* de los demás cuerpos para que sea posible hacer un inventario completo y exacto de todas las fuerzas actuantes sobre ese cuerpo. Ese *aislamiento* debe existir en nuestra mente y debe estar representado sobre el papel. El dibujo de dicho cuerpo idealmente aislado con la representación de *todas* las fuerzas exteriores que actúan sobre él recibe el nombre de *diagrama de sólido libre*. Que el *método del diagrama de sólido libre* es la clave para comprender la Mecánica está hace tiempo establecido. Ello se debe a que el *aislamiento* del cuerpo es el instrumento con el que se separan claramente la *causa* y el *efecto* y merced al cual se centra exactamente nuestra atención en la aplicación literal de un principio. El procedimiento para dibujar diagramas para sólido libre se tratará en el capítulo 3, donde por primera vez se utilizan.

Al aplicar las leyes de la Estática, pueden emplearse directamente los valores numéricos de las cantidades al ir en busca de la solución o bien podemos representar las cantidades mediante símbolos y dejar la respuesta en forma de fórmula. Con el primer método, en cada etapa del cálculo se evidencia el valor de todas las cantidades expresado en las unidades respectivas, lo cual resulta ventajoso cuando se valora la importancia práctica de cada término. No obstante, la solución simbólica ofrece varias ventajas sobre la numérica. En primer lugar, la abreviatura que supone el empleo de símbolos facilita el concentrar la atención en la interconexión de la situación física con la correspondiente descripción matemática. En segundo lugar, la solución simbólica nos permite hacer una comprobación dimensional a cada paso, mientras que la homogeneidad dimensional puede perderse si se emplean sólo valores numéricos. Tercero, una solución simbólica la podemos usar repetidamente para obtener respuestas al mismo problema cuando se emplean diferentes conjuntos de valores y unidades de las cantidades. Es esencial adquirir soltura en ambas formas de resolver problemas.

El estudiante descubrirá que los problemas de Estática pueden resolverse de tres maneras diferentes. Primero, podemos resolver un problema por cálculo manual directo y llegar a unos resultados expresados con símbolos algebraicos o con valores numéricos; la mayoría de los problemas caen en esta categoría. Segundo, ciertos problemas se tratan fácilmente con procedimientos gráficos. Tercero, cuando interviene un gran número de ecuaciones o cuando los parámetros varían, el empleo de ordenador resulta especialmente útil. En el *Tomo I, Estática*, se presenta un cierto número de problemas designados como *problemas especiales para ordenador*. Estos aparecen al final de los problemas de repaso de cada capítulo y se han elegido de modo que ilustren para qué tipos de problemas el uso de ordenador ofrece una ventaja inequívoca. La elección del método de resolución más expeditivo constituye un aspecto importante de la experiencia a adquirir en la resolución de problemas.

PROBLEMAS

1.1 Determinar el ángulo que forma el vector **V** = –5**i** + 12**j** con el semieje x positivo.

Resp. $\theta_x = 112{,}6°$

1.2 Un vector **V** contenido en el plano x-y tiene un módulo de 20. Si su coseno director respecto al eje y es – 0,6 y su componente x es positiva, hallar su expresión en función de los vectores unitarios **i** y **j**. Escribir el vector unitario n de la misma dirección y sentido que **V**.

1.3 Una cierta fuerza esta representada por el vector **F** = 60**i** – 60**j** + 30**k** N. Determinar los ángulos que forma **F** con las direcciones x, y y z.

Resp. $\theta_x = 48{,}2°$ $\theta_y = 131{,}8°$ $\theta_z = 70{,}5°$

1.4 Los vectores V_1 y V_2 son componentes de otro vector V. Hallar gráficamente el módulo de **V** y comprobar gráficamente el resultado.

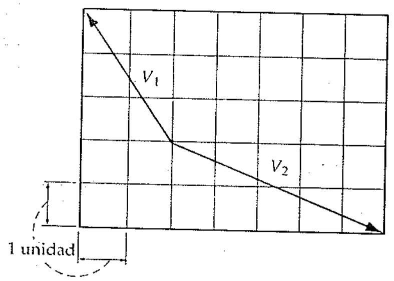


Figura problema 1.4

1.5 Hallar el peso en newtons de un hombre que pesa 90 kp. Halle el lector su propio peso en newtons.

Resp. 883 N

1.6 ¿Cuál es la masa, tanto en kilogramos como en UTM, de un bulto que pesa 40 kp?

1.7 Un cuerpo pesa 500 N a nivel del mar y a 45° de latitud. Hallar su masa en unidades SI y en UTM.

Resp. $m = 51{,}0$ kg $m = 5{,}2$ UTM

1.8 Calcular el peso W de un cuerpo en la cima del Monte Everest (altura: 8848 m sobre el nivel del mar) si su masa es de 50 kg. Como valor de g a nivel del mar, tómese 9.806 65 m/s^2.

1.9 ¿Qué error porcentual n se comete al sustituir el seno de 20° por el valor del ángulo en radianes? Repetir el mismo cálculo para la tangente de 20° y explicar geométricamente la diferencia en los dos porcentajes de error.

Resp. $n = 2.06\%$ $n = 4.09\%$

1.10 El elemento de volumen del cono circular recto de altura h y radio de la base r se forma rebanando el cono a una distancia x del vértice. Si la rebanada es de espesor finito Δx, demostrar que su volumen es $\pi r^2/h^2\,[x^2\,\Delta x + x(\Delta x)^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^3]$. (Recuérdese la fórmula del volumen del cono.) Explicar que ocurre con los términos segundo y tercero cuando Δx se convierte en dx.

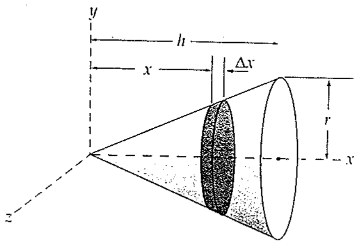
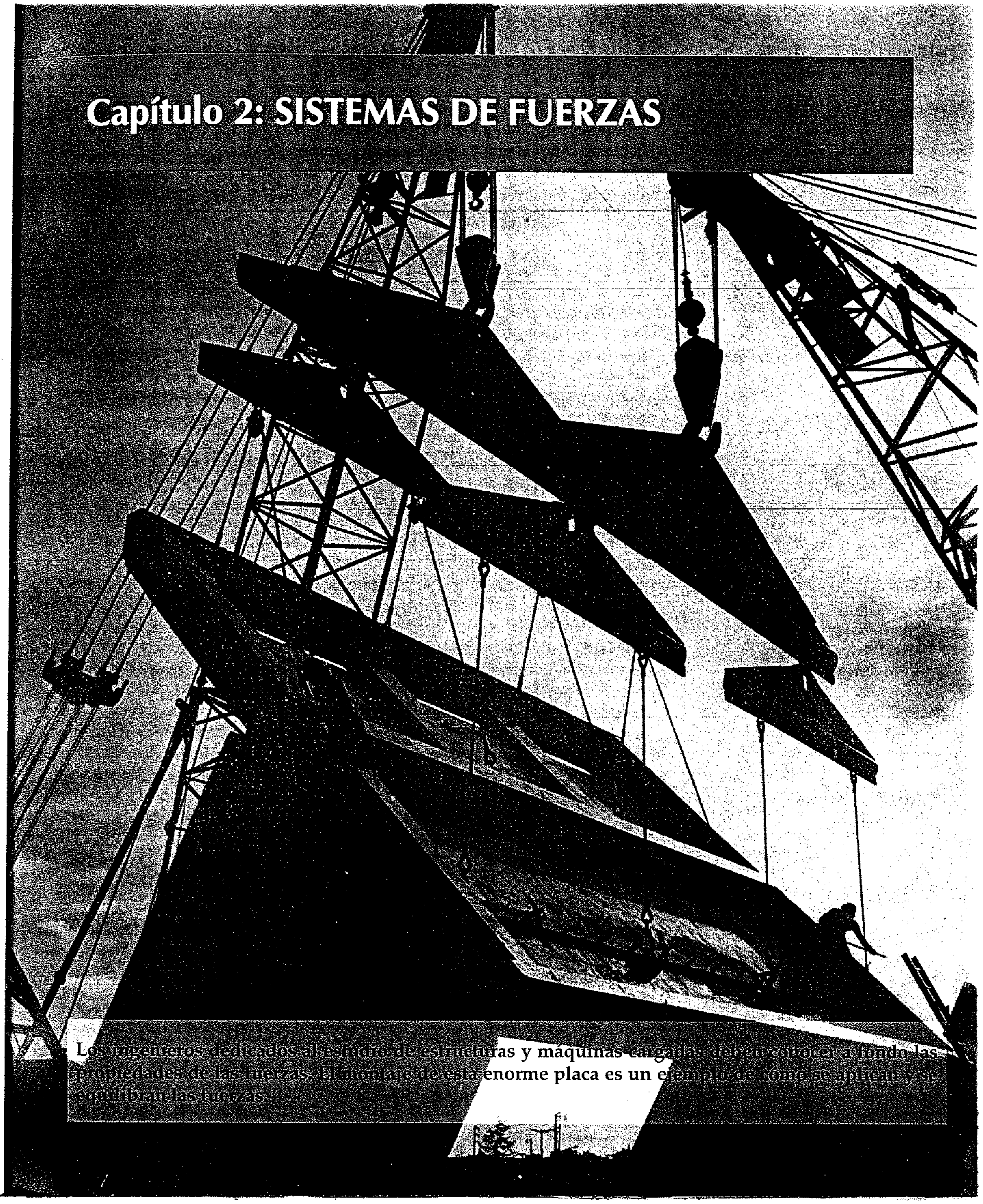


Figura problema 1.10

Capítulo 2: SISTEMAS DE FUERZAS



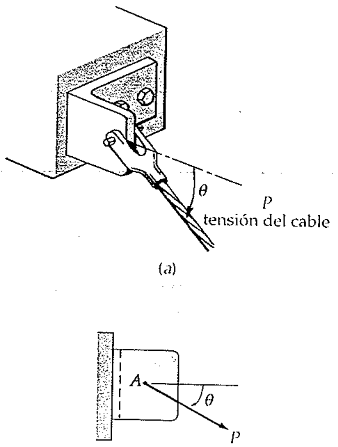
Los ingenieros dedicados al estudio de estructuras y máquinas cargadas deben conocer a fondo las propiedades de las fuerzas. El montaje de esta enorme placa es un ejemplo de cómo se aplican y se equilibran las fuerzas.

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo y en los siguientes examinaremos los efectos y propiedades de diversos tipos de fuerzas que pueden actuar sobre mecanismos y estructuras portantes. La experiencia que se adquiera mediante este examen resultará ser de utilidad fundamental en todo el estudio de la Mecánica y en el de otros temas tales como el análisis de esfuerzos, diseño de elementos de máquinas y movimiento de fluidos. En este capítulo se sientan las bases para el conocimiento no sólo de la Estática en sí, sino de toda la Mecánica, por lo que su contenido debe dominarse a fondo.

2.2 FUERZA

Antes de que tratemos con conjuntos, o *sistemas* de fuerzas es necesario que examinemos, con algún detalle, las propiedades de una fuerza considerada aisladamente. Hemos definido la fuerza como la acción que un cuerpo ejerce sobre otro. Es evidente que la fuerza es una *magnitud vectorial*, puesto que su efecto depende de la dirección y sentido de la acción tanto como de su intensidad y, además, su suma obedece a la ley del paralelogramo. La acción de la tensión del cable sobre el soporte de la figura 2.1*a* se representa en la figura 2.1*b* mediante el vector fuerza **P**, de módulo P. El efecto de esta acción sobre el soporte dependerá de la intensidad de P, del ángulo θ y de la posición del punto de aplicación *A*. Variando cualquiera de estos tres datos se alterará el efecto sobre el soporte, cosa que podría apreciarse, por ejemplo, mediante la fuerza que se ejerce sobre cada uno de los pernos que fijan el soporte a la base, o bien por la deformación o los esfuerzos internos que sufre el material del soporte en un punto cualquiera. Se ve, pues, que la especificación completa de una fuerza exige el conocimiento de su *intensidad, dirección* y *sentido*, y *punto de aplicación*, en cuyo caso hay que tratarla como vector fijo.



(*a*)

(*b*)

Figura 2.1

La acción de una fuerza sobre un cuerpo puede descomponerse en dos efectos: *exteriores* e *interiores*. Para el soporte de la figura 2.1, los efectos de **P** exteriores al soporte son las reacciones o fuerzas ejercidas (no representadas) sobre el soporte por los cimientos y los pernos a consecuencia de la acción de **P**. Las fuerzas exteriores a un cuerpo son, pues, de dos clases: fuerzas aplicadas, o *activas*, y fuerzas *reactivas*. Los efectos de **P** interiores al soporte son las deformaciones y los esfuerzos resultantes distribuidos en todo el seno del material. La relación entre las deformaciones internas y los esfuerzos internos depende de las propiedades del material y se estudia en Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad.

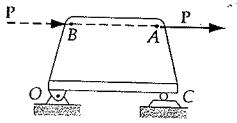


Figura 2.2

Al estudiar la mecánica de los cuerpos rígidos, en donde sólo se tienen en cuenta los efectos *exteriores* de las fuerzas, la experiencia nos muestra que no es necesario restringir a un punto dado la acción de una fuerza aplicada. Así, la fuerza **P** que actúa sobre el soporte rígido de la figura 2.2 puede considerarse aplicada en *A* o en *B* o en cualquier punto de su recta soporte, con lo cual no cambiarán los efectos exteriores netos de **P** sobre el soporte. Los efectos exteriores son las fuerzas que sobre el soporte ejercen el apoyo articulado *O* y el apoyo de rodillo *C*. De ello da cuenta el llamado *principio de transmisibilidad*, que afirma que una fuerza puede considerarse aplicada a un punto cualquiera de su recta soporte sin que se alteren sus efectos *exteriores* sobre el cuerpo en el que actúa. Cuando hay que estudiar únicamente los efectos externos producidos por una fuerza, ésta puede considerarse como *vector deslizante* y entonces es necesario y suficiente especificar su *intensidad* o *módulo*, su *dirección* y *sentido*, y su *recta soporte* o línea de acción. Como en este texto se trata básicamente la mecánica de los cuerpos rígidos, casi todas las fuerzas se considerarán como vectores deslizantes respecto al cuerpo sobre el que actúen.

Las fuerzas se clasifican en *fuerzas de contacto* y *fuerzas másicas*. Las fuerzas de contacto se generan mediante el contacto físico directo entre dos cuerpos. Las fuerzas másicas se crean por acción a distancia; tal es el caso de las fuerzas gravitatorias y magnéticas.

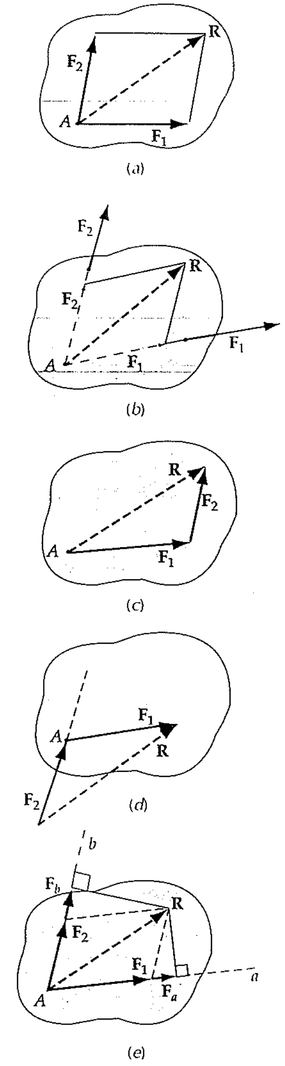
Las fuerzas pueden estar *concentradas* o *distribuidas*. En realidad, toda fuerza de contacto se halla aplicada a una superficie de área finita y, por tanto, está distribuida. Cuando las dimensiones de la superficie sean despreciables frente a las otras dimensiones del cuerpo, se podrá considerar que la fuerza está aplicada en un punto sin pérdida apreciable de precisión. Una fuerza puede estar distribuida sobre una superficie, como en el caso de los contactos mecánicos, o puede estar repartida por un volumen, que es el caso de las fuerzas másicas. El *peso* de un cuerpo es la fuerza de la gravedad distribuida por su volumen y puede tomarse como una fuerza concentrada que actúe en el centro de gravedad. La posición del centro de gravedad es muchas veces obvia por consideraciones de simetría. Si no es así, hay que determinar su posición mediante los cálculos especiales que se exponen en el capítulo 5.

Una fuerza puede medirse comparándola con otras fuerzas conocidas, recurriendo al equilibrio mecánico, o por la deformación calibrada de un resorte elástico. Todas estas comparaciones y calibraciones se basan en un patrón primario. La unidad patrón de fuerza en el Sistema Internacional es el newton (N) que se definió en el apartado 1.5.

Hay que ser muy cuidadoso al tener en cuenta la característica de las fuerzas expresada por la tercera ley de Newton. La *acción* de una fuerza está siempre acompañada de una *reacción igual* y *opuesta*. Es esencial ver claramente qué fuerza de esa pareja es la que se está considerando. La respuesta quedará siempre clara si se *aísla* el cuerpo en cuestión y se representa la fuerza ejercida *sobre* el cuerpo (no la ejercida *por* él). Es muy fácil equivocarse y considerar la fuerza de la pareja que no se debe utilizar, a menos que se establezca una distinción precisa entre toda acción y su reacción.

Dos fuerzas concurrentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ pueden sumarse según la regla del paralelogramo para obtener su resultante **R** contenida en su plano común tal como se representa en la figura 2.3*a*. Si dos fuerzas son coplanarias pero están aplicadas a dos puntos diferentes, como en la figura 2.3*b*, por el principio de transmisibilidad pueden deslizarse a lo largo de sus rectas soporte y obtener su resultante **R** en el punto de concurrencia *A*. Esta resultante **R** puede sustituir a $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ sin que cambien los efectos externos sobre el cuerpo en el que ambas actúan. Para obtener **R** puede asimismo utilizarse la regla del triángulo, pero ello exige desplazar la recta soporte de una de las fuerzas del modo que se indica en la figura 2.3*c*. En la figura 2.3*d* se han sumado las mismas fuerzas y, aun cuando se obtienen el módulo y la dirección correctos de **R**, la recta soporte de ésta se ha perdido ya que **R** ya no pasa por *A*. Por tanto, debe evitarse este tipo de construcción. Matemáticamente, la suma de dos fuerzas se expresa mediante la igualdad vectorial

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$



(*a*)

(*b*)

(*c*)

(*d*)

(*e*)

Figura 2.3

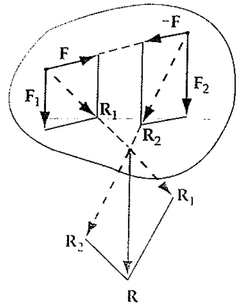


Figura 2.4

Además de la necesidad de componer fuerzas para obtener su resultante, en otros muchos casos es necesario sustituir una fuerza por sus *componentes* según direcciones conocidas. Por definición, la suma de las dos o más componentes de un vector debe ser igual a éste. Así, la fuerza **R** de la figura 2.3*a* puede remplazarse por, o *descomponerse en*, las dos componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ según las direcciones especificadas sin más que construir el paralelogramo tal como se muestra para obtener los módulos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

La relación entre una fuerza y sus componentes según unos ejes dados no debe confundirse con la relación entre una fuerza y sus proyecciones ortogonales sobre los mismos ejes. Así, en la figura 2.3*e* se representan las proyecciones $\mathbf{F}_a$ y $\mathbf{F}_b$ de la fuerza dada **F** sobre los ejes *a* y *b*, paralelos a las componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de la figura 2.3*a*. Deja claro la figura que, en general, las componentes de un vector no son iguales a las proyecciones del vector sobre los mismos ejes. Además, la suma vectorial de las proyecciones $\mathbf{F}_a$ y $\mathbf{F}_b$ no es la fuerza **R**, pues la suma debe realizarse siguiendo la regla del paralelogramo. Las componentes y las proyecciones de **R** son iguales sólo cuando *a* y *b* son perpendiculares.

En la figura 2.4 se presenta el caso particular de suma de dos fuerzas paralelas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Estas pueden componerse sumándoles primero dos fuerzas **F** y $-$**F** colineales, de la misma intensidad, convenientemente elegidas, y opuestas, las cuales tomadas juntas no ocasionarán ningún efecto exterior sobre el cuerpo. Sumando primero $\mathbf{F}_1$ y **F** para obtener $\mathbf{R}_1$ y componiendo ésta con la suma $\mathbf{R}_2$ de $\mathbf{F}_2$ y $-$**F** se obtendrá la resultante **R** de intensidad, sentido y recta soporte correctos. Este procedimiento resulta asimismo muy útil cuando hay que sumar gráficamente dos fuerzas casi paralelas y que, por ello, se cortan en un punto muy alejado.

Acostumbra a ser provechoso dominar el análisis de los sistemas de fuerzas bidimensionales antes de acometer el de los sistemas tridimensionales. Con ese objeto el resto de este capítulo se ha dividido en las dos partes mencionadas. No obstante, aquellos lectores que posean un buen dominio del análisis vectorial pueden estudiar ambas secciones simultáneamente si lo prefieren.

SECCIÓN A. SISTEMAS DE FUERZAS BIDIMENSIONALES

2.3 COMPONENTES RECTANGULARES

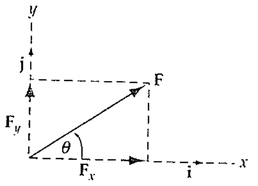


Figura 2.5

La descomposición bidimensional más corriente de una fuerza se hace mediante *componentes rectangulares*. De la regla del paralelogramo aplicada a la fuerza **F** de la figura 2.5 resulta que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y \qquad (2.1)$$

donde $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son *componentes vectoriales* de **F**. Cada una de estas componentes vectoriales puede a su vez escribirse como producto de un escalar por el vector unitario adecuado. Así, en función de los vectores **i** y **j** de la figura 2.5, podemos escribir

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \qquad (2.2)$$

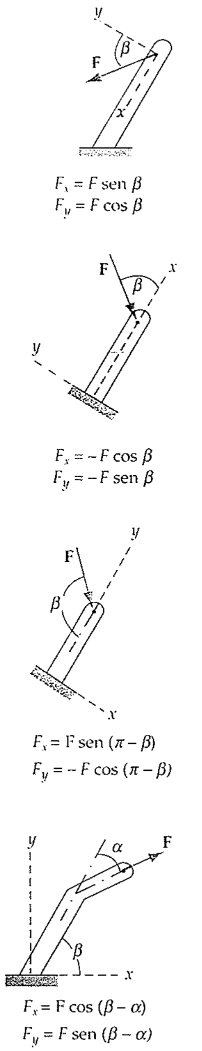
donde F_x y F_y son las *componentes escalares x* e *y* del vector **F**. Obsérvese que estas componentes escalares pueden en general ser positivas o negativas, según cual sea el cuadrante al que apunte **F**. En el caso de la figura 2.5, las dos componentes escalares *x* e *y* son positivas y se relacionan con el módulo y la dirección de **F** mediante

$$F_x = F\cos\theta \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$
$$F_y = F\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \theta = \mathrm{arctg}\,\frac{F_y}{F_x} \qquad (2.3)$$

En el apartado 1.3 se hizo la observación de que el módulo de un vector se escribe en cursiva; es decir, |**F**| se representa por *F* y esta cantidad es siempre positiva (puede ser nula). Ahora bien, cuando se manejan las *componentes* de un vector, si nos referimos a las componentes escalares, éstas se representarán también con letras cursivas, símbolos que en tal caso incluirán también la información acerca del signo. Esto se aclara más en el problema tipo 2.3.

Cuando en un diagrama aparecen tanto una fuerza como sus componentes vectoriales, es recomendable representar éstas con trazo discontinuo, como en la figura 2.5, y la fuerza con trazo lleno o viceversa. Con cualquiera de estos acuerdos se tendrá siempre presente que se representa una fuerza y sus componentes y sus tres fuerzas aparte cómo implicarían tres sectores de trazo continuo.

En la realidad, los problemas no se presentan acompañados de ejes de referencia, por lo que su asignación es una cuestión de comodidad y su elección dependerá a menudo del criterio del lector. La elección lógica suele estar indicada por la forma en que se especifica la geometría del problema. Por ejemplo, cuando las dimensiones principales de un cuerpo se encuentren en las direcciones de la horizontal y la vertical, lo más cómodo generalmente será asignar dichas direcciones a los ejes de referencia. Sin embargo, las dimensiones no siempre están alineadas con la horizontal y la vertical ni es necesario medir los ángulos en sentido antihorario a partir del eje *x* ni que el origen de coordenadas esté en la recta soporte de una fuerza; por consiguiente es fundamental que podamos determinar las componentes de una fuerza cualesquiera que sean la orientación de los ejes o el origen de la medida de ángulos. En la figura 2.6 se sugieren algunos casos de descomposición bidimensional, cuyos resultados se hacen evidentes con facilidad. Vemos de esta forma que la memorización de las fórmulas 2.3 no sustituye al conocimiento de la ley del paralelogramo ni a proyectar correctamente un vector sobre un eje de referencia. Un esquema dibujado con pulcritud ayuda siempre a clarificar la geometría y a impedir errores.



$F_x = F\,\mathrm{sen}\,\beta$
$F_y = F\cos\beta$

$F_x = -F\cos\beta$
$F_y = -F\,\mathrm{sen}\,\beta$

$F_x = F\,\mathrm{sen}\,(\pi - \beta)$
$F_y = -F\cos(\pi - \beta)$

$F_x = F\cos(\beta - \alpha)$
$F_y = F\,\mathrm{sen}\,(\beta - \alpha)$

Figura 2.6

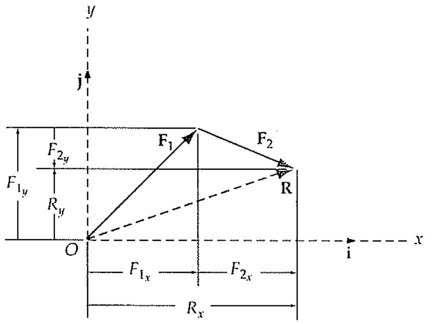


Figura 2.7

Para hallar la suma o resultante **R** de dos fuerzas coplanarias concurrentes suele resultar cómodo emplear componentes rectangulares. Sean dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ originalmente concurrentes en un punto O. En la figura 2.7 la recta soporte de $\mathbf{F}_2$ se representa trasladada al extremo de $\mathbf{F}_1$, de acuerdo con la regla del triángulo expuesta en la figura 2.3. Al sumar las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ podemos escribir

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1_x}\mathbf{i} + F_{1_y}\mathbf{j}) + (F_{2_x}\mathbf{i} + F_{2_y}\mathbf{j})$$

o sea

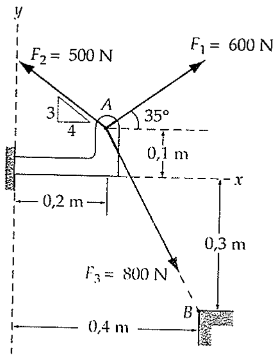
$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = (F_{1_x} + F_{2_x})\mathbf{i} + (F_{1_y} + F_{2_y})\mathbf{j}$$

de donde concluimos que

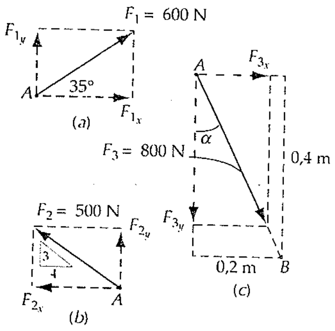
$$\begin{aligned} R_x &= F_{1_x} + F_{2_x} = \Sigma F_x \\ R_y &= F_{1_y} + F_{2_y} = \Sigma F_y \end{aligned} \tag{2.4}$$

Un término del tipo ΣF_x debe leerse y considerarse como "suma algebraica de las componentes escalares x". Para el ejemplo representado en la figura 2.7 adviértase que la componente escalar F_{2y} sería negativa.

PROBLEMA TIPO 2.1



Las fuerzas F_1, F_2 y F_3, que actúan las tres en el punto A del soporte, están especificadas cada una de un modo diferente. Hallar sus componentes x e y.



Solución. En la figura *a* se ve que las componentes escalares de $\mathbf{F}_1$ son

$$F_{1_x} = 600 \cos 35° = 491 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{1_y} = 600 \operatorname{sen} 35° = 344 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

En la figura *b* se ve que las componentes escalares de $\mathbf{F}_2$ son

$$F_{2_x} = -500(\tfrac{4}{5}) = -400 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{2_y} = 500(\tfrac{3}{5}) = 300 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Adviértase que no hace nunca falta calcular el ángulo que forma $\mathbf{F}_2$ con el eje x. El seno y el coseno de ese ángulo se deducen por inspección del triángulo 3-4-5. Por inspección se ve también que la componente escalar x de $\mathbf{F}_2$ es negativa.

Las componentes escalares de $\mathbf{F}_3$ pueden obtenerse calculando primero el ángulo α en la figura *c*.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[\frac{0{,}2}{0{,}4}\right] = 26{,}6°$$

1 Entonces $F_{3_x} = F_3 \operatorname{sen} \alpha = 800 \operatorname{sen} 26{,}6° = 358$ N *Resp.*

$$F_{3_y} = -F_3 \operatorname{sen} \alpha = -800 \cos 26{,}6° = -716 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Las componentes escalares de $\mathbf{F}_3$ se pueden obtener también expresando cómo el producto de un módulo por un vector unitario $\mathbf{n}_{AB}$ en la dirección de AB. Así

②

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 = F_3\mathbf{n}_{AB} = F_3\frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}} &= 800\left[\frac{0{,}2\mathbf{i} - 0{,}4\mathbf{j}}{\sqrt{(0{,}2)^2 + (-0{,}4)^2}}\right] \\ &= 800[0{,}447\mathbf{i} - 0{,}894\mathbf{j}] \\ &= 358\mathbf{i} - 716\mathbf{j} \text{ N} \end{aligned}$$

Las componentes escalares solicitadas serán entonces

$$F_{3_x} = 358 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

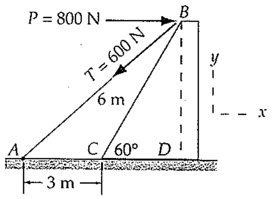
$$F_{3_y} = -716 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

que concuerdan con los resultados anteriores.

1 El lector debe examinar atentamente la geometría de cada problema de determinación de componentes y no fiar ciegamente en fórmulas tales como $F_x = F \cos \theta$ y $F_y = F \operatorname{sen} \theta$.

2 Un vector unitario puede formarse dividiendo *cualquier* vector, tal como el vector de posición $\overrightarrow{AB}$ por su longitud o módulo. Aquí se emplea la flecha encima para designar a un vector que va de A a B y la barra encima para representar la distancia entre los puntos A y B.

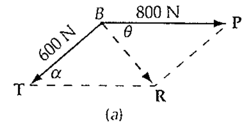
PROBLEMA TIPO 2.2



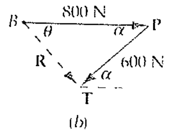
*Combinar las dos fuerzas **P** y **T**, que actúan sobre el punto B de la estructura fija, para obtener una fuerza única **R**.*

Solución gráfica. En la figura *a* se muestra la construcción del paralelogramo ① representante de la suma de las fuerzas **T** y **P**. Se emplea la escala 1 cm = 400 N; para un papel de tamaño normal, habría sido mejor la escala 1 cm = 50 N y así se obtendría una precisión mayor. Téngase en cuenta que el ángulo θ hay que determinarlo antes de construir el paralelogramo. Según la figura

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{6 \operatorname{sen} 60°}{3 + 6 \cos 60°} = 0{,}866 \qquad \alpha = 40{,}9°$$

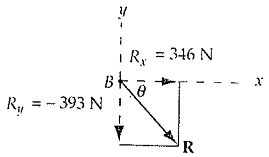


① **Obsérvese que P se recoloca para facilitar la construcción del paralelogramo en el punto *B*.**



(*b*)

[2] Obsérvese que **T** se recoloca de modo que se conserve la recta soporte de la resultante **R**.



(*c*)

Midiendo la longitud R y la dirección θ de la resultante **R**, se tienen los resultados aproximados siguientes

$$R = 525\ \text{N} \qquad \theta = 49° \qquad \textit{Resp.}$$

Solución geométrica. En la figura *b* se muestra el triángulo correspondiente a la [2] suma de **T** y **P**. El ángulo θ se calcula como antes. El teorema del coseno da

$$R^2 = (600)^2 + (800)^2 - 2(600)(800)\cos 40{,}9° = 274\,300$$
$$R = 524\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

El ángulo θ que define la orientación de **R** podemos determinarlo con el teorema de los senos; o sea

$$\frac{600}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{524}{\operatorname{sen} 40{,}9°} \qquad \operatorname{sen}\theta = 0{,}750 \qquad \theta = 48{,}6° \qquad \textit{Resp.}$$

Solución algebraica. Empleando el sistema de coordenadas *x*-*y* sobre la figura dada, podemos escribir

$$R_x = \Sigma F_x = 800 - 600\cos 40{,}9° = 346\ \text{N}$$
$$R_y = \Sigma F_y = -600\operatorname{sen} 40{,}9° = -393\ \text{N}$$

El módulo y la dirección de la resultante **R**, representada en la figura *c*, serán

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(346)^2 + (-393)^2} = 524\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

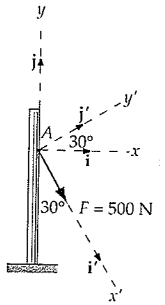
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{|R_y|}{|R_x|} = \operatorname{arctg}\frac{393}{346} = 48{,}6° \qquad \textit{Resp.}$$

En notación vectorial la resultante **R** sería

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = 346\mathbf{i} - 393\mathbf{j}\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 2.3

La fuerza **F** *de 500 N está aplicada al poste vertical tal como se indica. (1) Escribir* **F** *en función de los vectores unitarios* **i** *y* **j** *e identificar sus componentes vectoriales y escalares. (2) Hallar las componentes escalares de* **F** *en los ejes x′ e y′. (3) Hallar las componentes escalares de* **F** *en los ejes x e y′.*



Solución. **Parte (1).** En la figura *a*, puede verse que

$$\mathbf{F} = (F\cos\theta)\mathbf{i} - (F\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$$
$$= (500\cos 60°)\mathbf{i} - (500\operatorname{sen} 60°)\mathbf{j} \qquad \textit{Resp.}$$
$$= (250\mathbf{i} - 433\mathbf{j})\text{N}$$

Las componentes escalares son $F_x = 250$ N y $F_y = -433$ N. Las componentes vectoriales son $\mathbf{F}_x = 250\mathbf{i}$ N y $\mathbf{F}_y = -433\mathbf{j}$ N.

Parte (2). En la figura *b*, se ve que **F** = 500**i′** N, por lo que las componentes escalares pedidas son

$$F_{x'} = 500\ \text{N} \qquad F_{y'} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

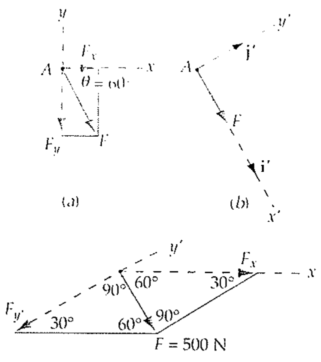
Parte (3). Las componentes de **F** en las direcciones *x* e *y′* no son rectangulares y se obtienen construyendo el paralelogramo que se muestra en la figura *c*. Los valores de estas componentes pueden calcularse mediante el teorema de los senos, o sea [1]

$$\frac{|F_x|}{\operatorname{sen} 90°} = \frac{500}{\operatorname{sen} 30°} \qquad |F_x| = 1000\ \text{N}$$

$$\frac{|F_{y'}|}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{500}{\operatorname{sen} 30°} \qquad |F_{y'}| = 866\ \text{N}$$

Las componentes escalares pedidas serán

$$F_x = 1000\ \text{N} \qquad F_{y'} = -866\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$



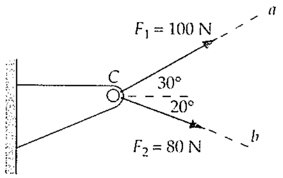
(*a*) (*b*)

(*c*)

[1] Obtener gráficamente F_x y $F_{y'}$ y comparar estos resultados con los valores calculados.

PROBLEMA TIPO 2.4

Sobre el soporte actúan, tal como se indica, las fuerzas F_1 *y* F_2*. Hallar la proyección* F_b *de su resultante R sobre el eje b.*



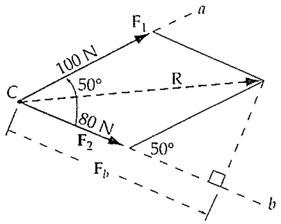
Solución. En la figura se representa la suma de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ según la regla del paralelogramo. Aplicando el teorema del coseno resulta

$$R^2 = (80)^2 + (100)^2 - 2(80)(100)\cos 130° \qquad R = 163{,}4\ \text{N}$$

En la figura se muestra asimismo la proyección ortogonal $\mathbf{F}_b$ de **R** sobre el eje *b*. Su longitud es

$$F_b = 80 + 100\cos 50° = 144{,}3\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

Téngase presente que, en general, las componentes de un vector no son iguales a sus proyecciones sobre los mismos ejes. Si el eje *a* fuera perpendicular al *b* las componentes y las proyecciones de *R* serían iguales.



PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.1 El módulo de la fuerza **F** es de 300 N. Expresarla en función de los vectores unitarios **i** y **j** y determinar sus componentes escalares.

Resp. F_x = 260 N F_y = – 150 N
F = 260**i** –150**j** N

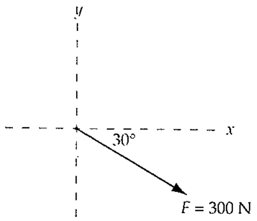


Figura problema 2.1

2.2 El módulo de la fuerza **F** es de 500 N. Expresarla en función de los vectores unitarios **i** y **j**. Identificar sus componentes escalares y vectoriales.

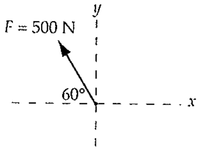


Figura problema 2.2

2.3 En la figura se indica la pendiente de la fuerza **F** de 800 N. Expresarla en función de los vectores unitarios **i** y **j**.

Resp. **F** = – 640**i** – 480**j** N

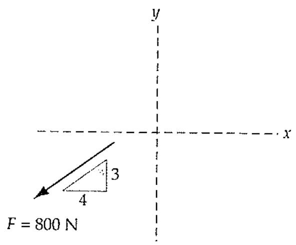


Figura problema 2.3

2.4 La recta soporte de la fuerza **F** de 1600 N pasa por los puntos *A* y *B* tal como se muestra en la figura. Hallar las componentes escalares *x* e *y* de **F**.

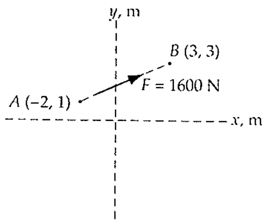


Figura problema 2.4

2.5 Hallar la resultante **R** de las dos fuerzas representadas (a) sumándolas por la regla del paralelogramo y (b) sumando sus componentes escalares.

Resp. **R** = – 3**i** + 8,66**j** kN

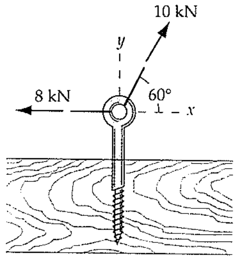


Figura problema 2.5

2.6 Resolver gráficamente el problema 2.5.

2.7 Las dos fuerzas representadas actúan en el punto *A* de la barra acodada. Hallar su resultante **R**.

Resp. **R** = 2,35**i** – 3,45**j** kN

2.8 Hallar las componentes de la fuerza de 2 kN según los ejes oblicuos *a* y *b*. Hallar las proyecciones de **F** sobre esos mismos ejes.

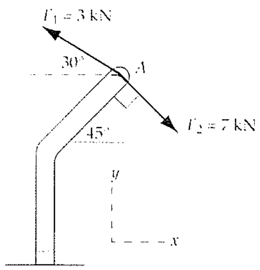


Figura problema 2.7

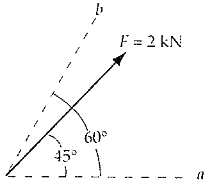


Figura problema 2.8

Problemas representativos

2.9 Si las dos tensiones iguales *T* en el cable de la polea producen juntas una fuerza de 5 kN en el cojinete de la polea, hallar *T*.

Resp. *T* = 2.89 kN

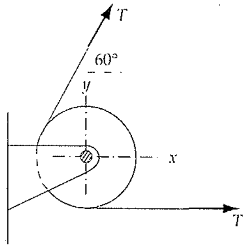


Figura problema 2.9

2.10 Si las tensiones iguales *T* en el cable de la polea del problema 2.9 valen 400 N, expresar vectorialmente la fuerza **R** que sobre la polea ejercen ambas tensiones. Hallar **R**.

2.11 Al empujar uniformemente una máquina rampa arriba, una persona ejerce una fuerza **P** de 180 N. Hallar las componentes de ésta paralela y perpendicular a la rampa.

Resp. P_t = 163,1 N P_t = – 76,1 N

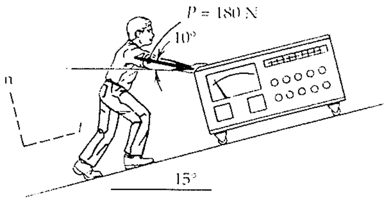


Figura problema 2.11

2.12 Expresar la fuerza **P**, de módulo 10 N, en función de los vectores **i** y **j**. Hallar las componentes escalares P_t y P_n respectivamente paralela y normal a la recta *OA*.

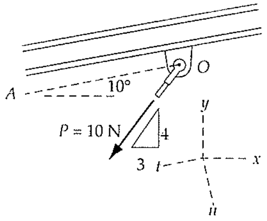


Figura problema 2.12

2.13 Se sabe que la componente *y* de la fuerza **F** que una persona ejerce en el mango de una llave de vaso vale 320 N. Hallar la componente *x* y el módulo de **F**.

Resp. F_x = 133,3 N *F* = 347 N

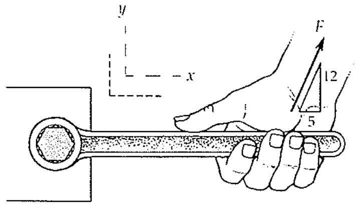


Figura problema 2.13

2.14 La componente x de una fuerza **P** aplicada en el punto A del soporte vale 160 N. Si la recta soporte de P pasa por B, hallar su intensidad y su componente y.

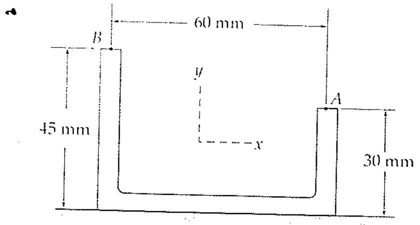


Figura problema 2.14

2.15 Sustituir la fuerza de 600 N que actúa sobre el soporte por dos fuerzas, una de 300 N en la dirección del semieje y negativo y otra fuerza **P**, que conjuntamente equivalgan a la acción de la primera. Hallar el módulo de **P** y el ángulo θ_y que forma con el eje y.

Resp. $P = 794$ N $\theta_y = 40{,}9°$

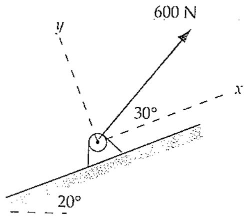


Figura problema 2.15

2.16 Hallar las componentes escalares R_a y R_b de la fuerza **R** según los ejes no rectangulares a y b. Hallar también la proyección ortogonal P_a de **R** sobre el eje a.

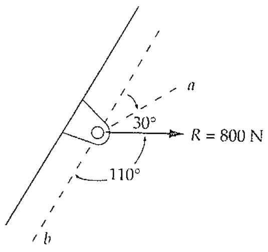


Figura problema 2.16

2.17 Se desea sustituir la fuerza de 600 N que actúa en el punto A del soporte por dos fuerzas, una F_a en la dirección a-a y otra F_b en la dirección b-b, que juntas produzcan sobre el soporte el mismo efecto que la primera. Hallar F_a y F_b.

Resp. $F_a = 693$ N $F_b = 346$ N.

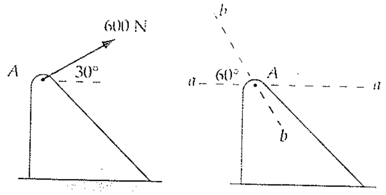


Figura problema 2.17

2.18 Se desea sustituir la fuerza de 20 kN por dos fuerzas: $\mathbf{F}_1$, paralela al eje a-a, y $\mathbf{F}_2$, de intensidad 18 kN. Hallar la intensidad de $\mathbf{F}_1$ y el ángulo α que forma $\mathbf{F}_2$ con la horizontal. Adviértase que hay dos soluciones posibles.

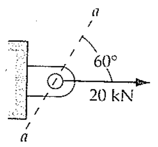


Figura problema 2.18

2.19 Hallar la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas al soporte. Escribir **R** en función de los vectores unitarios de los ejes x e y representados.

Resp. $\mathbf{R} = 88.8\mathbf{i} + 245\mathbf{j}$ N

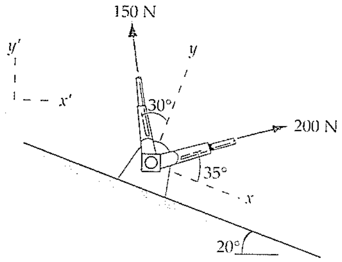


Figura problema 2.19

2.20 En el plano aerodinámico simple de la figura el cociente entre la fuerza de sustentación L y la resistencia aerodinámica D es $L/D = 10$. Si la fuerza de sustentación sobre un corto tramo de ese plano aerodinámico es de 200 N, hallar el módulo de la fuerza resultante **R** y el ángulo θ que la misma forma con la horizontal.

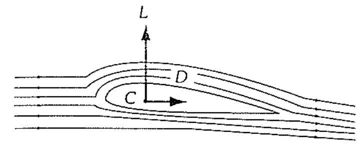


Figura problema 2.20

2.21 Se desea extraer el cáncamo del madero aplicando una fuerza a lo largo de su eje horizontal. El obstáculo A impide el acceso directo, por lo que mediante cables se aplican dos fuerzas, una de 1,6 kN y la otra **P**, tal como se indica. Calcular el módulo de la fuerza **P** necesaria para asegurar una tracción T a lo largo del eje del cáncamo. Asimismo, hallar T.

Resp. $P = 2{,}15$ kN $T = 3{,}20$ N

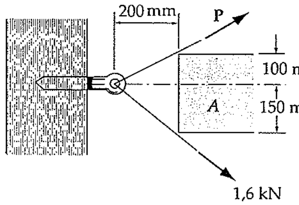


Figura problema 2.21

2.22 El extremo de la torre fija está sometido a una fuerza horizontal de 50 kN y a la tensión T producida por el cable, pesado y flexible, tensado por el torno mecánico B. Si el efecto neto de ambas fuerzas sobre la torre es una compresión hacia abajo de 30 kN aplicada en A, hallar T y el ángulo θ que forma el cable con la horizontal en el punto A

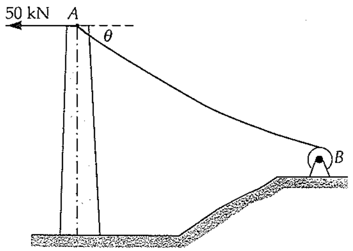


Figura problema 2.22

2.23 Al lanzar al aire la esfera, la persona ejerce sobre la misma una fuerza de 140 N durante el instante representado en la figura. Hallar las componentes, paralela y perpendicular al antebrazo, de la fuerza que la esfera ejerce *sobre* la mano. (*Advertencia*: Asegúrese de que respeta la tercera ley de Newton.)

Resp. $F_t = -107{,}2$ N $F_n = -90{,}0$ N

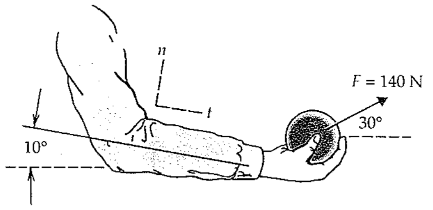


Figura problema 2.23

2.24 Al introducir, con ajuste apretado, la pequeña pieza cilíndrica en el orificio circular, el brazo del robot ejerce una fuerza P de 90 N paralela, tal como se indica, al eje del orificio. Hallar las componentes de la fuerza que la pieza ejerce *sobre* el robot (a) según la paralela y la perpendicular al brazo AB y (b) según la paralela y la perpendicular al brazo BC.

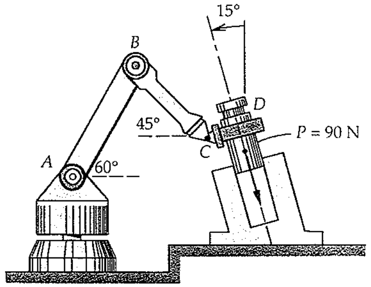


Figura problema 2.24

2.25 Sustituir las dos fuerzas que actúan sobre el bastidor en A por una fuerza única **R**. Expresar ésta en función de **i** y **j** y hallar su intensidad y el ángulo θ que forma con el eje x. Si **R** que aplicarse en un punto D del miembro AB, hallar gráficamente la distancia s de A a D.

Resp. $\mathbf{R} = 5{,}20\mathbf{i} + \mathbf{j}$ kN
$R = 5{,}29$ kN,
$\theta = 10{,}89°$, $s = 2{,}89$ m

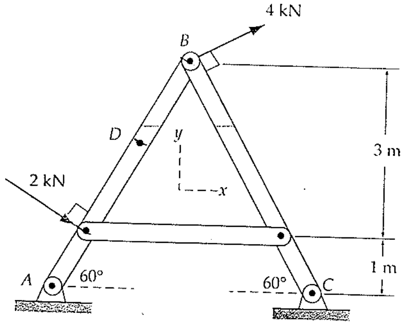


Figura problema 2.25

2.26 ¿Bajo qué ángulo θ hay que aplicar la fuerza de 400 N para que el módulo de la resultante **R** de las dos fuerzas sea de 1000 N? ¿Cuál sería, en este caso, el ángulo β que formaría **R** con la horizontal?

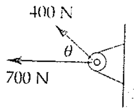


Figura problema 2.26

2.4 MOMENTO

Una fuerza tiene, además de la tendencia a mover en su dirección y sentido al cuerpo al que se aplica, otra tendencia a hacerlo girar alrededor de todo eje que no corte a la recta soporte de la fuerza ni sea paralelo a ella. A esta tendencia se le llama *momento* **M** de la fuerza respecto al eje dado.

Como ejemplo conocido y sencillo del concepto de momento, consideremos la llave para tubos de la figura 2.8*a*. Es evidente que un efecto de la fuerza aplicada perpendicularmente al mango de la herramienta es que tiende a rotar el tubo en torno a su eje vertical. La intensidad de esa tendencia depende tanto del módulo F de la fuerza como de la longitud efectiva d del mango de la llave. La experiencia revela que un tirón que no sea perpendicular al mango de la llave será menos eficaz que el ejercido perpendicularmente que se representa en la figura.

En la figura 2.8*b* se representa un cuerpo plano sometido a la acción de una fuerza **F** en su plano. La intensidad del momento, o tendencia de la fuerza a rotar el cuerpo en torno al eje *O-O* normal al plano del cuerpo, es evidentemente proporcional a la intensidad de la fuerza y al *brazo de momento d*, que es la distancia perpendicular del eje a la recta soporte de la fuerza. Así pues, el módulo del momento será

$$M = Fd \tag{2.5}$$

El momento es un vector **M** perpendicular al plano del cuerpo. Su sentido depende del sentido en el cual **F** tienda a hacer girar el cuerpo. Para identificar ese sentido puede emplearse la regla de la mano derecha (fig. 2.8*c*) y el momento de **F** respecto a *O-O* podrá representarse por un vector dirigido en el sentido indicado por el pulgar cuando se curvan los demás dedos en el sentido de la tendencia a la rotación. El momento **M** cumple todas las reglas de composición de vectores y puede considerarse como un vector deslizante cuya recta soporte coincida con el eje de momentos. La unidad SI de momentos será N · m, escribiendo las unidades m y N en este orden para distinguir el momento de la energía cuya unidad SI es el N · m, o joule (J).

Al tratar con fuerzas coplanarias, se suele hablar de momentos respecto a un punto. En realidad queda implícito el momento respecto a un eje normal al plano y que pasa por ese punto. Así, en la figura 2.8*b* el momento de la fuerza **F** respecto al punto A es $M = Fd$ y de sentido antihorario. Del sentido de los momentos puede darse cuenta merced a un adecuado convenio de signos, como asignar el signo más (+) a los momentos de sentido opuesto al de giro de las manecillas del reloj (momentos antihorarios, AH) y el signo menos (–) a los del mismo sentido que el de giro de las manecillas del reloj (momentos horarios, H), o al contrario. Ahora bien, dentro de cada problema es esencial mantener la coherencia en la asignación de signos a los momentos. En el convenio aplicado en la figura 2.8*d*, el momento de **F** respecto a A (o respecto al eje z que pasa por A) es positivo. En los cálculos bidimensionales, una manera práctica de representar los momentos es hacer uso de flechas curvas como la que aparece en la misma figura.

En algunos problemas bidimensionales y en numerosos de los tridimensionales que seguirán, es muy cómodo emplear procedimientos vectoriales para calcular momentos. En la figura 2.8*b*, el momento de **F** respecto al punto A puede expresarse también mediante el producto vectorial

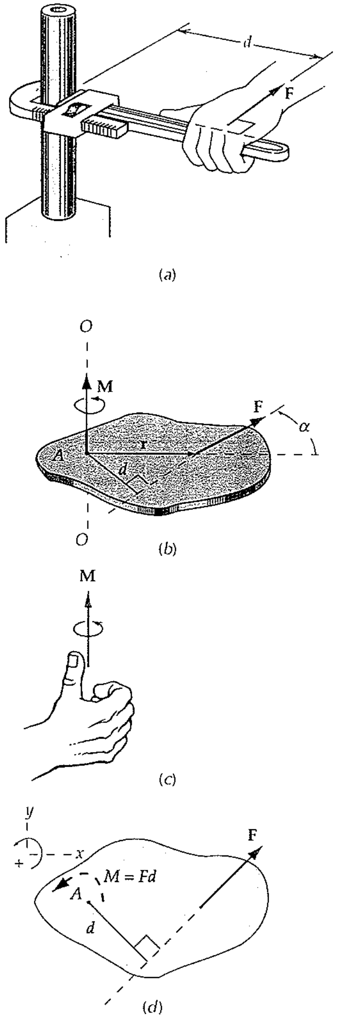
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2.6}$$

donde **r** es un vector de posición que va desde el polo o centro de momentos A hasta un punto *cualquiera* de la recta soporte de **F**. El módulo de esta expresión es [1]

$$M = Fr \operatorname{sen} \alpha = Fd \tag{2.7}$$

que concuerda con el valor dado por 2.5. Obsérvese que el brazo del momento $d = r \operatorname{sen} \alpha$ no depende del punto concreto de la recta soporte de **F** hacia el que se dirige el vector **r**. La dirección y el sentido de **M** quedan correctamente establecidos aplicando la regla de la mano derecha a la secuencia **r** × **F**. Si los dedos de la mano derecha se curvan señalando el sentido de la rotación desde el sentido positivo de **r** hacia el sentido positivo de **F**, el pulgar señalará el sentido positivo de **M**. Pongamos mucho cuidado en mantener la secuencia **r** × **F**, pues la secuencia **F** × **r** produce un vector de sentido *opuesto* al del momento verdadero. Como en el caso del procedimiento escalar, el momento **M** puede considerarse como el momento respecto a A, o bien como el momento respecto a la recta *O-O* que pasa por el punto A y es perpendicular al plano definido por los vectores **r** y **F**.

Al calcular el momento de una fuerza respecto a un punto dado, la opción entre emplear el producto vectorial o la expresión escalar depende en gran parte del modo en que se especifica la geometría del problema. Si la distancia perpendicular entre la recta soporte de la fuerza y el polo se conoce o puede determinarse fácilmente, el método escalar será por lo general más sencillo. Pero si **F** y **r** no son perpendiculares y pueden expresarse fácilmente en forma vectorial, suele ser preferible emplear el producto vectorial.

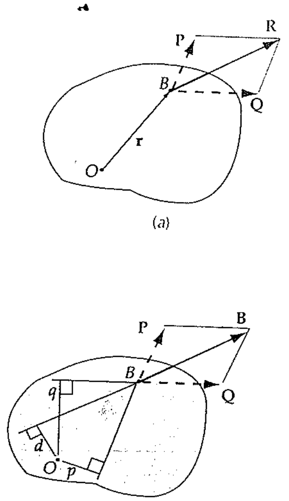


(*a*)
(*b*)
(*c*)
(*d*)

Figura 2.8

---

[1] Para más información sobre producto escalar veáse el apartado C.7 del apéndice C.



(a)

(b)

Figura 2.9

En la sección B de este capítulo veremos cómo se aplica también la expresión vectorial del momento de una fuerza a la determinación del momento de una fuerza respecto a un punto en los casos tridimensionales.

Teorema de Varignon. Uno de los principios más útiles de la Mecánica es el *teorema de Varignon*, que establece que el momento de una fuerza respecto a un punto cualquiera es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto a dicho punto.

Para demostrar este teorema, consideremos la fuerza **R** actuante en el plano del cuerpo de la figura 2.9*a*. Sean **P** y **Q** dos fuerzas que representan sendas componentes no rectangulares cualesquiera de **R**. El momento de ésta respecto a O es

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

Como $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$, podemos escribir

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$

Finalmente, aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial, tenemos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{Q} \tag{2.8}$$

lo que muestra que el momento de **R** respecto a O es igual a la suma de los momentos respecto a O de sus componentes **P** y **Q**, tal como afirma el teorema. El teorema de Varignon no es necesario limitarlo al caso de dos componentes, sino que es perfectamente aplicable a tres o más. Para la demostración anterior podría haberse empleado un número cualquiera de componentes de **R**.[1]

Para destacar el significado físico de este principio, la equivalente escalar de la expresión vectorial 2.8 podemos escribirla como sigue para la configuración de la figura 2.9*a*

$$M_O = Rd = pP + qQ$$

donde se toma como positivo el sentido horario.

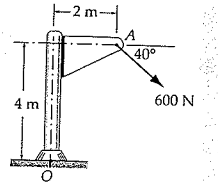
En el problema tipo 2.5 se ilustra cómo emplear el teorema de Varignon para simplificar la determinación de momentos.

---

[1] En su enunciado original el teorema de Varignon se limitaba al caso de dos componentes concurrentes de una fuerza dada.

PROBLEMA TIPO 2.5

Calcular el momento de la fuerza de 600 N respecto al punto O de la base, siguiendo cinco procedimientos diferentes.



Solución. ***(I)*** El brazo de momento de la fuerza de 600 N es

$$d = 4 \cos 40° + 2 \text{ sen } 40° = 4{,}35 \text{ m}$$

① Según $M = Fd$ el momento es de sentido horario y su módulo vale

$$M_O = 600(4{,}35) = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

(II) Sustituir la fuerza por sus componentes rectangulares en A

$$F_1 = 600 \cos 40° = 460 \text{ N}, \qquad F_2 = 600 \text{ sen } 40° = 386 \text{ N}$$

Por el teorema de Varignon, el momento será

② $$M_O = 460(4) + 386(2) = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

(III) Utilizando el principio de transmisibilidad, se desplaza la fuerza a lo largo de su recta soporte hasta el punto B, con lo cual desaparece el momento de la componente F_2. El brazo de momento de F_1 se hace

$$d_1 = 4 + 2 \tan 40° = 5{,}68 \text{ m}$$

y el momento es

$$M_O = 460(5{,}68) = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

③ ***(IV)*** Trasladando la fuerza al punto C se elimina el momento de la componente F_1. El brazo de momento de F_2 se hace

$$d_2 = 2 + \cot 40° = 6{,}77 \text{ m}$$

y el momento es

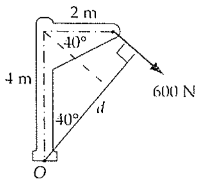
$$M_O = 386(6{,}77) = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

(V) Utilizando la expresión vectorial del momento, para el sistema de coordenadas indicado en la figura y aplicando las reglas del producto vectorial, tenemos

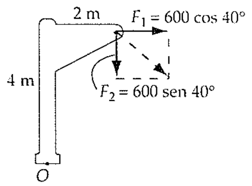
④ $$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \times 600(\mathbf{i} \cos 40° - \mathbf{j} \text{ sen } 40°) \\ &= -2610\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

El signo menos indica que el vector tiene el sentido del semieje z negativo. Su módulo es

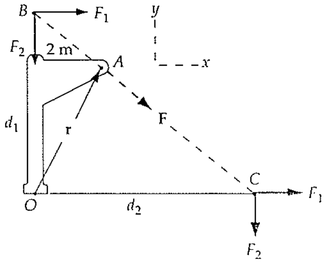
$$M_O = 2620 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



① **En este y en problemas similares, la geometría necesaria no debe causar dificultades si el esquema se dibuja con cuidado.**



② **Este procedimiento suele ser el camino más corto.**



③ **No debe preocupar que los puntos *B* y *C* no estén en el cuerpo mismo, ya que el cálculo matemático del momento de una fuerza no exige que ésta se encuentre en el cuerpo.**

④ **El vector de posición r podría también elegirse como $\mathbf{r} = d_1\mathbf{j} = 5{,}68\mathbf{j}$ m o $\mathbf{r} = d_2\mathbf{i} = 6{,}77\mathbf{i}$ m.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.27 La fuerza **F** de 12 kN está aplicada en el punto *A*. Calcular su momento respecto al punto *O*, expresándolo en forma tanto escalar como vectorial. Determinar la coordenada *x* del punto *B* (en el eje *x*) respecto al cual es nulo el momento de **F**.

Resp. M_o = 27.7 kN · m (H) $\mathbf{M}_o = -27.7\mathbf{k}$ kN · m

x_B = − 6 m

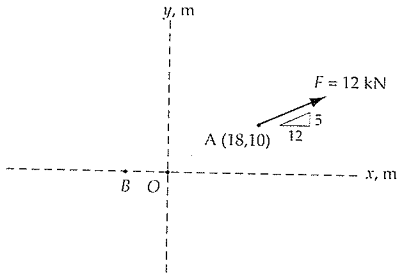


Figura problema 2.27

2.28 Al engranaje se aplica una fuerza **F** de módulo 40 N. Hallar el momento de **F** respecto al punto *O*.

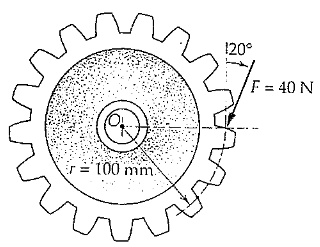


Figura problema 2.28

2.29 Calcular el momento de la fuerza de 250 N aplicada al mango de la llave ajustable respecto al centro del perno.

Resp. M_o = 46,4 N · m (H)

2.30 Hallar el momento respecto al punto *A* debido a la tracción de 120 kN en el cable de izado de la grúa tractora.

2.31 Calcular el momento de la fuerza de 1,6 N respecto al eje *O* del conmutador de pared.

Resp. M_o = 29,4 N · mm (AH)

2.32 La fuerza **P** de 30 N está aplicada perpendicularmente a la parte *BC* de la barra acodada. Hallar su momento **P** respecto a los puntos *B* y *A*.

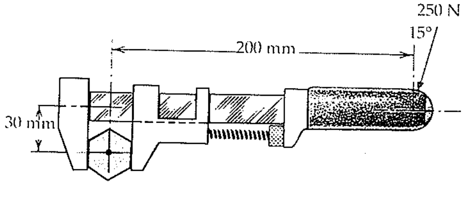


Figura problema 2.29

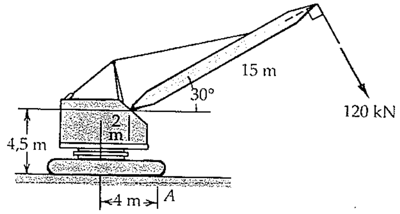


Figura problema 2.30

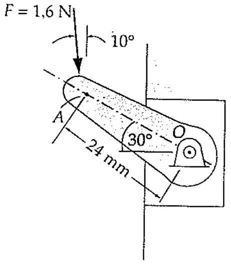


Figura problema 2.31

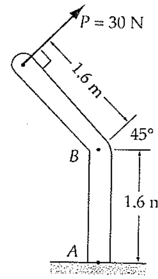


Figura problema 2.32

Problemas representativos

2.33 Para levantar el mástil de bandera *OC*, al mismo se sujeta un bastidor sin peso *OAB* y al cable de izado se comunica una tensión de 3,2 kN mediante el torno mecánico *D*. Calcular el momento M_o de esa tensión respecto a la articulación *O*.

Resp. M_o = 6,17 kN · m (AH)

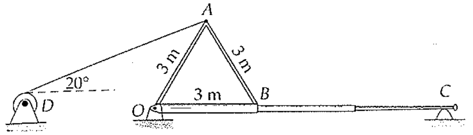


Figura problema 2.33

2.34 Se aplica una fuerza de 200 N al extremo de una llave para apretar el tornillo que fija la rueda al eje. Determinar el momento *M* de esa fuerza respecto al centro *O* de la rueda para la posición representada de la llave.

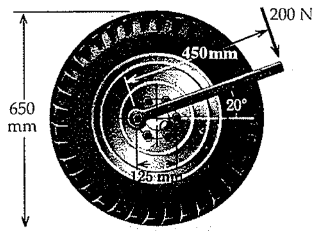


Figura problema 2.34

2.35 Para efectuar una maniobra de traslación y rotación, la tripulación de una nave espacial dispara un cohete propulsor que desarrolla una fuerza de 200 N tal como se indica. Determinar el momento de esa fuerza respecto al centro de masa *G* de la estación.

Resp. M_G = 3890 N · m (H)

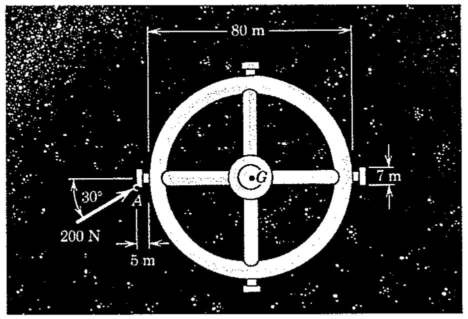


Figura problema 2.35

2.36 Del extremo de la cuerda sujeta y arrollada en torno al cubo interno del tambor se tira con una fuerza *T* de 60 N. Hallar el momento de ésta respecto al centro C del tambor. ¿Bajo qué ángulo *θ* hay que aplicar *T* para que sea nulo su momento respecto al punto de contacto *P*?

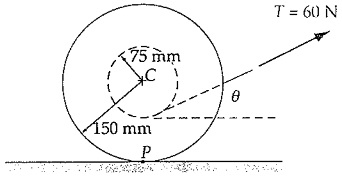


Figura problema 2.36

2.37 Calcular el momento M_A respecto al punto *A* de la fuerza de 200 N empleando tres métodos escalares y uno vectorial.

Resp. M_A = 74,8 N · m (AH)

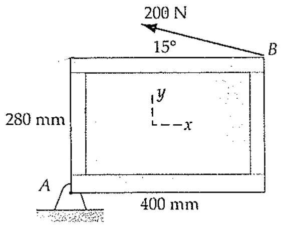


Figura problema 2.37

2.38 A causa de su resistencia a las flexiones excesivas causadas por el momento respecto a *A* de una fuerza *F*, la región

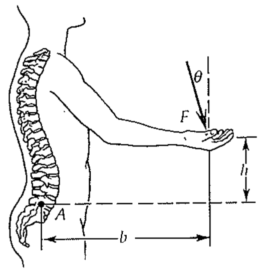


Figura problema 2.38

U. T. F. S. M.
BIBLIOTECA CENTRAL

… espina dorsal es la más susceptible a los abusos. Para valores dados de F, b y h, determinar qué ángulo θ produce el mayor esfuerzo flexor.

2.39 Si el momento combinado respecto al punto A de la fuerza de 50 kN y de la fuerza **P** es cero, determinar tanto gráfica como analíticamente el módulo de **P**. La placa sobre la que actúan ambas fuerzas está dividida en cuadrados.

Resp. $P = 63.7$ N

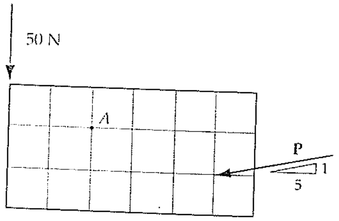


Figura problema 2.39

2.40 Para la posición angular $\theta = 60°$ de la manivela OA, la presión del gas sobre el pistón induce una fuerza compresiva P a lo largo del eje AB de la biela. Si esta fuerza produce un momento de 720 N respecto al eje O de la manivela, calcular P.

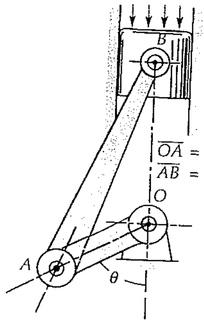
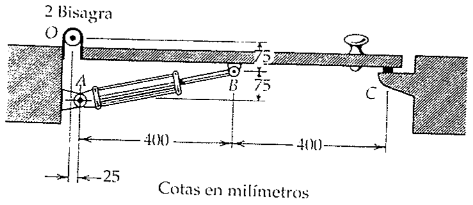


Figura problema 2.40

2.41 La fuerza que el émbolo del cilindro AB ejerce sobre la puerta es de 40 N a lo largo de la recta AB y tiende a mantener cerrada la puerta. Calcular el momento de esa fuerza respecto a la bisagra O. ¿Qué fuerza F_C normal al plano de la puerta debe ejercer sobre la puerta el tope C de la misma para que el momento combinado de ambas fuerzas respecto a O sea nulo?

Resp. $M_o = 7{,}03$ N · m (H)
$F_C = 8{,}53$ N



Cotas en milímetros

Figura problema 2.41

2.42 Al introducir una pieza cilíndrica en el orificio cilíndrico, el robot ejerce sobre aquella la fuerza de 90 N que se indica. Determinar los momentos respecto a los puntos A, B y C de la fuerza que la pieza ejerce sobre el robot.

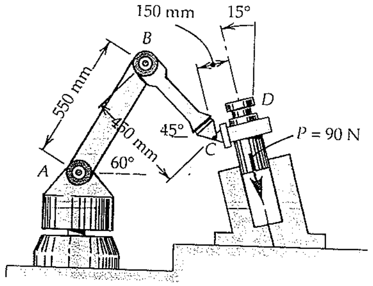


Figura problema 2.42

2.43 El casquillo del tope de un palo de buque soporta las dos fuerzas que se representan. Determinar cuál será el módulo de **T** que no produzca flexión (momento nulo) en el punto O.

Resp. $T = 4{,}04$ kN

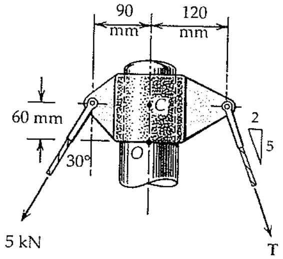


Figura problema 2.43

2.44 Determinar el ángulo θ que hace máximo el momento M_o de la fuerza de 200 N respecto al centro del eje O. Calcular también M_o.

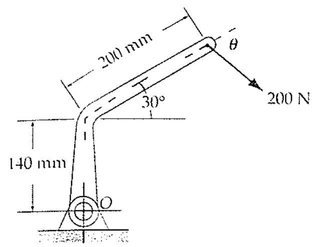
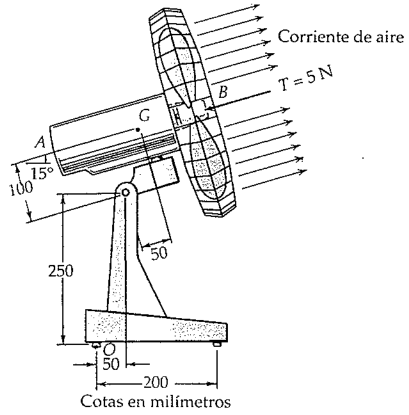


Figura problema 2.44

2.45 Las paletas del ventilador portátil generan el empuje **T** de 5 N indicado. Calcular el momento M_o de esa fuerza respecto al punto de apoyo trasero O. A efectos comparativos, calcular el momento respecto a O debido al peso W del motor AB, cuyos 45 N actúan en G.

Resp. $M_o = 1.643$ N · m (AH) $M_{o_w} = 3{,}26$ N · m (H)



Cotas en milímetros

Figura problema 2.45

2.46 El balancín BD de un motor de automóvil se apoya en C en un árbol no rotatorio. Si la fuerza que ejerce el empujador AB sobre el balancín vale 360 N, determinar qué fuerza debe ejercer en D el vástago DE de la válvula para que sea nulo el momento combinado respecto a C. Calcular la resultante de esas dos fuerzas actuantes sobre el balancín. Obsérvese que los puntos B, C y D están en la misma horizontal y que tanto el empujador como el vástago de la válvula ejercen sus fuerzas a lo largo de sus ejes geométricos.

2.47 Si la resultante **R** de las dos fuerzas ejerce un momento horario de 475 N · m respecto al punto A, calcular los dos valores de θ y los correspondientes módulos de **R** que cumplen esa condición. Comprobar los resultados con dos diagramas dibujados esmeradamente.

Resp. $\theta = 61{,}0°$ $R = 465$ N $\theta = 119{,}0°$ $R = 777$ N

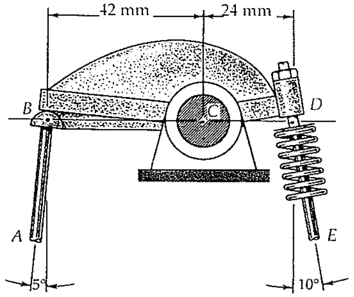


Figura problema 2.46

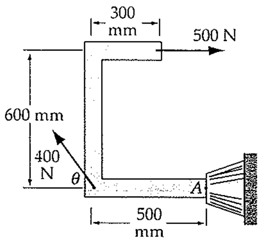


Figura problema 2.47

2.48 Si el momento combinado de ambas fuerzas respecto a O es nulo, determinar

(a) el módulo de la fuerza **P**

(b) el módulo R de la resultante de las dos fuerzas

(c) las coordenadas x e y del punto A del perímetro de la rueda respecto al cual es máximo el momento combinado de las dos fuerzas

(d) el momento combinado M_A de las dos fuerzas respecto a A.

Resp. *(a)* $P = 61{,}6$ N *(b)* $R = 141{,}3$ N,
(c) $x = 49{,}0$ mm $y = 63{,}2$ mm,
(d) $M_A = 15{,}8$ N · m (H)

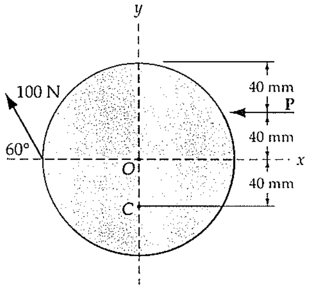


Figura problema 2.48

El momento producido por dos fuerzas de igual módulo y paralelas, pero de sentidos opuestos, se denomina *par*. Los pares presentan ciertas propiedades únicas y tienen importantes aplicaciones en Mecánica.

Consideremos la acción de dos de tales fuerzas **F** y −**F** separadas una distancia *d* (fig. 2.10a). Estas dos fuerzas no pueden componerse en una sola porque su suma en cualquier dirección es nula. Su efecto es exclusivamente producir una tendencia a la rotación. El momento combinado de las dos respecto a un eje normal a su plano y que pase por un punto cualquiera como el *O* es el momento **M** del par y su módulo es

$$M = F(a + d) - Fa$$

o sea

$$M = Fd$$

siendo su sentido antihorario visto desde arriba en el caso que se ilustra. Esta expresión da el momento del par y es completamente independiente de la distancia *a* que sitúa a las fuerzas con relación al polo *O*. Se deduce que el momento de un par es el mismo para *todos* los polos.

Además, el álgebra vectorial permite representar el momento de un par. Con la notación del producto vectorial de la igualdad 2.6, el momento combinado respecto a *O* de las fuerzas que forman el par de la figura 2.10*b* será

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

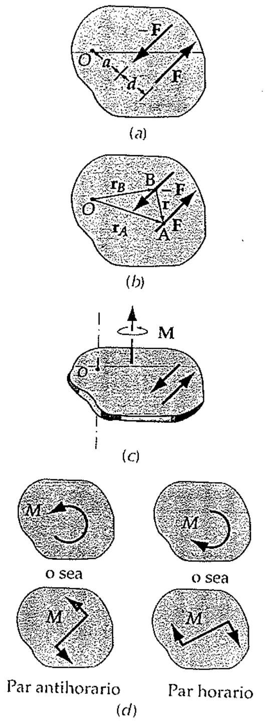
donde $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ son vectores de posición que van desde *O* a los puntos arbitrarios *A* y *B* de las rectas soporte de **F** y −**F**, respectivamente. Pero $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, por lo que

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Volvemos a ver aquí que en la expresión del momento no aparece referencia alguna al polo *O* y que, por tanto, es la misma cualquiera que sea éste. Así pues, *M* podemos representarlo mediante un *vector libre*, tal como se muestra en la figura 2.10*c*, donde la dirección de **M** es perpendicular al plano del par y su sentido lo establece la regla de la mano derecha.

Como el momento **M** de un par será siempre un vector perpendicular al plano de las fuerzas que forman el par, en análisis bidimensional el sentido de **M** podremos representarlo como antihorario u horario mediante uno de los convenios representados en la figura 2.10*d*. Cuando, más adelante, tratemos con pares en problemas tridimensionales haremos un uso completo de la notación vectorial para representarlos.

Todo par permanece constante mientras no varíe el vector representativo de su momento; por consiguiente, dado un par, éste no varía si los valores de *F* y *d* cambian de modo que su producto no varíe. Del mismo modo, un par no resulta afectado si se permite que las fuerzas que lo constituyen actúen en diferentes planos paralelos. En la figura 2.11 se muestran cuatro configuraciones diferentes del mismo par **M**, en cada una de las cuales el par está descrito por el mismo vector libre que representa idénticas tendencias a hacer girar los cuerpos.



(a)

(b)

(c)

o sea

o sea

Par antihorario

Par horario

(d)

Figura 2.10

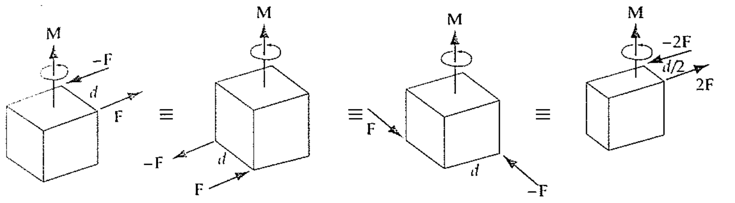


Figura 2.11

Sistemas fuerza-par. El efecto de una fuerza sobre un cuerpo lo hemos descrito con arreglo a la tendencia a empujar el cuerpo, o a tirar de él, en la dirección de la fuerza y a hacerlo rotar en torno a cualquier eje que no corte a la recta soporte de la fuerza. La representación de este doble efecto suele facilitarse sustituyendo la fuerza dada por otra igual y paralela más un par que compense el cambio del momento de la fuerza.

En la figura 2.12 se ilustra esta descomposición de una fuerza en una fuerza y un par, sustituyéndose la fuerza **F** aplicada aun punto *A* por la misma fuerza trasladada a un punto *B* mas un par antihorario *M* = *Fd*. La figura central muestra el paso del sistema inicial al final, consistente en añadir en el punto *B* dos fuerzas opuestas **F** y −**F** que no introducen efectos exteriores en el cuerpo. Vemos ahora que la fuerza inicial en *A* y la igual y opuesta en *B* constituyen el par *M* = *Fd*, que en este caso es antihorario según se indica en la parte derecha de la figura. Así, la fuerza original que estaba en *A* se ha sustituido por la misma fuerza aplicada en otro punto *B* y un par, sin alterar los efectos sobre el cuerpo de la fuerza original. Una combinación de una fuerza y un par como la que se representa en la parte derecha de la figura 2.12 se conoce como *sistema fuerza-par*.

Se deduce también que un par dado y una fuerza que se halle en el plano del par (normal al vector momento) se pueden combinar para dar una fuerza única, invirtiendo el procedimiento. La sustitución de una fuerza por un sistema fuerza-par, y también la sustitución contraria, son pasos que hallan repetida aplicación en Mecánica y, por tanto, deben dominarse a fondo.

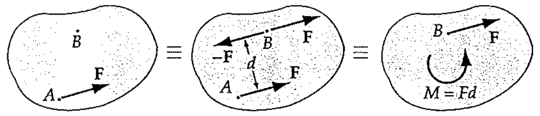
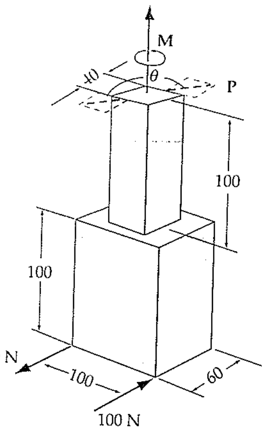


Figura 2.12

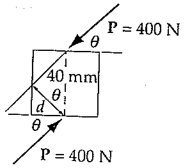
PROBLEMA TIPO 2.6

El miembro estructural rígido esta sometido al par formado por las dos fuerzas de 100 N. Sustituir ese par por otro equivalente compuesto por las dos fuerzas P y −P de módulo 400 N cada una. Determinar el ángulo correcto θ.



Cotas en milímetros

① **Como estos dos pares iguales son vectores libres paralelos, las únicas dimensiones relevantes son aquellas que dan las distancias perpendiculares entre las fuerzas de los pares.**



Solución. Si el plano de las fuerzas se contempla desde arriba, el par original es antihorario y su módulo es

$$[M = Fd] \qquad M = 100(0{,}1) = 10\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Las fuerzas **P** y −**P** producen un par antihorario

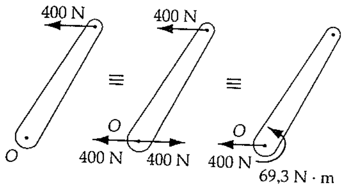
$$M = 400(0{,}040)\cos\theta$$

① Igualando ambas expresiones resulta

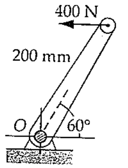
$$10 = 400(0{,}40)\cos\theta$$

$$\theta = \text{arcos}\,\frac{10}{16} = 51{,}3° \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 2.7



Sustituir la fuerza horizontal de 400 N que actúa sobre la palanca por un sistema formado por una fuerza aplicada en O y un par.



Solución. Aplicamos en O dos fuerzas iguales y opuestas de 400 N e identificamos el par antihorario.

$$[M = Fd] \qquad M = 400(0{,}200\ \text{sen}\ 60°) = 69{,}3\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

O sea, la fuerza original equivale a la fuerza de 400 N aplicada en O con un par de momento 69,3 N · m, tal como se muestra en la tercera de las figuras equivalentes.

① **Muy a menudo se presenta el problema inverso a éste, es decir, la sustitución de una fuerza y un par por una fuerza única. El procedimiento inverso consistiría en remplazar el par por dos fuerzas, una de las cuales fuese igual y opuesta a la de 400 N que actúa en *O*. El brazo del par sería $M/F = 69{,}3/400 = 0{,}1732$ m, que es 0,2 sen 60°, determinando así la recta de la fuerza única de 400 N.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.49 Calcular el momento combinado de las dos fuerzas de 24 N respecto a los puntos (a) *O* y (b) *A*.

Resp. $M_o = M_A = 38{,}4$ N · m

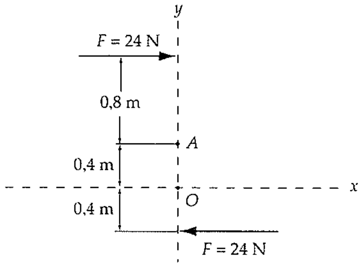


Figura problema 2.49

2.50 Sustituir la fuerza de 40 N aplicada en el punto *A* por sendos sistemas fuerza-par en los puntos (a) *O* y (b) *B*.

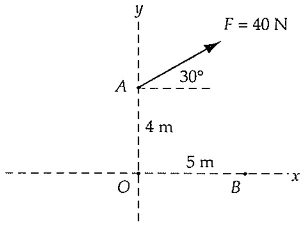


Figura problema 2.50

2.51 Sustituir el sistema fuerza-par aplicado en el punto *O* por una fuerza única. Especificar la coordenada x_A del punto del eje *x* por el que pasa la recta soporte de esa fuerza única.

Resp. $F = 1{,}4$ kN en $x_A = 0{,}6$ m

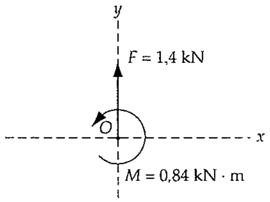


Figura problema 2.51

2.52 Al virar a la izquierda, un conductor ejerce sobre el volante las dos fuerzas de 6 N indicadas. Hallar el momento asociado a esas fuerzas. Analizar los efectos de variar el diámetro *d* del volante.

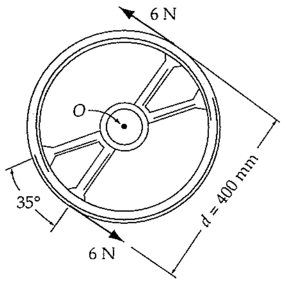


Figura problema 2.52

Se representa en planta una puerta giratoria. En ella penetran a la vez dos personas que ejercen, tal como se muestra, sendas fuerzas de igual intensidad F. Determinar ésta, si el momento resultante respecto al eje de giro en O es de 25 N · m.

Resp. $F = 16{,}18$ N

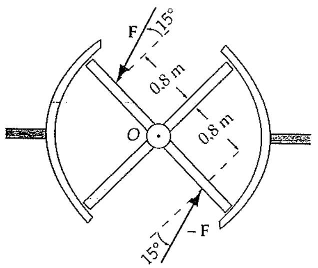


Figura problema 2.53

2.54 A toda velocidad, cada una de las hélices gemelas del barco desarrolla un empuje de 300 kN. Durante la maniobra del barco, una de las hélices gira avante a toda máquina y la otra atrás a toda máquina. ¿Qué empuje P debe ejercer sobre el barco cada uno de los remolcadores para contrarrestar el efecto de giro producido por las hélices del barco?

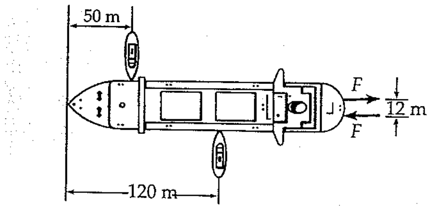


Figura problema 2.54

Problema representativos

2.55 Como parte de una prueba, los dos motores del avión se aceleran y los pasos de las hélices se ajustan de modo que den los empujes a proa y popa indicados. ¿Qué fuerza F debe ejercer la pista sobre cada una de las ruedas principales frenadas A y B para contrarrestar el efecto rotatorio de los dos empujes de las hélices? La rueda de morro C no está frenada y se halla girada 90° y su efecto puede despreciarse.

Resp. $P = 3{,}33$ kN

2.56 Al diseñar el gancho de elevación, se observa que la acción de la fuerza aplicada **F** en la sección crítica del gancho es una tracción en B y un par. Si la intensidad de éste es de 4000 m.N, hallar la intensidad de F.

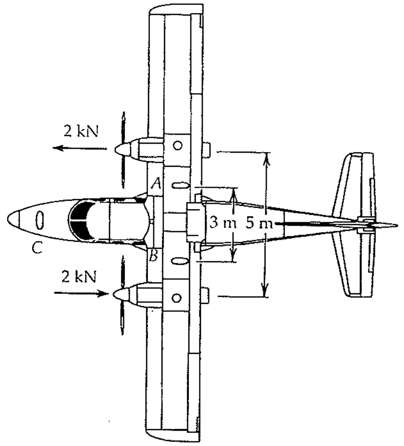


Figura problema 2.55

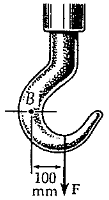


Figura problema 2.56

2.57 Durante la subida a celeridad constante por una pendiente del diez por ciento, la transmisión ejerce un momento de giro (par) de 260 N · m sobre cada una de las ruedas traseras de un automóvil. Hallar F de modo que resulte nulo el momento resultante respecto a O debido a la transmisión y la fuerza de rozamiento.

Resp. $F = 743$ N

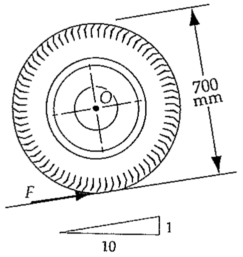


Figura problema 2.57

2.58 El par de 50 N · m está aplicado al eje horizontal de la placa cuadrada vertical. Si se desea sustituir el par y la fuerza de 320 N por una fuerza única aplicada en el punto A, determinar la distancia x.

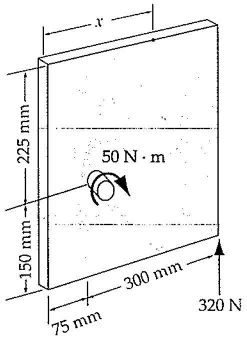


Figura problema 2.58

2.59 Para apretar un perno de cabeza cuadrada se emplea una llave de brazos. Si a ésta se aplican las fuerzas de 250 N indicadas, determinar el módulo F de las fuerzas ejercidas sobre los cuatro puntos de contacto de la cabeza de 25 mm del perno, de tal modo que su acción externa en el perno equivalga a la de las dos fuerzas de 250 N. Supóngase que las fuerzas son perpendiculares a las caras de la cabeza del perno.

Resp. $F = 3500$ N

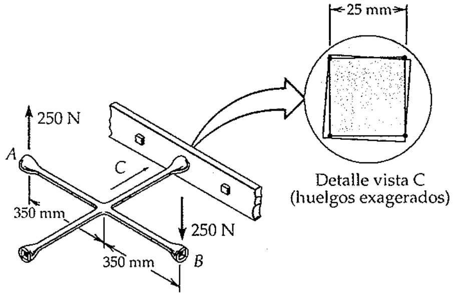


Figura problema 2.59

2.60 La llave se encuentra sometida a las fuerzas de 200 N y **P**, tal como se representa. Sabiendo que un sistema equivalente a las dos fuerzas es una fuerza **R** aplicada en O y un par **M** = 20k N · m, determinar **P** y **R**.

2.61 Calcular el momento de la fuerza de 1200 N respecto al pasador A del soporte. Comenzar sustituyendo la fuerza de 1200 N por un sistema fuerza-par en el punto C.

Resp. $M_A = 562$ N · m (AH)

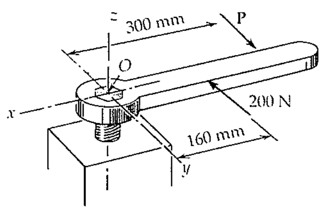


Figura problema 2.60

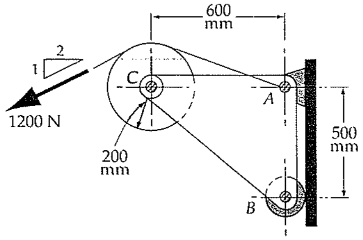


Figura problema 2.61

2.62 Para el soporte del problema 2.61, calcular el momento de la fuerza de 1200 N respecto al pasador B.

2.63 El soporte de la polea aguanta, tal como se muestra, las dos tensiones de 800 N del cable y está empernada en A y B al ala de la columna de acero. Remplazar las dos fuerzas por una fuerza y un par equivalentes, con la fuerza equidistante de ambos pernos. A continuación redistribuir esa fuerza y ese par sustituyendo cada uno por una fuerza en A y una fuerza en B. Combinar los efectos y hallar la fuerza de tracción o compresión que soporta cada perno.

Resp. $F_A = 2.35$ kN tracción
$F_B = 0.75$ kN compresión

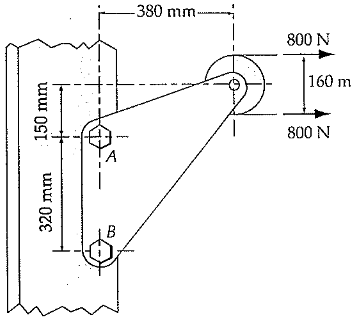


Figura problema 2.63

2.64 En la posición $x = 250$ mm, sobre la palanca del freno de mano de un automóvil se ejerce una fuerza **F** de módulo 50 N. Sustituir esa fuerza por un sistema fuerza-par equivalente en el punto de apoyo O.

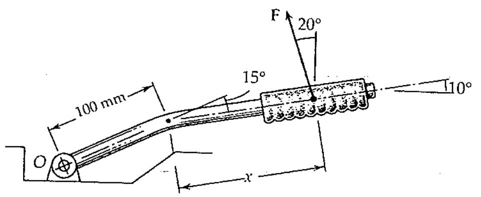


Figura problema 2.64

2.65 El mecanismo de torno y cable de la figura se está empleando para izar lentamente un poste de servicio de masa m. Cuando $\theta = 60°$, la tensión del cable es el 35% del peso del poste. Hallar el sistema fuerza-par equivalente en O a la fuerza que la tensión del cable aplica al extremo superior del poste. El diámetro del tambor elevador se despreciará en comparación con l.

Resp. $R = 0{,}35\ mg$ $\qquad M_o = 0{,}253\ mgl$ (AH)

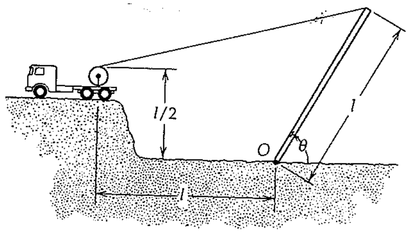


Figura problema 2.65

2.66 El órgano compuesto de las dos poleas rígidamente unidas es accionado por un par y dos fuerzas tractoras, ejercidas éstas mediante correas arrolladas y sujetas a las dos superficies de las poleas. Determinar el sistema fuerza-par equivalente en el eje O de las poleas.

2.67 Determinar el momento combinado M_A respecto al punto A producido por las dos tensiones iguales $T = 8$ kN en el cable que acciona la polea, ¿Hace falta saber el diámetro de la polea?

Resp. $M_A = 30{,}9$ kN · m (antihorario)

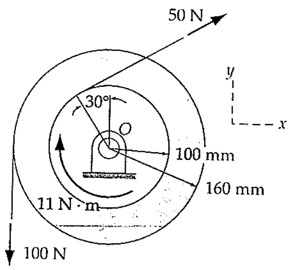


Figura 2.66

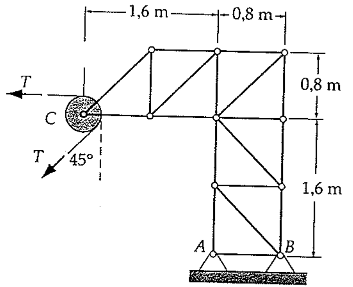


Figura problema 2.67

2.68 El conjunto de las ruedas motrices de un automóvil de tracción delantera sufre la acción de una fuerza de reacción normal de 7000 N y una fuerza de rozamiento **F**, ejercidas ambas por la superficie de la calzada. Se sabe que la resultante de esas fuerzas forma un ángulo de 15° con la vertical. Determinar el sistema fuerza-par equivalente en el centro de masa G del vehículo. Supóngase que se trata de un problema bidimensional.

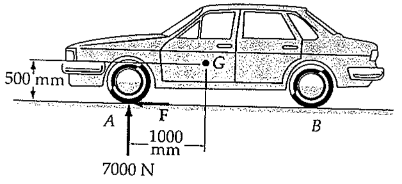


Figura problema 2.68

En los cuatro apartados anteriores se han desarrollado las propiedades de la fuerza, el momento y el par. Apoyándonos en esa exposición podremos describir ahora la acción resultante de un grupo o *sistema* de fuerzas. En la mayoría de los problemas de Mecánica intervienen sistemas de fuerzas y será necesario reducir un sistema a su forma más sencilla para describir su acción. La resultante de un sistema de fuerzas es la combinación de fuerzas más sencilla que pueda sustituir a las fuerzas originales sin alterar el efecto exterior del sistema sobre un cuerpo rígido al que puedan aplicarse las fuerzas. El equilibrio de un cuerpo es la condición en la cual la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula y la aceleración de un cuerpo se describe igualando la resultante de las fuerzas al producto de la masa por la aceleración. Así pues, la determinación de las resultantes es fundamental tanto para la Estática como para la Dinámica.

El tipo más común de sistema de fuerzas se presenta cuando todas ellas están contenidas en un mismo plano, por ejemplo, el x-y, según se ilustra con el sistema de tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ de la figura 2.13*a*. La fuerza resultante **R** se obtiene en módulo, dirección y sentido formando el *polígono de fuerzas* de la parte *b* de la figura, donde se suman las fuerzas colocando sucesivamente el origen de una en el extremo de otra en un orden cualquiera. Así, para un sistema cualquiera de fuerzas coplanarias

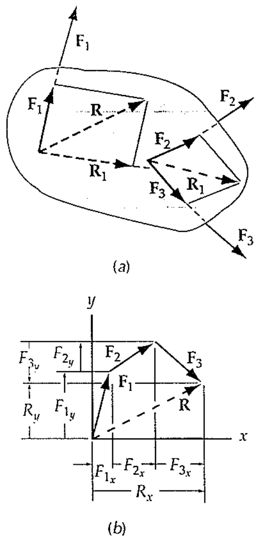


Figura 2.13

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots = \Sigma\mathbf{F}$$

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \tag{2.9}$$

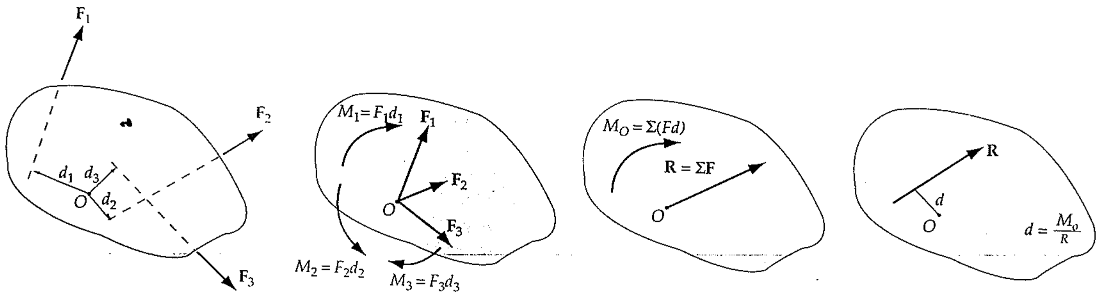
$$\theta = \text{arctg}\,\frac{R_y}{R_x} = \text{arctg}\,\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

Puede obtenerse gráficamente la recta soporte de **R** conservando las rectas soporte de las fuerzas y sumándolas por la regla del paralelogramo como se ilustra en la parte *a* de la figura, en donde la $\mathbf{R}_1$ de $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ se suma con $\mathbf{F}_1$ para obtener **R**. En este proceso se aplica el principio de transmisibilidad.

Algebraicamente, la fuerza resultante puede ubicarse como sigue. Primero, se elige un polo conveniente y todas las fuerzas se trasladan a él. El proceso se ilustra, para un sistema de tres fuerzas, en las figuras 2.14*a* y *b*, donde M_1, M_2 y M_3 son los pares que resultan al traspasar las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ de sus respectivas rectas soporte originales a las rectas soporte que pasan por O. Seguidamente, en O se suman todas las fuerzas, para obtener la fuerza resultante **R**, y todos los pares, para obtener el momento resultante M_o. Así ya tenemos el sistema fuerza-par único de la figura 2.14*c*. Ya tenemos así el sistema fuerza-par de la figura 2.14*c*. Por último, en la figura 2.14*d* se determina la posición de la recta soporte imponiendo a **R** la condición de que su momento respecto a O sea M_O. El lector debe darse cuenta de que los sistemas de fuerzas de las figuras 2.14*a* y 2.14*d* son equivalentes y de que el valor $\Sigma(Fd)$ de la figura 2.14*a* es igual al Rd de la figura 2.14*d*.

Este proceso se resume en las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F} \\ M_O &= \Sigma M = \Sigma(Fd) \\ Rd &= M_O \end{aligned} \tag{2.10}$$



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

Figura 2.14

La dos primeras de estas ecuaciones 2.10 reducen un sistema dado a un sistema fuerza-par en un punto arbitrario O, aunque elegido convenientemente. La última de las tres especifica a qué distancia d del punto O hay que situar la recta soporte de **R**. Efectivamente, esta última ecuación afirma que el momento de la fuerza resultante respecto a un punto cualquiera O es igual a la suma de los momentos de las fuerzas originales del sistema respecto al mismo punto. Esto supone una ampliación del teorema de Varignon al caso de los sistemas de fuerzas *no concurrentes*, ampliación a la que nos referiremos a partir de aquí como a *principio de los momentos*.

Para un sistema de fuerzas concurrentes, en el que las rectas soporte de todas las fuerzas pasan por un mismo punto O, la suma de los momentos ΣM_o respecto a ese punto será, desde luego, nula. O sea la recta soporte de la resultante $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$, determinada por la primera de las 2.10, pasa por el punto O. Para un sistema de fuerzas paralelas, debe tomarse un sistema de coordenadas uno de cuyos ejes sea paralelo a la dirección de las fuerzas. Aunque la fuerza resultante **R** de un sistema de fuerzas sea nula, no tiene por qué ser nula la resultante del sistema, puesto que puede ser un par. Por ejemplo, la fuerza resultante de las tres fuerzas de la figura 2.15 es nula, pero la resultante es un par de sentido horario cuyo momento es $M = F_3d$.

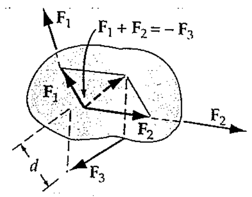
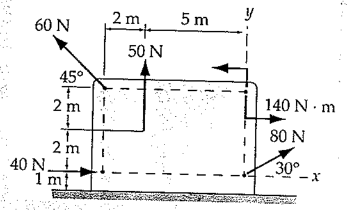


Figura 2.15

PROBLEMA TIPO 2.8

Determinar la resultante de las cuatro fuerzas y el par que actúan sobre la placa representada.



Solución. Como polo para reducir a un sistema fuerza-par el sistema dado, tomamos el punto O, el cual nos servirá también de origen.

$[R_x = \Sigma F_x]$ $\qquad R_x = 40 + 80 \cos 30° - 60 \cos 45° = 66{,}9\ \text{N}$

$[R_y = \Sigma F_y]$ $\qquad R_y = 50 + 80 \operatorname{sen} 30° + 60 \cos 45° = 132{,}4\ \text{N}$

$[R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}]$ $\qquad R = \sqrt{66{,}9^2 + 132{,}4^2} = 148{,}3\ \text{N}$ *Resp.*

$\left[\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{R_y}{R_x}\right]$ $\qquad \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{132{,}4}{66{,}9} = 63{,}2°$ *Resp.*

① $[M_O = \Sigma(Fd)]$ $\qquad M_O = 140 - 50(5) + 60 \cos 45°(4) - 60 \operatorname{sen} 45°(7)$

$$= -273{,}3\ \text{N} \cdot \text{m}$$

En la figura *a* se representa el sistema fuerza-par compuesto de **R** y M_o.

Seguidamente determinamos la recta soporte definitiva de **R**, de tal modo que únicamente **R** represente a todo el sistema original.

$[Rd = |M_O|]$ $\qquad 148{,}3d = 237{,}3 \qquad d = 1\,600\ \text{m}$ *Resp.*

Por tanto, la resultante **R** podrá aplicarse en un punto cualquiera de una recta que forme un ángulo de 63,2° con el eje x y sea tangente en el punto A a una circunferencia de radio 1,6 m centrada en O, tal como se indica en la parte *b* de la figura. La ecuación $Rd = M_o$ se ha empleado con valores absolutos (o sea, ignorando el signo de M_o) de modo que la situación física, ilustrada en la figura *a*, dicta cuál es la posición definitiva de **R**. Si M_o hubiera sido antihorario, la recta soporte de **R** hubiera sido la tangente en el punto B.

La resultante **R** puede asimismo ubicarse determinando la abscisa en el origen b de su recta soporte, o sea, la distancia OC en la figura *c*. En efecto, con R_x y R_y aplicadas en el punto C, sólo R_y dará momento respecto a O y será

$$R_yb = |M_O| \qquad \text{y} \qquad b = \frac{237{,}3}{132{,}4} = 1{,}792\ \text{m}$$

Otra posibilidad sería obtener la ordenada en el origen teniendo en cuenta que el momento en O lo produce en este caso sólo la componente R_x.

Un planteo más formalista para determinar la recta soporte final de **R** sería partir de la expresión vectorial

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$$

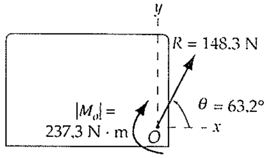
donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es un vector de posición que va desde el punto O a cualquier punto de la recta soporte de **R**. Sustituyendo por los valores de **r**, **R** y $\mathbf{M}_o$ y efectuando el producto vectorial

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (66{,}9\mathbf{i} + 132{,}4\mathbf{j}) = -237{,}3\mathbf{k}$$
$$(132{,}4x - 66{,}9y)\mathbf{k} = -237{,}3\mathbf{k}$$

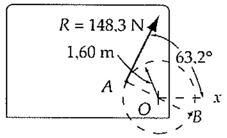
Así pues, la ecuación de la recta soporte (fig. *c*) es

$$132{,}4x - 66{,}9y = -237{,}3$$

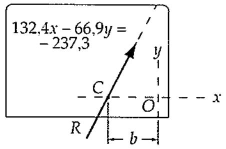
② Aquí, al hacer $y = 0$, se obtiene $x = -1{,}792$ m, lo que concuerda con el cálculo anterior de la distancia b.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

① Observese que la elección del punto O como centro de momentos elimina los momentos de las dos fuerzas que pasan por O. Si se hubiera adoptado el convenio de suponer positivos los momentos horarios, el valor de M_o hubiera resultado +237,3 N · m, indicando el signo más un sentido concordante con el convenio. Ambos convenios de signos indican, por supuesto, que el momento M_o es horario.

② Adviértase que el planteo vectorial incorpora automáticamente la información acerca de los signos, mientras que el planteo escalar es más físico. El lector debe dominar ambos.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.69 Determinar la resultante R de las tres tracciones que actúan sobre el cáncamo. Hallar el módulo de R el ángulo θ_x que forma R con el semieje x positivo.

Resp. $R = 17{,}43$ kN, $\theta_x = 26{,}1°$

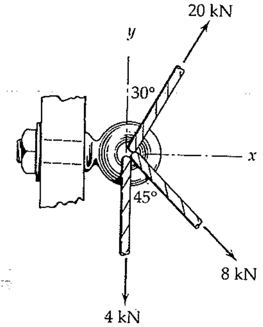


Figura problema 2.69

2.70 En cada uno de los tres casos representados hallar el sistema fuerza —par equivalente en el origen O.

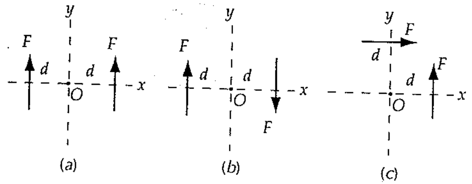


Figura problema 2.70

2.71 En cada uno de los tres casos representados hallar el sistema fuerza-par equivalente en el origen O. Si es posible, sustituir el sistema por una fuerza única

Resp. (*a*) R = 2Fj en la recta $x = -d$

(*b*) R = Fi en la recta $y = 3d$

(*c*) R = Fi en la recta $y = -d$.

2.72 Sustituir las dos fuerzas actuantes sobre el tubo acodado por una fuerza única equivalente R. Especificar la distancia y desde el punto A hasta la recta soporte de R.

2.73 Determinar y ubicar la resultante de las dos fuerzas que actúan sobre la viga en doble T.

Resp. $R = 3$ kN (hacia abajo)

$x = 12{,}67$ m (fuera de la viga)

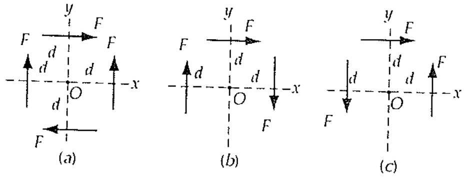


Figura problema 2.71

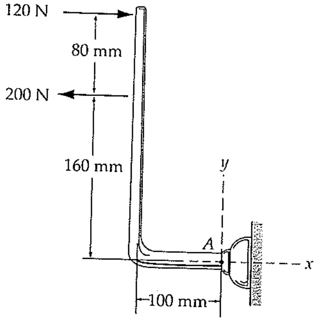


Figura problema 2.72

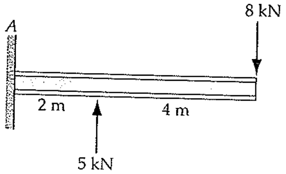


Figura problema 2.73

Problemas representativos

2.74 Cuatro varillas delgadas están unidas al soporte tal como se muestra. Si se conocen tres de las cuatro fuerzas que ejercen las varillas sobre el soporte, determinar el ángulo θ de la cuarta varilla y la intensidad F de la tracción que sufre esa varilla si la resultante de las fuerzas es vertical ascendente y su módulo vale 100 N.

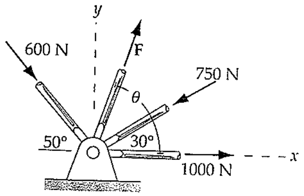


Figura problema 2.74

2.75 Determinar y ubicar la resultante de las dos fuerzas y un par que actúan en la viga en doble T.

Resp. R = 3 kN (hacia abajo) en $x = 2{,}67$ m

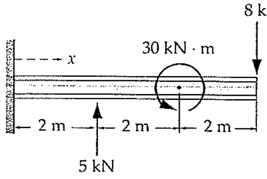


Figura problema 2.75

2.76 Hallar M si la resultante de éste y las dos fuerzas pasa por el punto O.

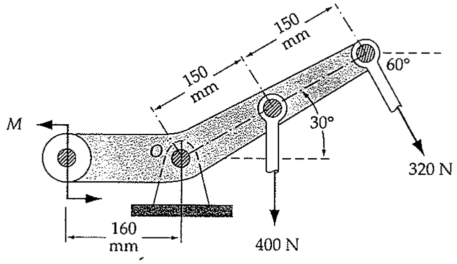


Figura problema 2.76

2.77 Un tetrarreactor comercial cada uno de cuyos motores genera un empuje de 90 kN, vuela en régimen de crucero cuando el motor número 3 se para bruscamente. Determinar y ubicar la resultante de los tres motores restantes. Considérese éste un problema bidimensional.

Resp. $R = 270$ kN a 4 m a la izquierda del eje longitudinal del fuselaje

2.78 En un avión experimental las direcciones de los dos vectores de empuje pueden variarse, por separado, entre ciertos límites. Para el caso representado, hallar el sistema fuerza-par en el punto O. Seguidamente sustituir ese sistema fuerza-par por una fuerza única y especificar la abscisa en el origen x de su recta soporte.

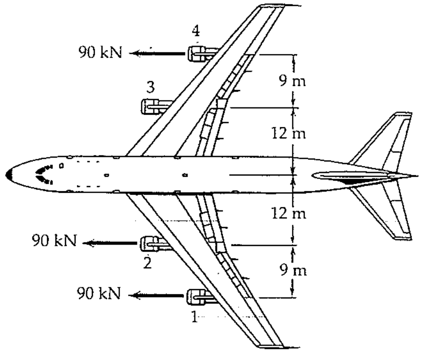


Figura problema 2.77

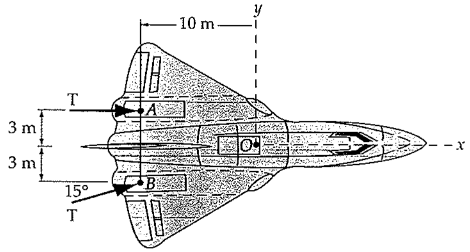


Figura problema 2.78

2.79 Determinar la resultante R de las tres fuerzas que actúan sobre la armadura simple de la figura. Especificar los puntos de los ejes x e y por los que pasa R.

Resp. R $= -15$i $- 47{,}3$j kN

$x = 7{,}42$ m $\quad y = -23{,}4$ m

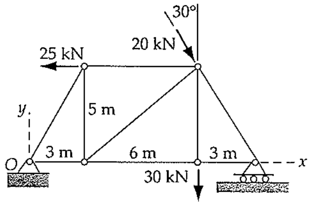


Figura problema 2.79

2.80 En la posición de equilibrio representada, la resultante de las tres fuerzas actuantes sobre la palanca angular pasa por el cojinete O. Determinar la fuerza vertical P. ¿Depende de θ el resultado?

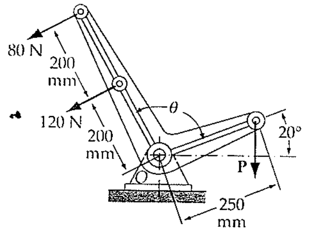


Figura problema 2.80

2.81 Las dos poleas solidarias de la figura están sometidas a las tracciones de las correas indicadas. Si la resultante **R** de esas fuerzas pasa por el centro O, hallar T y el módulo de **R** y el ángulo antihorario que ésta forma con el eje x.

Resp. $T = 60$ N $\quad$ R = 193,7 N $\quad$ $\theta = 34{,}6°$

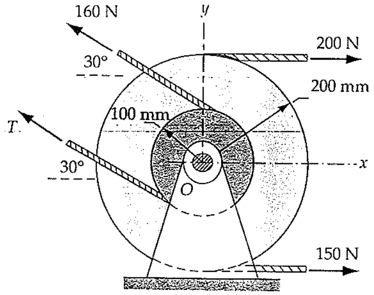


Figura problema 2.81

2.82 Se muestran vistas desde arriba las fuerzas que ejercen tres estudiantes cuando empujan hacia la puerta un escritorio. Hallar el sistema fuerza-par equivalente en el punto A. Hallar después la expresión de la recta soporte de la fuerza resultante.

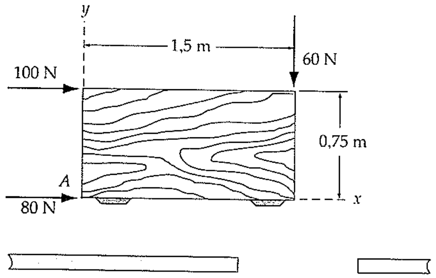


Figura problema 2.82

2.83 Determinar la ordenada en el origen de la recta soporte de la resultante del sistema de cargas representado.

Resp. $y = 1{,}309$ m

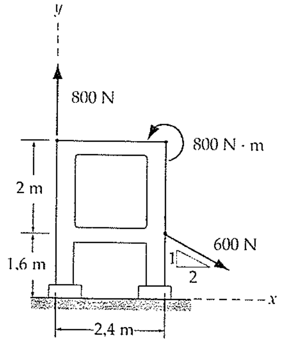


Figura problema 2.83

2.84 Cuando se acelera hacia la derecha una de las ruedas traseras de un automóvil de tracción delantera, está sometida a las cinco fuerzas y al par indicados. Las fuerzas $A_x = 240$ N y $A_y = 2000$ N son fuerzas que se transmiten del puente a la rueda, $F = 160$ N es la fuerza de rozamiento que ejerce la calzada sobre la cubierta, $N = 2400$ N es la reacción normal que ejerce la calzada y $W = 400$ N es el peso del conjunto rueda-cámara-cubierta. El par $M = 3$ N · m se debe al rozamiento en el cojinete de la rueda. Determinar y ubicar la resultante del sistema.

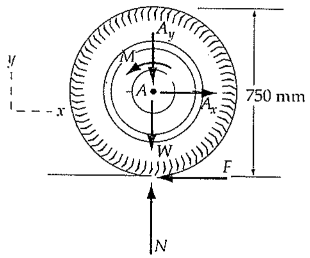


Figura problema 2.84

2.85 Hallar la resultante **R** de las tres fuerzas y los dos pares representados. Determinar la abscisa en el origen x de la recta soporte de **R**.

Resp. $\mathbf{R} = -1{,}5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ kN
$x = 290$ mm

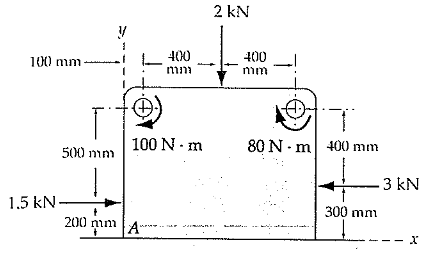


Figura problema 2.85

2.86 Determinar los puntos de intersección en los ejes x e y de la recta soporte de la resultante de las tres cargas aplicadas a los engranajes.

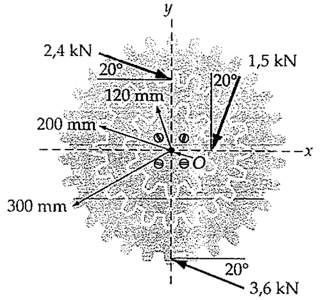


Figura problema 2.86

2.87 Un automóvil de tracción trasera esta atrapado en la nieve entre otros vehículos estacionados. Con la intención de liberar su vehículo, tres estudiantes ejercen fuerzas sobre él en los puntos A, B y C mientras que la acción del conductor da por resultado un empuje hacia adelante de 200 N paralelo al plano de rotación de las ruedas traseras. Considerando este problema como bidimensional, determinar el sistema fuerza-par equivalente en el centro de masa G del automóvil y localizar la posición x del punto del eje geométrico del vehículo por el que pasa la resultante. Se despreciarán todas las fuerzas no representadas.

Resp. $\mathbf{R} = 925\mathbf{i} + 567\mathbf{j}$ N
$M_G = 690$ N · m (AH) $\quad$ $x = 1{,}218$ m

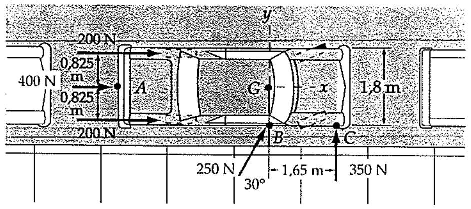
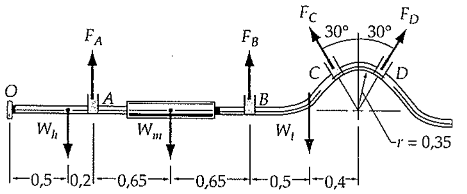


Figura problema 2.87

2.88 En la figura se representa el sistema de escape de una camioneta de reparto. Los pesos W_d, W_s y W_t del tubo delantero, el silenciador y el tubo trasero son, respectivamente, 10, 100 y 50 N y actúan en los puntos indicados. Si el soporte A se ajusta de modo que sufre una tracción F_A de 50 N, determinar a qué tracciones hay que ajustar los soportes B, C y D de modo que sea nulo el sistema fuerza-par equivalente en O. ¿Por qué se pretende que así sea?



Cotas en milímetros

Figura problema 2.88

SECCIÓN B. SISTEMAS DE FUERZAS TRIDIMENSIONALES

2.7 COMPONENTES RECTANGULARES

Numerosos problemas de Mecánica hay que resolverlos en tres dimensiones, por lo que muchas veces una fuerza debe descomponerse en sus tres componentes mutuamente perpendiculares. Así, la fuerza **F** que actúa en el punto O (fig. 2.16) posee las tres *componentes rectangulares* F_x, F_y y F_z tales que

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos\theta_x \qquad & F &= \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2} \\ F_y &= F\cos\theta_y \qquad & \mathbf{F} &= F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k} \\ F_z &= F\cos\theta_z \qquad & \mathbf{F} &= F(\mathbf{i}\cos\theta_x+\mathbf{j}\cos\theta_y+\mathbf{k}\cos\theta_z) \end{aligned} \tag{2.11}$$

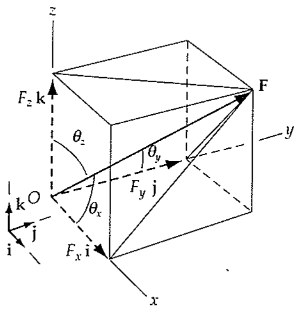


Figura 2.16

Los vectores unitarios **i**, **j**, **k** están dirigidos en las direcciones x, y y z, respectivamente. Si introducimos los *cosenos directores* de **F**, que son $l = \cos \theta_x$, $m = \cos \theta_y$, $n = \cos \theta_z$, donde $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, podemos escribir la fuerza como sigue

$$\mathbf{F} = F(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \tag{2.12}$$

El segundo miembro de esta igualdad 2.12 podemos contemplarlo como el módulo F de la fuerza multiplicado por un vector unitario $\mathbf{n}_F$ que singulariza la dirección de **F**, o sea

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F \tag{2.12a}$$

De las igualdades 2.12 y 2.12*a* es evidente que

$$\mathbf{n}_F = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

y las componentes escalares del vector unitario $\mathbf{n}_F$ son los cosenos directores de la recta soporte de **F**.

Al resolver problemas tridimensionales, es corriente tener que hallar las componentes escalares x, y y z de una fuerza dada o desconocida. En la mayoría de los casos, la dirección de una fuerza está descrita (*a*) por dos puntos de su recta soporte o (*b*) por dos ángulos que orientan la recta soporte.

(a) Recta soporte definida por dos puntos. Si, en la figura 2.17, se conocen las coordenadas de los puntos A y B, la fuerza **F** podrá escribirse

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = F\frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Las componentes escalares x, y y z de **F** resultan ser los respectivos coeficientes escalares de **i**, **j** y **k**.

(b) Recta soporte definida por dos ángulos. Consideremos la geometría de la figura 2.18, donde se conocen los ángulos θ y ϕ. Primero podemos descomponer **F** en sus componentes horizontal y vertical.

$$F_{xy} = F \cos \phi$$
$$F_z = F \operatorname{sen} \phi$$

Y a continuación la componente F_{xy} la descomponemos en las componentes x e y.

$$F_x = F_{xy} \cos \theta = F \cos \phi \cos \theta$$
$$F_y = F_{xy} \operatorname{sen} \theta = F \cos \phi \operatorname{sen} \theta$$

Las cantidades F_x, F_y y F_z son las componentes escalares de **F** que se buscan.

La elección de la orientación del sistema de coordenadas es totalmente arbitraria, siendo la comodidad el factor primordial a tener en cuenta. No obstante, en los problemas tridimensionales y con el fin de preservar las orientaciones relativas de los ejes, *debemos* emplear un sistema a derechas consistente con la regla de la mano derecha relativa al producto vectorial. En los sistemas a derechas, cuando giramos en el sentido del eje x al eje y, el sentido positivo del eje z es el de avance de un tornillo a derechas que girase en el mismo sentido.

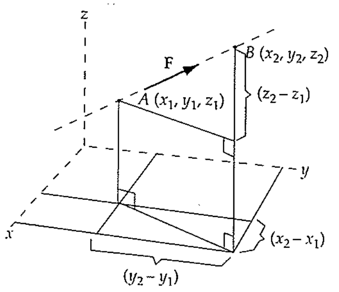


Figura 2.17

Las componentes rectangulares de una fuerza **F** (o de otro vector) también pueden escribirse con ayuda de la operación vectorial llamada *producto escalar* (véase punto 6 del apartado C.7 del apéndice C). Por definición, el producto escalar de dos vectores **P** y **Q** (fig. 2/19a) es el producto de sus módulos multiplicado por el coseno del ángulo α que forman y se escribe

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \alpha$$

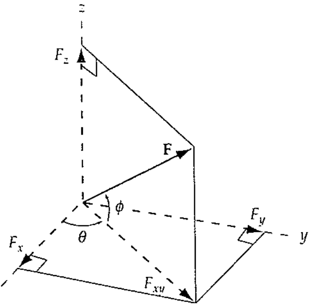


Figura 2.18

Este producto puede considerarse como el resultado de multiplicar la proyección ortogonal $P \cos \alpha$ de **P** en la dirección de **Q** por Q, o bien el producto de la proyección ortogonal $Q \cos \alpha$ de **Q** sobre **P** por P. En uno y otro caso, el producto escalar de dos vectores es un escalar. Así, por ejemplo, en la figura 2.16 la componente $F_x = F \cos \theta_x$ de la fuerza **F** podría escribirse en la forma $F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i}$, donde **i** es el vector unitario de la dirección x. En términos más generales, si **n** es un vector unitario en una dirección especificada, la componente de **F** en la dirección **n** (fig. 2.19*b*) vale $F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Si se desea escribir la proyección en la dirección **n** como vector, entonces su componente escalar, expresada por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, habrá que multiplicarla por el vector unitario **n** para que dé $\mathbf{F}_n = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, lo que puede escribirse simplemente $\mathbf{F}_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{nn}$.

Si son α, β y γ los cosenos directores de **n**, éste podrá escribirse en forma vectorial, como cualquier otro vector, como sigue

$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$$

y en este caso su módulo es uno. Si son l, m y n los cosenos directores de **F** respecto a los ejes x-y-z, la proyección de **F** en la dirección de **F** será

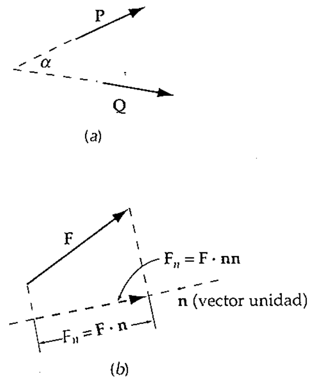
$$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \cdot (\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k})$$
$$= F(l\alpha + m\beta + n\gamma)$$

ya que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

e

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$


P
α
Q
F
$\mathbf{F}_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{nn}$
n (vector unidad)
$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$

(*a*)

(*b*)

Figura 2.19

Si **F** y **n** forman un ángulo θ, en virtud de la definición de producto escalar tendremos $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_n \cos \theta = F \cos \theta$, donde $|\mathbf{n}| = n = 1$. Y entonces el ángulo formado por **F** y **n** viene dado por

$$\theta = \operatorname{arcos} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{F} \tag{2.13}$$

y, en general, el ángulo formado por dos vectores **P** y **Q** cualesquiera es

$$\theta = \operatorname{arcos} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{PQ} \tag{2.13a}$$

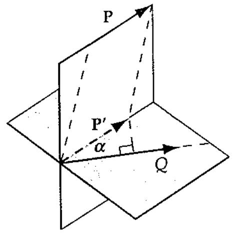
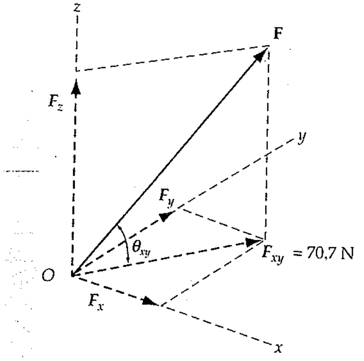


Figura 2.20

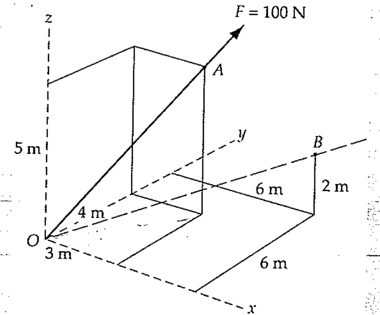
Si una fuerza **F** es perpendicular a una recta cuya dirección esté definida por el vector unitario **n**, será entonces $\cos \theta = 0$ y $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$. Obsérvese en particular que esta última relación no implica que **F** o **n** sean cero, como sería el caso en la multiplicación de escalares, en la que $(A)(B) = 0$ implica que A o B han de ser cero.

Debemos observar que la definición de producto escalar es válida tanto para vectores que no se cortan como para vectores que se cortan. Así, el producto escalar de los vectores **P** y **Q** de la figura 2.20, que no se cortan, es Q multiplicado por la proyección de **P**' sobre **Q**, que es $P'Q \cos \alpha$ puesto que **P**' y **P** son los mismos vectores libres.

PROBLEMA TIPO 2.9



*En el origen O del sistema x-y-z representado está aplicada una fuerza **F** de módulo 100 N cuya recta soporte pasa por el punto A(3, 4, 5) m. Hallar (a) las componentes de **F** en el sistema representado, (b) la proyección F_{xy} de **F** en el plano x-y y (c) la proyección de **F** sobre la recta OB.*



① En este ejemplo todas las componentes escalares son positivas. Atención a los casos en que algún coseno director y, por tanto alguna componente, sea negativo.

Solución. ***Parte(a).*** Empezamos escribiendo **F** como su módulo F multiplicado por un vector unitario $\mathbf{n}_{OA}$.

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_{OA} = F\frac{\overrightarrow{OA}}{\overline{OA}} = 100\left[\frac{3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}\right]$$
$$= 100[0{,}424\mathbf{i}+0{,}566\mathbf{j}+0{,}707\mathbf{k}]$$
$$= 42{,}4\mathbf{i}+56{,}6\mathbf{j}+70{,}7\mathbf{k}\ \text{N}$$

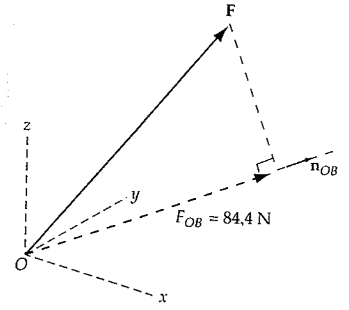
Las componentes buscadas son

① $F_x = 42{,}4$ N $\quad F_y = 56{,}6$ N $\quad F_z = 70{,}7$ N *Resp.*

Parte (b). El coseno del ángulo θ_{xy} que forma **F** con el plano *x-y* es

$$\cos\theta_{xy} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = 0{,}707$$

con lo que $F_{xy} = F\cos\theta_{xy} = 100(0{,}707) = 70{,}7$ N *Resp.*



Parte (c). El vector unitario $\mathbf{n}_{OB}$ en la dirección de *OB* es

$$\mathbf{n}_{OB} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overline{OB}} = \frac{6\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{6^2+6^2+2^2}} = 0{,}688\mathbf{i}+0{,}688\mathbf{j}+0{,}229\mathbf{k}$$

La proyección de **F** sobre *OB* es

② $$F_{OB} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB} = (42{,}4\mathbf{i}+56{,}6\mathbf{j}+70{,}7\mathbf{k})\cdot(0{,}688\mathbf{i}+0{,}688\mathbf{j}+0{,}229\mathbf{k})$$
$$= (42{,}4)(0{,}688)+(56{,}6)(0{,}688)+(70{,}7)(0{,}229)$$
$$= 84{,}4\ \text{N}$$ *Resp.*

② **Tal como se muestra, con el producto escalar se obtiene automáticamente la proyección o componentes escalar de F sobre la recta *OB*.**

Si esta proyección deseamos expresarla en forma de vector escribiremos

$$\mathbf{F}_{OB} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB}\mathbf{n}_{OB}$$
$$= 84{,}4(0{,}688\mathbf{i}+0{,}688\mathbf{j}+0{,}229\mathbf{k})$$
$$= 58{,}1\mathbf{i}+58{,}1\mathbf{j}+19{,}35\mathbf{k}\ \text{N}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.89 Expresar la fuerza **F** de 36 kN en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**. Hallar su proyección sobre el eje x.
Resp. **F** = 12**i** + 24**j** + 24**k**
F_x = 12 kN

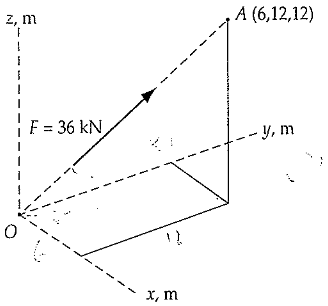


Figura problema 2.89

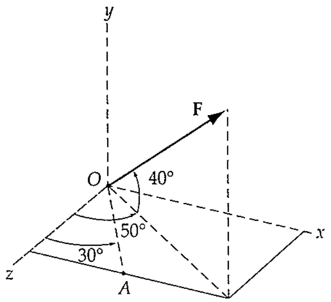


Figura problema 2.90

2.90 Expresar la fuerza **F** de 400 kN en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**. Hallar su proyección sobre la recta *OA*.

2.91 La fuerza **F** tiene un módulo de 900 N y actúa a lo largo de la diagonal del paralelepípedo rectangular. Expresar **F** como producto de su módulo por el vector unitario adecuado y hallar sus componentes x, y y z.
Resp. **F** = 900(**i** – 2**j** – 2**k**)/3
F_x = 300 N $\quad F_y = -600$ N $\quad F_z = -600$ N

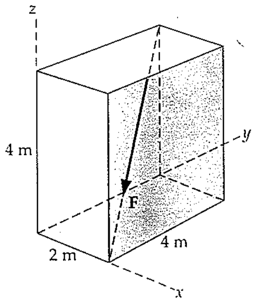


Figura problema 2.91

2.92 El cable ejerce una tracción de 2 kN en el punto A del soporte fijo. Escribir la expresión vectorial de **T**.

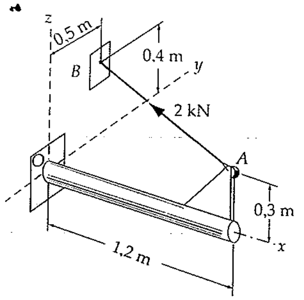


Figura problema 2.92

2.93 El mástil esta inmovilizado por los tres cables representados. Si el tensor se aprieta hasta que el cable AB está sometido a una tensión de 1,8 kN, escribir la expresión vectorial de esa tensión **T** como fuerza que actúe sobre el mástil en el punto B.

Resp. **T** = 1,2**i** + 0,6**j** – 1,2**k** kN

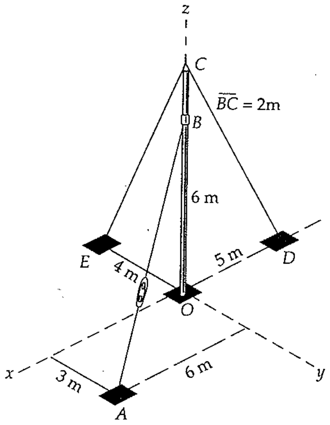


Figura problema 2.93

Problemas representativos

2.94 Una fuerza F de 8 kN (no representada) actúa a lo largo de la recta definida por A y B. Expresarla en función de **i**, **j** y **k**. Hallar su proyección sobre la recta OC.

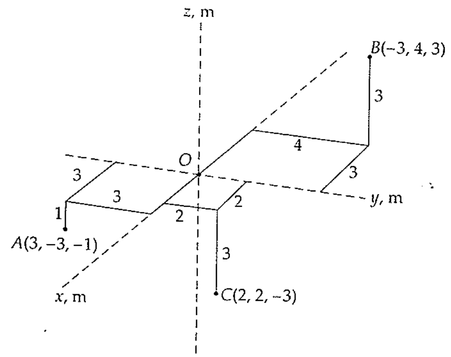


Figura problema 2.94

2.95 La fuerza **F** tiene una intensidad de 10 kN y su recta soporte pasa por los puntos A y B. Hallar el ángulo que forma con la dirección vertical z y su proyección F_{yz} sobre el plano y-z.

Resp. $\theta_z = 34{,}5°$ $F_{yz} = 8{,}36$ kN

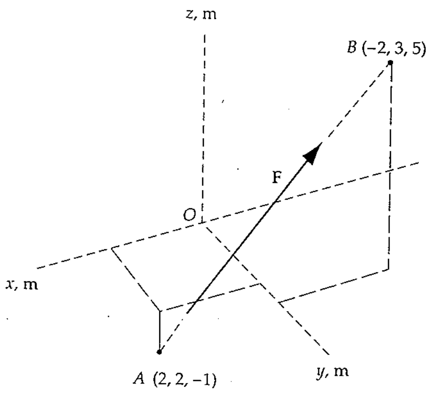


Figura problema 2.95

2.96 Se aprieta el tensor hasta que el cable AB sufre una tensión de 2,4 kN. Expresar vectorialmente esa tensión **T**. como fuerza que actúa sobre el miembro AD. Hallar también la proyección de **T** sobre la recta AC.

2.97 En el cable soporte AB la tensión es de 10 kN. Expresar vectorialmente la fuerza **T** que el cable ejerce sobre el pescante BC. Hallar los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que la recta soporte de **T** forma con los semiejes positivos x, y y z.

Resp. **T** = 4,06**i** – 7,61**j** + 5,07**k**

$\theta_x = 66{,}1°$, $\theta_y = 139{,}5°$, $\theta_z = 59{,}5°$

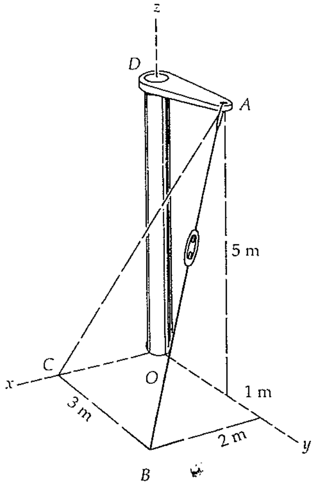


Figura problema 2.96

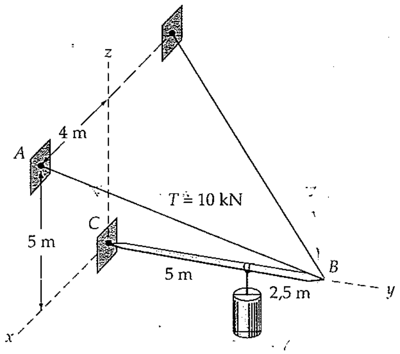


Figura problema 2.97

2.98 Hallar la proyección F_{CD} de la fuerza de 100 N sobre la diagonal CD de una de las caras del cubo.

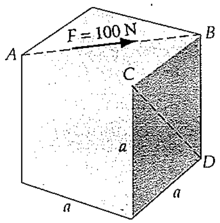


Figura problema 2.98

2.99 Al abrir una puerta dotada con un mecanismo de retroceso para servicio pesado, una persona ejerce, tal como se muestra, una fuerza **P** de intensidad 32 N. Esa fuerza y la normal **n** al frente de la puerta yacen en un plano vertical. Escribir la expresión vectorial de **P** y hallar los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma su recta soporte con los semiejes x, y z positivos.

Resp. **P** = 26,0**i** + 9,48**j** + 16**k** N

$\theta_x = 35{,}5°$, $\theta_y = 72{,}8°$, $\theta_z = 60{,}0°$

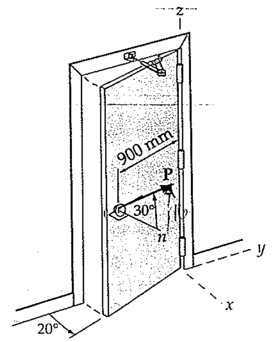


Figura problema 2.99

2.100 Para situar un vagón de mercancías en un taller de reparaciones se emplea un puente-grúa. Si el vagón comienza a moverse por la vía cuando la componente x de la tensión del cable alcanza los 3 kN, calcular la tensión **T** necesaria en el cable. Hallar el ángulo θ_{xy} que formará el cable con el plano vertical x-y.

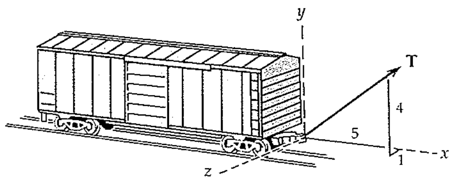


Figura problema 2.100

2.101 La placa rectangular está sujeta por dos bisagras montadas en su canto BC y el cable AE. Si la tensión de éste vale 300

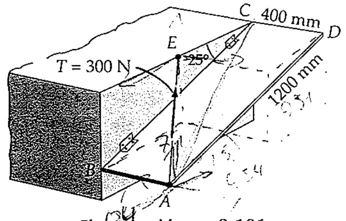


Figura problema 2.101

N, hallar la proyección sobre la recta *BC* de la fuerza que el cable ejerce sobre la placa. Obsérvese que *E* es el punto medio del borde superior del soporte estructural.

Resp. $T_{BC} = 251$ kN

2.102 La fuerza **F** tiene una intensidad de 2 kN y está dirigida de *A* a *B*. Calcular la proyección F_{CD} de **F** sobre la recta *CD* y hallar el ángulo θ que forman la fuerza y *CD*.

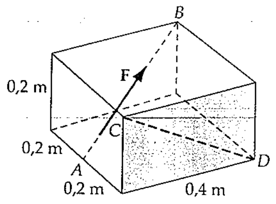


Figura problema **2.102**

2.103 La cadena *AB* mantiene la trampilla abierta a 30°. Si la tensión en la cadena es de 100 N, hallar la proyección de la fuerza de tensión sobre la diagonal *CD* de la trampilla.

Resp. $T_{CD} = 46{,}0$ N

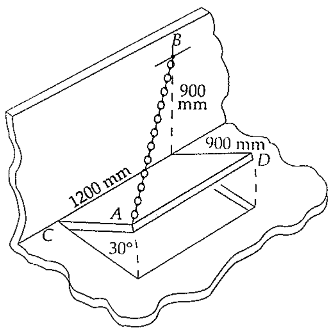


Figura problema **2.103**

2.104 La línea eléctrica se extiende desde el punto *A* del brazo del poste de tendido hasta el punto *B* del mismo plano horizontal. Debido a la comba del cable en el plano vertical, el mismo forma un ángulo de 15° con la horizontal en el punto de fijación *A*. Si en este punto la tensión del cable es de 800 N, escribir **T** en forma vectorial y hallar su proyección sobre el plano *x-z*.

Resp. $\mathbf{T} = 764\mathbf{i} + 114{,}6\mathbf{j} - 207\mathbf{k}$ N $\quad T_{xz} = 792$ N

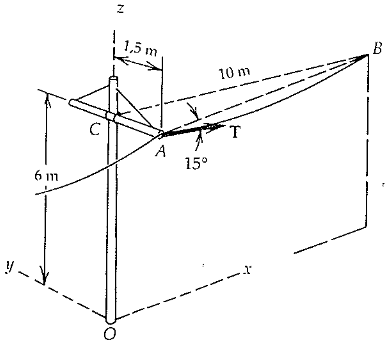


Figura problema **2.104**

2.8 MOMENTO Y PAR

En el apartado 2.4 se presentó la definición general, en términos vectoriales, de momento de una fuerza, si bien en los problemas planos suele ser más cómodo calcular los momentos mediante multiplicaciones escalares aplicando el concepto de brazo de momento. Ahora bien, en el espacio tridimensional la determinación de la distancia perpendicular entre un punto o una recta y la recta soporte de la fuerza puede constituir una tarea más que molesta. En tal caso, el planteo vectorial basado en el producto vectorial presenta una ventaja clara.

Momento. Consideremos una fuerza **F** con una recta soporte dada (fig. 2.21*a*) y un punto cualquiera *O* exterior a esa recta. El punto *O* y la recta soporte de **F** determinan un plano *A*. El momento $\mathbf{M}_o$ de **F** respecto a un eje normal al plano y que pase por *O* es $M_O = Fd$, donde *d* es la distancia del punto *O* a la recta soporte de **F**. A este momento se le llama momento de **F** respecto *al punto O*. Tanto el módulo como la dirección y sentido de $\mathbf{M}_o$ pueden describirse mediante la operación llamada *producto vectorial* descrita en el apartado 2.4. (Consúltese otra vez el punto 7 del apartado C.7 del apéndice C.) Sea **r** un vector que vaya desde *O* a un *punto cualquiera* de la recta soporte de **F**. Por definición, el producto vectorial de **r** por **F** se escribe en la forma **r** × **F** y su módulo es (r sen α)F, que es lo mismo que Fd, que es el módulo de $\mathbf{M}_O$. La dirección y sentido correctos del momento los establece la regla de la mano derecha, descrita ya en los apartados 2.4 y 2.5. Así, tratando **r** y **F** como vectores libres (fig. 2.21*b*), el pulgar señalará el sentido de $\mathbf{M}_O$ cuando los dedos de la mano derecha se curven indicando el sentido de rotación de **r** hacia **F** describiendo el ángulo α. Por tanto, el momento de **F** respecto al eje que pasa por *O* puede escribirse en la forma

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2.14}$$

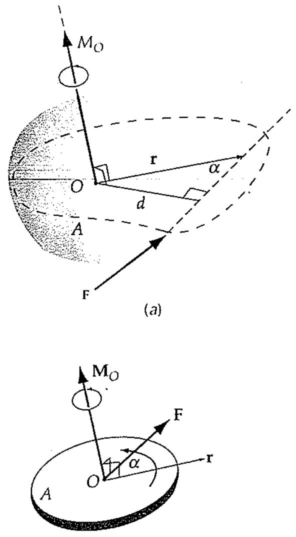
Es *obligatorio* mantener el orden de los vectores en **r** × **F**, ya que **F** × **r** daría un vector opuesto a $\mathbf{M}_O$, es decir $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = -\mathbf{M}_O$.

La expresión del producto vectorial en el caso de $\mathbf{M}_O$ puede ponerse en forma de determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

(Si el lector no está familiarizado con el producto vectorial, vuelva a consultar el punto 7 del apartado C.7 del apéndice C.) Obsérvese la simetría y el orden de los términos, debiendo ponerse sumo cuidado en asegurar el uso de un sistema de coordenadas *a derechas*, de lo cual depende el resultado correcto de las operaciones vectoriales. El desarrollo del determinante da

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} + (r_zF_x - r_xF_z)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}$$



(*a*)

(*b*)

Figura 2.21

Para ampliar nuestra seguridad en el manejo de la definición de producto vectorial, observemos las tres componentes del momento de una fuerza respecto a un punto, tal como se ven en la figura 2.22, donde se representa una fuerza **F** aplicada a un punto *A* cuyo vector de posición respecto a *O* es **r**. Los valores escalares de los momentos de dicha fuerza respecto a los semiejes positivos *x*, *y* y *z* que pasan por *O* se ve que son

$$M_x = r_yF_z - r_zF_y \qquad M_y = r_zF_x - r_xF_z \qquad M_z = r_xF_y - r_yF_x$$

que concuerdan con los términos respectivos del desarrollo del producto vectorial **r** × **F** en forma de determinante.

Podemos ahora escribir el momento $\mathbf{M}_\lambda$ de **F** respecto a *cualquier eje* λ que pase por *O* (fig. 2.23). Si **n** es un vector unitario en la dirección λ, utilizando la expresión del producto escalar para la componente de un vector descrita en el apartado 2.7, tendremos para la componente de $\mathbf{M}_O$ según λ, simplemente, $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{n}$, que es el módulo del momento $\mathbf{M}_\lambda$ de **F** respecto a λ. Para obtener la expresión vectorial del momento de **F** respecto a λ habrá que multiplicar el módulo por el vector unitario **n**, lo cual da

$$\mathbf{M}_\lambda = (\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, \mathbf{n} \tag{2.16}$$

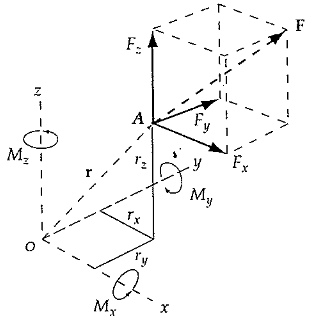


Figura problema **2.22**

donde se ha sustituido $\mathbf{M}_O$ por $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. La expresión $\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, conocida con el nombre de *producto mixto* (véase punto 8 del apartado C.7, apéndice C), no es necesario escribirla en la forma $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$, puesto que la asociación $\mathbf{r} \times (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})$ no tendría sentido, ya que no se puede formar un producto vectorial con un vector y un escalar. El producto mixto puede representarse mediante el determinante

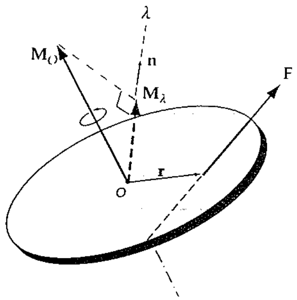


Figura 2.23

$$|M_\lambda| = M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

donde α, β y γ son los cosenos directores de $\mathbf{n}$. Ello puede comprobarse fácilmente efectuando las operaciones indicadas.

Teorema de Varignon. En el apartado 2.4 presentamos el teorema de Varignon en el plano. Su contenido es fácilmente ampliable a tres dimensiones. En la figura 2.24 se representa un sistema de fuerzas concurrentes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., la suma de cuyos momentos respecto a O es

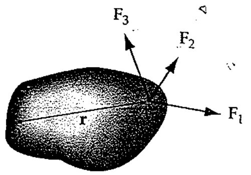


Figura 2.24

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}_1 + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_2 + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_3 + \ldots = \mathbf{r}\times(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots)$$
$$= \mathbf{r}\times\sum\mathbf{F}$$

donde se ha hecho uso de la propiedad distributiva del producto vectorial. Representando por $\mathbf{M}_O$ la suma de momentos que figura en el primer miembro de la igualdad anterior, tendremos

$$\mathbf{M}_O = \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = \mathbf{r}\times\mathbf{R} \tag{2.18}$$

Así pues, *la suma de los momentos de un sistema de fuerzas concurrentes respecto a un punto dado es igual al momento de su suma respecto al mismo punto.* Como se dijo en el apartado 2.4, este principio se aplica repetidamente en Mecánica, no sólo con relación a los momentos de las fuerzas sino también con relación a vectores de otra naturaleza.

Par. El concepto de par se introdujo en el apartado 2.5 y es fácilmente ampliable a tres dimensiones. En la figura 2.25 se representan dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ actuando sobre un cuerpo. El vector $\mathbf{r}$ une un punto *cualquiera* B de la recta soporte de $-\mathbf{F}$ con un punto *cualquiera* A de la recta soporte de $\mathbf{F}$. Las posiciones de los puntos A y B están especificadas por los correspondientes vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ respecto a un punto *cualquiera* O. El momento combinado de ambas fuerzas respecto a O es

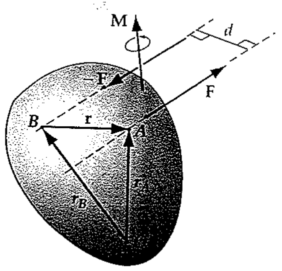


Figura 2.25

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A\times\mathbf{F} + \mathbf{r}_B\times(-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)\times\mathbf{F}$$

pero $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, con lo que desaparece toda referencia al polo O y el *momento del par* se hace

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{2.19}$$

O sea, el momento de un par *es igual respecto a todos los puntos*. Vemos que el módulo de $\mathbf{M}$ es $M = Fd$, donde d es la distancia entre las rectas soporte de las fuerzas, medida perpendicularmente a las mismas, tal como se describió en el apartado 2.5.

El momento de un par de fuerzas es un *vector libre*, mientras que el momento de una fuerza respecto a un punto (que es también el momento respecto a un punto definido que pase por el punto) es un eje sobre una recta soporte que pase por el punto. Como en el caso bidimensional, el efecto de un par es producir una rotación neta del cuerpo alrededor de un eje perpendicular al plano de las fuerzas que constituyen el par.

Dado que son vectores, los momentos de los pares obedecen a las reglas que rigen el comportamiento de tales magnitudes. Así, en la figura 2.26 el momento $\mathbf{M}_1$ del par $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ podemos sumarlo al momento $\mathbf{M}_2$ del par $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ para obtener el momento $\mathbf{M}$ debido, a su vez, al par $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$.

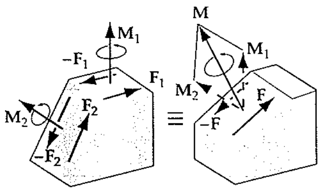


Figura 2.26

En el apartado 2.5 vimos cómo se sustituye una fuerza por un sistema fuerza-par equivalente. Esta sustitución debemos estar preparados para llevarla a cabo también en tres dimensiones. El procedimiento se ilustra en la figura 2.27, donde la fuerza $\mathbf{F}$, actuante en el punto A de un cuerpo rígido, se sustituye por una fuerza igual y un par $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ en B. Añadiendo en $\mathbf{B}$ las fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$, obtenemos el par formado por $-\mathbf{F}$ y la $\mathbf{F}$ original. Vemos así que el momento del par no es más que el momento de la fuerza original respecto al punto al cual se traslada. Obsérvese una vez más que $\mathbf{r}$ es un vector que va desde B hasta *cualquier* punto de la recta soporte de la fuerza original que pasa por A.

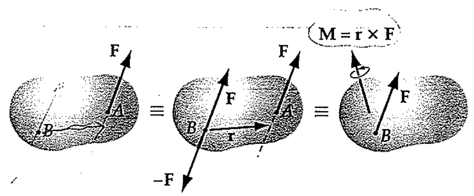
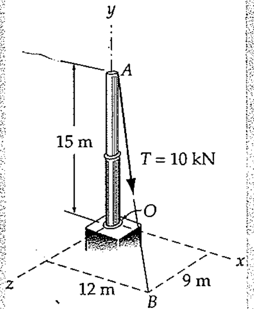


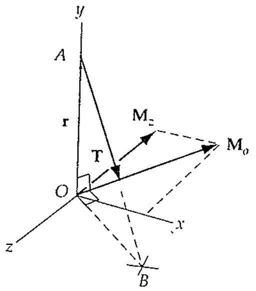
Figura 2.27

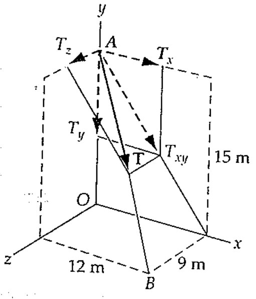
PROBLEMA TIPO 2.10

Se aplica una tensión T de intensidad 10 kN al cable amarrado al extremo superior A del mástil rígido y se fija en tierra en B. Hallar el momento M_z de T respecto al eje z que pasa por la base O del mástil.



① **También podríamos utilizar como vector r el que une *O* con *B* y obtener el mismo resultado; pero es más sencillo utilizar *OA*.**





② **Es siempre muy útil acompañar las operaciones de álgebra vectorial con un esquema de los vectores con el fin de mantener una idea clara de la geometría del problema.**

③ **Dibujar la proyección del problema en el plano *x*-*y* y representar *d*.**

Solución (a). El momento pedido puede obtenerse hallando la componente *x* del momento $\mathbf{M}_O$ de **T** respecto al punto *O*. El vector $\mathbf{M}_O$ es normal al plano definido por **T** y el punto *O*, según se muestra en la figura adjunta. Si empleamos la ecuación 2.14 para hallar $\mathbf{M}_O$, el vector **r** será cualquier vector que vaya desde el punto *O* hasta la recta soporte de **T**. ① Lo más sencillo es elegir el vector que va de *O* a *A*; o sea, $\mathbf{r} = 15\mathbf{j}$ m. La expresión vectorial de **T** es

$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AB} = 10\left[\frac{12\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{(12)^2 + (-15)^2 + (9)^2}}\right]$$
$$= 10(0{,}566\mathbf{i} - 0{,}707\mathbf{j} + 0{,}424\mathbf{k})\ \text{kN}$$

Según 2.14

$$[\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}] \qquad \mathbf{M}_O = 15\mathbf{j} \times 10(0{,}566\mathbf{i} - 0{,}707\mathbf{j} + 0{,}424\mathbf{k})$$
$$= 150(-0{,}566\mathbf{k} + 0{,}424\mathbf{i})\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

El módulo M_z del momento buscado es la componente de $\mathbf{M}_O$ en la dirección *z*, o sea, $M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k}$. Por tanto

$$M_z = 150(-0{,}566\mathbf{k} + 0{,}424\mathbf{i}) \cdot \mathbf{k} = -84{,}9\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

② El signo menos revela que el vector $\mathbf{M}_z$ está dirigido en el sentido negativo de *z*. Expresado vectorialmente, el momento es $\mathbf{M}_z = -84{,}9\mathbf{k}$ kN · m.

Solución (b). La fuerza de módulo *T* se descompone en T_z y T_{xy}, esta última en el plano *x*-*y*. Como T_z es paralela al eje *z*, no producirá momento respecto a ese eje. ③ El momento se deberá entonces únicamente a T_{xy} y valdrá $M_z = T_{xy}d$, donde *d* es la distancia perpendicular de T_{xy} a *O*. El coseno del ángulo que forman *T* y T_{xy} es $\sqrt{15^2 + 12^2}/\sqrt{15^2 + 12^2 + 9^2} = 0{,}906$ y, por tanto,

$$T_{xy} = 10(0{,}906) = 9{,}06\ \text{kN}$$

El brazo de momento *d* es igual a $\overline{OA}$ multiplicado por el seno del ángulo que forman T_{xy} y *OA*, es decir

$$d = 15\,\frac{12}{\sqrt{12^2 + 15^2}} = 9{,}37\ \text{m}$$

Luego el momento de **T** respecto al eje *z* es

$$M_z = 9{,}06(9{,}37) = 84{,}9\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \text{Resp.}$$

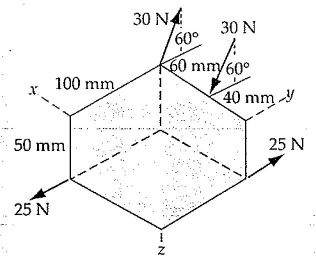
y es de sentido horario visto en el plano *x*-*y*.

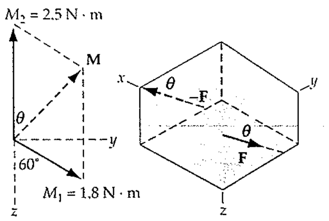
Solución (c). En este caso, la componente T_{xy} la descomponemos adicionalmente en sus componentes T_x y T_y. Es evidente que T_y no produce momento respecto al eje *z* puesto que pasa por él, por lo que el momento buscado lo produce únicamente T_x. El coseno director de **T** respecto al eje *x* es $12/\sqrt{9^2 + 12^2 + 15^2} = 0{,}566$, por lo que $T_x = 10(0{,}566) = 5{,}66$ kN. Es decir

$$M_z = 5{,}66(15) = 84{,}9\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 2.11

Hallar el módulo y la dirección del par M capaz de sustituir a los dos pares dados de tal forma que los efectos exteriores sobre los bloques sigan siendo los mismos. Especificar las dos fuerzas F y -F que aplicadas a las dos caras del bloque paralelas al plano x-y puedan sustituir a las cuatro fuerzas dadas. Las fuerzas de 30 N actúan paralelamente al plano y-z.





Solución. El módulo del par debido a las fuerzas de 30 N es $M_1 = 30(0{,}06) = 1{,}80$ N · m, su dirección es perpendicular al plano definido por ambas fuerzas y su sentido, indicado en la figura, es el establecido por la regla de la mano derecha. El par producido por las fuerzas de 25 N tiene un módulo $M_2 = 25(0{,}10) = 2{,}5$ N · m, con la dirección y el sentido indicados en la misma figura. La combinación de ambos vectores momento tiene las componentes

$$M_y = 1{,}80\ \text{sen}\ 60° = 1{,}559\ \text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_z = -2{,}50 + 1{,}80\cos 60° = -1{,}600\ \text{N} \cdot \text{m}$$

① Así pues, $\quad M = \sqrt{(1{,}559)^2 + (-1{,}600)^2} = 2{,}23\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad$ *Resp.*

con $\quad \theta = \text{arctg}\,\dfrac{1{,}559}{1{,}600} = \text{arctg}\ 0{,}974 = 44{,}3° \qquad$ *Resp.*

Las fuerzas **F** y –**F** yacen en un plano normal al par **M** y su brazo de momento visto como en la figura derecha es 100 mm. Por tanto, el módulo de cada fuerza es

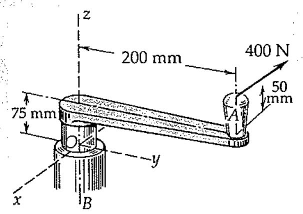
$$[M = Fd] \qquad F = \frac{2{,}23}{0{,}10} = 22{,}3\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

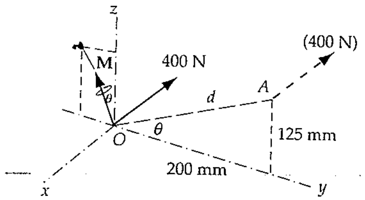
y su dirección $\theta = 44{,}3°$.

① **Téngase presente que el momento de un par de fuerzas es un *vector libre* y por lo tanto carece de recta soporte única.**

PROBLEMA TIPO 2.12

Se aplica una fuerza de 400 N al punto A de la palanca de mando unida al eje fijo OB. Para determinar el efecto de la fuerza sobre el eje en una sección transversal tal como O, podemos sustituir la fuerza por otra equivalente que pase por O y un par. Especificar dicho par en forma de un vector M.





Solución. Vectorialmente, el par puede expresarse como **M** = **r** × **F**, donde **r** = $\overrightarrow{OA}$ = 0,2**j** + 0,125**k** m y **F** = −400**i** N. Entonces

$$\mathbf{M} = (0{,}2\mathbf{j} + 0{,}125\mathbf{k}) \times (-400\mathbf{i}) = -50\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\ \mathrm{N \cdot m}$$

Vemos, por otra parte, que para desplazar la fuerza de 400 N una distancia $d = \sqrt{(0{,}125)^2 + (0{,}2)^2} = 0{,}236$ m hasta una posición paralela que pase por *O* se requiere sumar un par **M** cuyo módulo sea

$$M = Fd = 400(0{,}236) = 94{,}3\ \mathrm{N \cdot m} \qquad \textit{Resp.}$$

Este vector es perpendicular al plano a través del cual se traslada **F** y su sentido es el del momento de la fuerza da respecto a *O*. La dirección de **M** dentro del plano *y*-*z* viene dada por

$$\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{125}{200} = 32{,}0° \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.105 Hallar el momento de la fuerza **F** respecto al punto *O*.
Resp. $\mathbf{M}_O = F(-c\,\mathbf{i} + a\mathbf{k})$

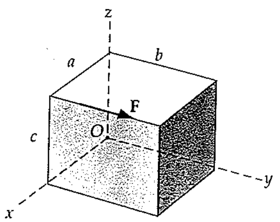


Figura problema 2.105

2.106 Calcular el momento de la fuerza **P** respecto al punto *A* (a) mediante el producto vectorial y (b) descomponiéndola en componentes y determinando los momentos de éstas.

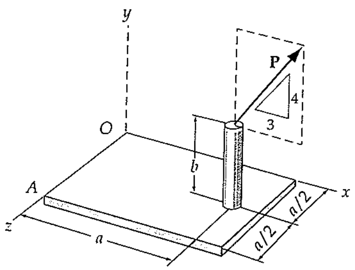


Figura problema 2.106

2.107 Tratando de derribar una rama casi aserrada, el podador tira con una fuerza de 400 N de la cuerda enlazada en *A* a la rama. Hallar el momento respecto al punto *C* de la fuerza que se ejerce sobre la rama y consignar el módulo de ese momento.

Resp. $\mathbf{M}_C = -2180\mathbf{i} + 655\mathbf{j} - 1309\mathbf{k}\ \mathrm{N \cdot m}$,
$M_C = 2630\ \mathrm{N \cdot m}$

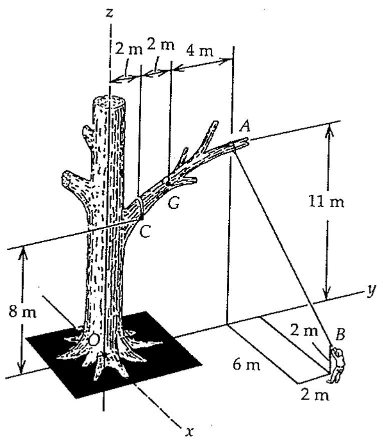


Figura problema 2.107

2.108 Se repite aquí la figura del problema 2.99. Calcular el momento respecto al eje *z* de la fuerza **P** de 32 N. Téngase en cuenta que la fuerza **P** y la normal *n* al frente de la puerta yacen en un plano vertical.

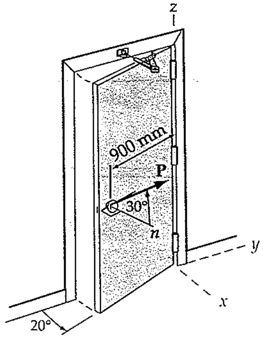


Figura problema 2.108

2.109 Las dos fuerzas que actúan sobre los mangos de las llaves para tubos constituyen un par **M**. Expresar éste en forma de vector.

Resp. **M** = −75**i** + 22,5**j** N · m

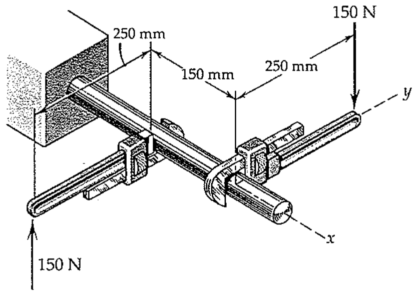


Figura problema 2.109

Problemas representativos

2.110 Una viga H actúa como columna soportando las dos cargas verticales representadas. Sustituir estas fuerzas por una fuerza equivalente única aplicada en la línea central de la columna y un par de momento **M**.

2.111 Calcular el momento M_O de la fuerza de 1,2 kN respecto al eje *O*-*O*.

Resp. $M_O = 348\ \mathrm{N \cdot m}$

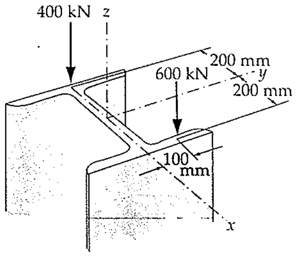


Figura problema 2.110

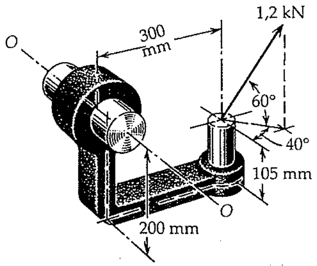


Figura problema 2.111

2.112 Se repite aquí la figura del problema 2.96 donde la tensión del cable sigue siendo de 2,4 kN. Hallar el momento respecto a *O* de la fuerza que actúa sobre el brazo *DA*. Asimismo, por inspección explicar por qué es cero el momento de esa fuerza respecto a la recta definida por los puntos *D* y *C*.

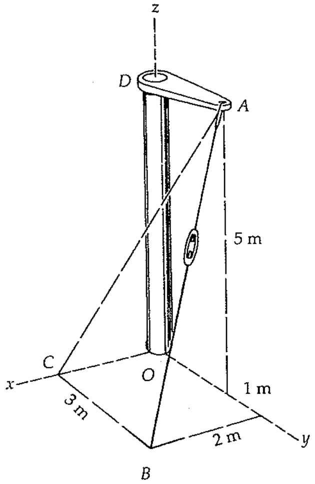


Figura problema 2.112

2.113 En la figura se representa el disparo simultáneo de dos cohetes de maniobra de un satélite de 4 N de empuje cada uno. Calcular el momento del par de fuerzas y sugerir en torno a qué ejes del satélite puede haber rotaciones.

Resp. $\mathbf{M} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ N · m

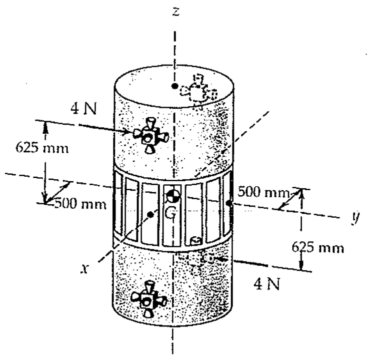


Figura problema 2.113

2.114 El perno resiste el momento de giro respecto a su eje *O-O* ejercido por la fuerza de 400 N que actúa sobre el soporte acodado. Hallar ese momento M_O.

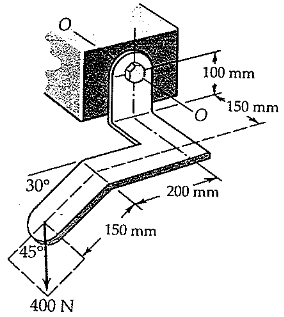


Figura problema 2.114

2.115 Un transbordador orbital está sometido a los empujes de cinco de los motores de su sistema de gobierno a reacción. En la figura se muestran cuatro de los empujes; el quinto es de 850 N y actúa hacia arriba en la parte trasera derecha, simétricamente al de 850 N que se muestra en la parte trasera izquierda. Calcular el momento de todas esas fuerzas respecto al punto *G* y comprobar que es el mismo respecto a todos los puntos.

Resp. $\mathbf{M} = 3400\mathbf{i} - 51\,000\mathbf{j} - 51\,000\mathbf{k}$ N · m

2.116 Se repite aquí la figura del problema 2.95, donde la fuerza **F** sigue teniendo un módulo de 10 kN y las coordenadas de *A* y *B* se dan en metros. Expresar vectorialmente el momento de F respecto al eje *x*.

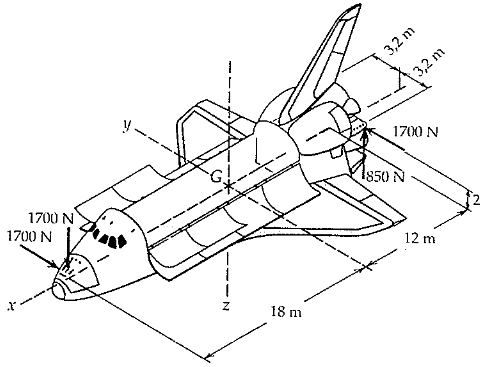


Figura problema 2.115

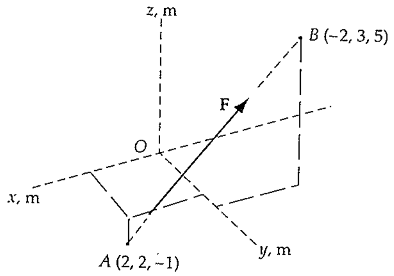


Figura problema 2.116

2.117 Al ala de la viga en doble T se suelda un soporte en ángulo recto cuya misión es soportar la fuerza de 36 kN, paralela al eje de la viga, y la fuerza de 20 kN, situada en el plano frontal de la viga. Para estudiar la aptitud de ésta para soportar las fuerzas aplicadas resulta cómodo sustituir éstas por un sistema fuerza-par en *O*. Hallar las componentes *x*, *y* y *z* del momento **M** del par.

Resp. $\mathbf{M} = 12.6\mathbf{i} - 3.6\mathbf{j} + 5.06\mathbf{k}$ kN · m

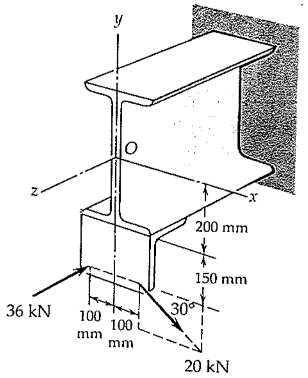


Figura problema 2.117

2.118 Al recoger una carga desde la posición *A*, en el cable se desarrolla una tensión **T** de 21 kN. Hallar el momento de ésta respecto a la base *O* de la grúa.

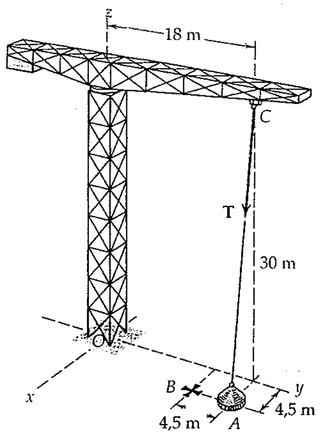


Figura problema 2.118

2.119 Hallar la expresión vectorial del momento **M** respecto al punto *O* de la fuerza de 500 N. Hallar también el módulo del momento respecto al eje *x* que pasa por el perno *O*.

Resp. $M_O = 18{,}30\mathbf{i} + 7{,}92\mathbf{j} + 59{,}2\mathbf{k}$ N · m

$M_x = 18{,}30$ N · m

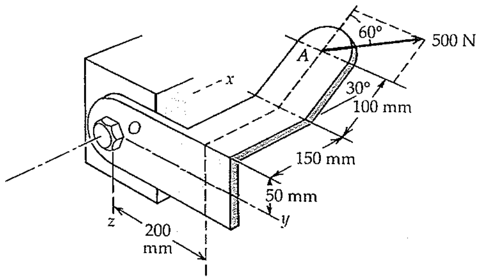


Figura problema 2.119

2.120 Se repite aquí la figura del problema 2.104, donde el cable sigue ejerciendo una tracción de 800 N en el punto *A* del brazo del poste de tendido. Tal como se dijo, a causa de la comba del cable en el plano vertical, aquél forma en *A* un ángulo de 15° con el plano horizontal. Hallar los momentos de T respecto a la base *O* y al eje *z* del poste.

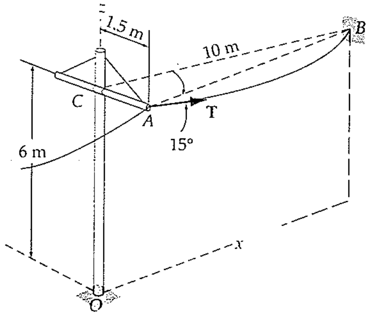


Figura problema 2.120

2.121 Se repite aquí la figura del problema 2.93, donde la tensión del cable *AB* sigue siendo de 1,8 kN. Si la resultante de las tensiones de los tres cables de sujeción pasa por la base *O*, hallar las tensiones de *CD* y *CE*.

Resp. $T_{CD} = 1{,}698$ kN $T_{CE} = 1{,}006$ kN

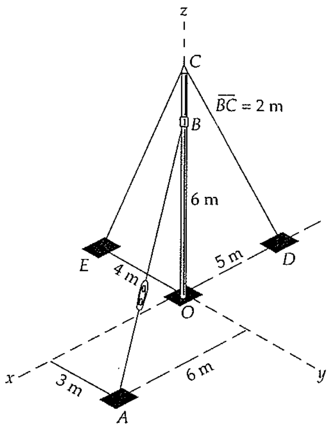


Figura problema 2.121

2.122 La fresa especial está sometida a la fuerza de 1200 N y al par de 240 N · m que se muestran. Hallar el momento de este sistema respecto al punto *O*.

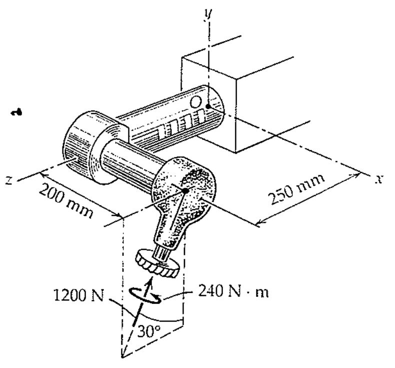


Figura problema 2.122

2.123 Se repite aquí la figura del problema 2.102. Si el módulo del momento de **F** respecto a la recta *CD* es de 50 N · m hallar el módulo de F.

Resp. $F = 228$ N

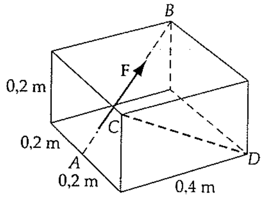


Figura problema 2.123

2.124 El peso de la lámpara de sobremesa de 0,8 kg actúa en el punto *G*. Hallar el sistema fuerza-par equivalente a ese peso en el punto *O*. Hallar los momentos del peso respecto a los ejes *x* e *y* que pasan por el punto *O* y explicar el significado físico de esos momentos

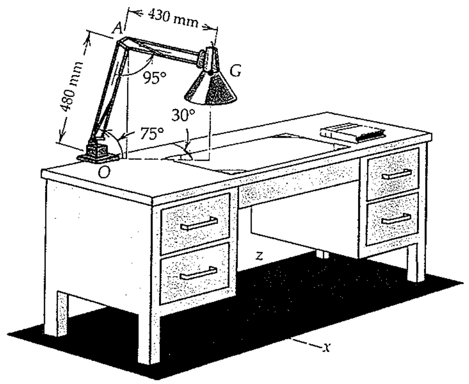


Figura problema 2.124

2.125 Cuando la manivela *BC* está horizontal, al pomo del abre ventanas mecánico se aplica una fuerza vertical de 5 N. Hallar el momento de ésta respecto al punto *A* y a la recta *AB*.

Resp. $\mathbf{M}_A = -375\mathbf{i} + 325\mathbf{j}$ N · mm

$\mathbf{M}_{AB} = -281\mathbf{i} - 162{,}4\mathbf{k}$ N · mm

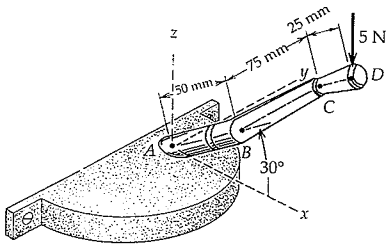


Figura problema 2.125

2.126 La fuerza **P** de 300 N está aplicada perpendicularmente al mango de la llave de estrella y forma un ángulo de 5° con la dirección *x′* (paralela al eje *x*). (Obsérvese que el plano que contiene al ángulo de 5° *no* es vertical.) Sustituir **P** por un sistema fuerza-par en el punto *O*.

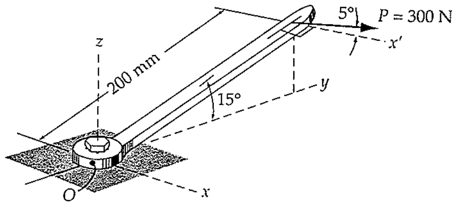


Figura problema 2.126

2.127 A partir de la posición representada, en que el eje del brazo de la lámpara está vertical, el portalámpara se rota a la posición $\theta = 30°$ y $\phi = 40°$, donde θ es una rotación en *C* en torno al eje horizontal *y* y ϕ es una rotación en torno al ya inclinado eje del pasador *O* (originalmente coincidente con el eje *x*). Todo el conjunto tiene un peso de 15 N aplicado en *G*. Hallar el momento del peso respecto al punto *A* para la posición especificada.

Resp. $\mathbf{M}_A = -1900\mathbf{i} + 462\mathbf{j}$ N · mm

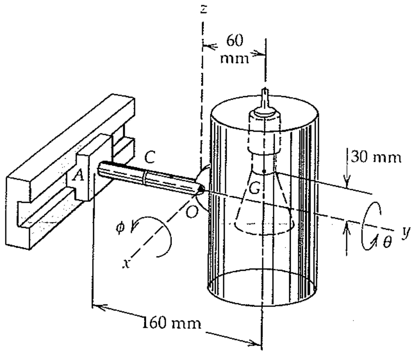


Figura problema 2.127

2.128 La terraja se rosca en el extremo del tubo inmovilizado que está acodado 20°. Sustituir ambas fuerzas por un sistema fuerza-par equivalente en *O*. Hallar el momento **M** del par y el módulo *M′* del momento que tiende a roscar el tubo hacia el interior del bloque fijo alrededor de su eje acodado que pasa por *O*.

Resp. $\mathbf{M} = 17{,}05\mathbf{i} - 84{,}9\mathbf{k}$ N · m $\qquad M' = 85{,}6$ N · m

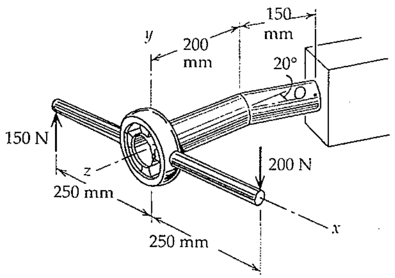
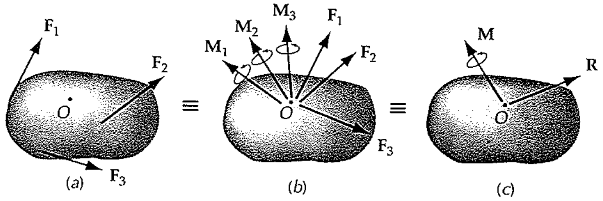


Figura problema 2.128

2.9 RESULTANTES

En el apartado 2.6 se definió la resultante como la combinación de fuerzas más sencilla que puede sustituir a un sistema de fuerzas dado sin alterar los efectos exteriores producidos sobre el cuerpo rígido al cual estén aplicadas esas fuerzas. En el caso de los sistemas de fuerzas planos, el módulo y la dirección de la fuerza resultante se determinaron sumando vectorialmente las fuerzas (ecs. 2.9) y la recta soporte de la misma se determinó aplicando el principio de los momentos (ec. 2.10).

En el apartado precedente hemos visto que toda fuerza puede ser trasladada a una posición paralela sin más que añadir el correspondiente par de fuerzas. Así, en el caso del sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots$, representado en la figura 2.28*a*, que actúa sobre un cuerpo rígido, podemos trasladar sucesivamente cada una de dichas fuerzas al punto arbitrario *O*, con tal que también introduzcamos un par de fuerzas por cada fuerza trasladada. Así, por ejemplo, la fuerza $\mathbf{F}_1$ la podemos trasladar al punto *O* a condición de que introduzcamos un par de fuerzas de momento $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$, donde $\mathbf{r}_1$ es un vector que une *O* con cual-



(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 2.28

quier punto de la recta soporte de $\mathbf{F}_1$. Una vez que todas las fuerzas hayan sido llevadas a O de la manera indicada, tendremos en este punto un sistema de fuerzas concurrentes y un sistema de pares representados por vectores momento, tal como se representa en la parte *b* de la figura. Las fuerzas concurrentes se pueden entonces sumar vectorialmente, dando una fuerza resultante **R** y también pueden sumarse los pares dando un par resultante de momento **M** (fig. 2.28*c*). El sistema general de fuerzas se reduce entonces a

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots = \Sigma\mathbf{F} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \ldots = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Los vectores momento se han representado todos en O, pero como son vectores libres, podrán representarse paralelamente en cualquier otra posición. Los módulos de las resultantes y de sus componentes son

$$\begin{gathered} R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R = \Sigma F_z \\ R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2} \\ \mathbf{M}_x = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_x \qquad \mathbf{M}_y = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_y \qquad \mathbf{M}_z = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_z \\ M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \end{gathered} \tag{2.21}$$

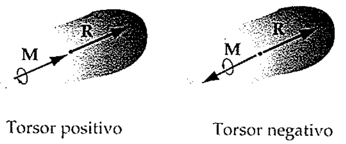
El punto O de concurrencia de las fuerzas se ha elegido arbitrariamente y el módulo, dirección y sentido de **M** dependerá del punto O elegido. En cambio, el módulo, dirección y sentido de **R** serán siempre los mismos cualquiera que sea el punto elegido. En general, todo sistema de fuerzas puede sustituirse por su resultante **R** y el par resultante de momento **M**. En Dinámica suele tomarse el centro de masa como punto de referencia y la variación del movimiento lineal del cuerpo la determina la fuerza resultante, mientras que la variación del movimiento de giro la determina el par resultante. En Estática se especifica que un cuerpo está en equilibrio cuando la fuerza resultante **R** y el par resultante **M** son ambos cero. Por tanto, la determinación de resultantes es esencial tanto en Estática como en Dinámica.

A continuación, se reseñan las resultantes de algunos sistemas de fuerzas particulares.

Fuerzas concurrentes. Cuando las fuerzas son concurrentes en un punto, sólo hace falta emplear la primera de las ecuaciones 2.20, ya que el momento es nulo en el punto de concurrencia.

Fuerzas paralelas. Para un sistema de fuerzas paralelas no coplanarias, el módulo de la resultante **R**, paralela a las anteriores, es sencillamente la suma algebraica de las fuerzas dadas. La posición de su recta soporte se obtiene del principio de los momentos imponiendo que $\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$. En este caso, **r** es un vector de posición que va desde el punto O, tomado como polo de reducción del sistema dado a un sistema fuerza-par, hasta la recta soporte final de **R** y $\mathbf{M}_O$ es la suma de los momentos de cada una de las fuerzas. En el problema tipo 2.14 se expone un caso de sistema de fuerzas paralelas.

Fuerzas coplanarias. El apartado 2.6 fue dedicado a este tipo de sistemas de fuerzas paralelas.



Torsor positivo Torsor negativo

Figura 2.29

Torsor. Cuando el par resultante **M** y la fuerza resultante **R** son paralelos, como es el caso en la figura 2.29, se dice que la resultante es un *torsor*. Por definición, un *torsor* es positivo si ambos vectores, fuerza y par, apuntan en el mismo sentido y es negativo en caso contrario. Un ejemplo corriente de torsor positivo lo tenemos en el destornillador.

Cualquier sistema general de fuerzas puede representarse mediante un torsor aplicado a lo largo de una recta soporte única. Esta reducción se ilustra en la figura 2.30*a*, en cuya parte *a* se representa la resultante **R** y el par resultante **M** de un sistema general aplicados en un punto cualquiera O. Aunque **M** sea un vector libre, por comodidad lo colocamos en O. En la parte *b* de la figura, **M** aparece descompuesto en una componente $\mathbf{M}_1$ paralela a **R** y una componente $\mathbf{M}_2$ normal a **R**. En la parte *c* de la figura, el par $\mathbf{M}_2$ está sustituido por dos fuerzas **R** y $-\mathbf{R}$ separadas una distancia $d = M_2/R$ con $-\mathbf{R}$ aplicada en O para que contrarreste a la **R** original. Con este paso, tal como se muestra en la parte *b* de la figura, nos queda la resultante **R**, actuante a lo largo de una única recta soporte, y el par $\mathbf{M}_1$ paralelo a la anterior, que es un vector libre. Es decir, las resultantes del sistema general original lo hemos transformado en un torsor (positivo en este caso) con su eje único definido por la nueva posición de **R**. El torsor constituye la expresión más sencilla de la resultante de un sistema general de fuerzas. Sin embargo, esta manera de expresar la resultante es de utilidad limitada, ya que suele ser más cómodo emplear como punto de referencia algún otro punto O, como el centro de masa u otro origen de coordenadas más conveniente no situado en el eje del torsor.

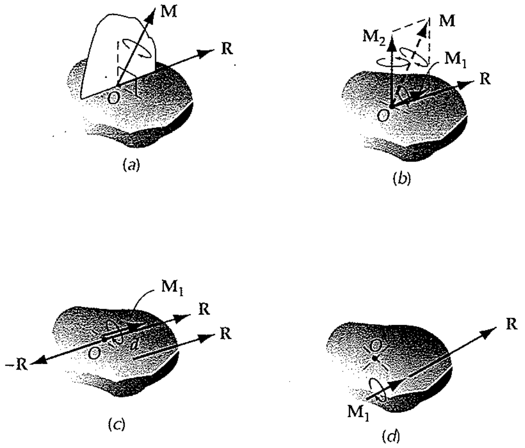
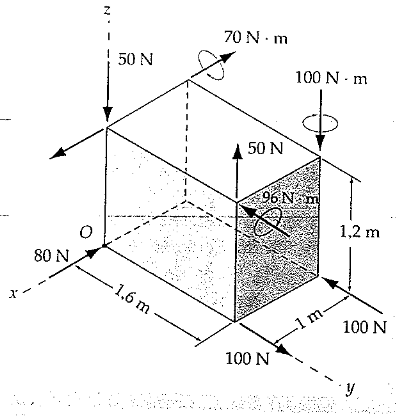


Figura 2.30

PROBLEMA TIPO 2.13



Hallar la resultante del sistema de fuerzas y pares actuantes sobre el paralelepípedo.

① **Como la suma de las fuerzas es nula, podemos concluir que la resultante, si hay, será un par de fuerzas.**

② **Los momentos asociados a las parejas de fuerzas se obtienen fácilmente con la fórmula $M = Fd$ y el sentido se les asigna por inspección. En muchos problemas tridimensionales, ello puede ser más sencillo que el planteo vectorial $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$**

Solución. Para la operación inicial de reducir las fuerzas dadas a un sistema fuerza par tomamos el punto *O* como centro de momentos. La fuerza resultante ① es

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = (80-80)\mathbf{i} + (100-100)\mathbf{j} + (50-50)\mathbf{k} = \mathbf{0}\ \text{N}$$

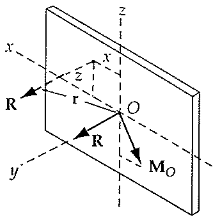
La suma de los momentos respecto a *O* es ②

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= [50(1{,}6)-70]\mathbf{i} + [80(1{,}2)-96]\mathbf{j} + [100(1)-100]\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}\\ &= 10\mathbf{i}\ \text{N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

O sea, la resultante se compone sólo de un par, que ya sabemos que puede aplicarse a cualquier punto del cuerpo o prolongación de ésto

Solución. Al trasladar todas las fuerzas al punto *O* resulta el sistema fuerza-par

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} = (200 + 500 - 300 - 50)\mathbf{j} = 350\mathbf{j}\ \text{N}\\ \mathbf{M}_O &= [50(0{,}35) - 300(0{,}35)]\mathbf{i} + [-50(0{,}50) - 200(0{,}50)]\mathbf{k}\\ &= -87{,}5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$



La ubicación de **R** para que ella sola equivalga al sistema fuerza-par anterior la determinamos valiéndonos del principio de los momentos en forma vectorial

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\times\mathbf{R} &= \mathbf{M}_O\\ (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\times 350\mathbf{j} &= -87{,}5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}\\ 350x\mathbf{k} - 350z\mathbf{i} &= -87{,}5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}\end{aligned}$$

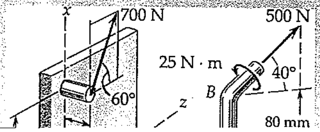
De esta ecuación vectorial obtenemos las dos ecuaciones escalares

$$350x = -125 \qquad \text{y} \qquad -350z = -87{,}5$$

Por tanto, $x = -0{,}357$ m y $z = 0{,}250$ m son las coordenadas en el origen de la recta soporte de **R**. En virtud del principio de transmisibilidad el valor de *y* puede ser, ① desde luego, cualquiera. Es decir, como se esperaba, la variable *y* desaparece en el anterior cálculo con vectores.

① **Se recomienda repetir este problema con cálculos escalares.**

PROBLEMA TIPO 2.15



① ***Sugerencia.*** **Comprobar los productos vectoriales calculando directamente por el dibujo los momentos respecto a *A* de las componentes de la fuerza de 500 N.**

② **Para las fuerzas de 600 y 700 N es más fácil obtener las componentes de sus momentos respecto a los ejes paralelos a las direcciones de las coordenadas que pasan por *A* mediante inspección de la figura que plantear los productos vectoriales.**

③ **El momento del par de 25 N · m del *torsor* tiene un sentido contrario al de la fuerza de 500 N y hemos de descomponerlo en sus componentes *x*, *y* y *z* para sumarlas a las otras componentes de los momentos.**

④ **Aunque el momento resultante M se presenta en la figura aplicado al punto *A*, hay que reconocer que el momento de un par de fuerzas está representado por un vector libre y, por tanto, carece de recta soporte.**

El par que hay que añadir a consecuencia del traslado de la fuerza de 500 N es

① $$[\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}] \qquad \mathbf{M}_{500} = (0{,}08\mathbf{i} + 0{,}12\mathbf{j} + 0{,}05\mathbf{k}) \times 500(\ \mathbf{i}\ \text{sen}\ 40^\circ + \mathbf{j}\ \cos 40^\circ \cos 45^\circ + \mathbf{k}\ \cos 40^\circ\ \text{sen}\ 45^\circ\ )$$

donde **r** es el vector que va de *A* a *B*.
El desarrollo término a término, o el determinante, da

$$\mathbf{M}_{500} = 18{,}95\mathbf{i} - 5{,}59\mathbf{j} - 16{,}90\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

② El momento respecto a *A* de la fuerza de 600 N se escribe por inspección de sus componentes *x* y *z*, dando

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{600} &= (600)(0{,}060)\mathbf{i} + (600)(0{,}040)\mathbf{k}\\ &= 36{,}0\mathbf{i} + 24{,}0\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

El momento respecto a *A* de la fuerza de 700 N se obtiene fácilmente a partir de los momentos de las componentes *x* y *z* de la fuerza. Resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{700} &= (700 \cos 60^\circ)(0{,}030)\mathbf{i} - [(700\ \text{sen}\ 60^\circ)(0{,}060)\\ &\quad + (700 \cos 60^\circ)(0{,}100)]\mathbf{j} - (700\ \text{sen}\ 60^\circ)(0{,}030)\mathbf{k}\\ &= 10{,}5\mathbf{i} - 71{,}4\mathbf{j} - 18{,}19\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

③ Además, el par del torsor dado puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{M}' &= 25{,}0(-\ \mathbf{i}\ \text{sen}\ 40^\circ - \mathbf{j}\ \cos 40^\circ \cos 45^\circ - \mathbf{k}\ \cos 40^\circ\ \text{sen}\ 45^\circ)\\ &= -16.07\mathbf{i} - 13{,}54\mathbf{j} - 13{,}54\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

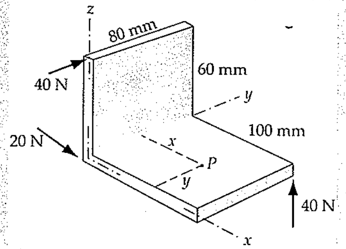
Por tanto, el par resultante al sumar los términos en **i**, **j** y **k** de los cuatro **M** es

④ $$\mathbf{M} = 49{,}4\mathbf{i} - 90{,}5\mathbf{j} - 24{,}6\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

y $$M = \sqrt{(49{,}4)^2 + (90{,}5)^2 + (24{,}6)^2} = 106{,}0\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad \text{Resp}$$

PROBLEMA TIPO 2.16

Hallar el torsor resultante de las tres fuerzas que actúan sobre el soporte. Calcular las coordenadas del punto P del plano x-y por el que pasa la fuerza resultante del torsor. Hallar también el módulo del par M del torsor.

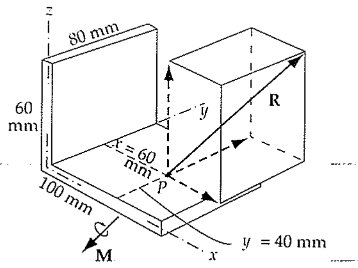


Solución. Los cosenos directores del par **M** del torsor deben ser iguales a los de ① la fuerza resultante **R**, suponiendo que el torsor sea positivo. La fuerza resultante es

$$\mathbf{R} = 20\mathbf{i} + 40\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\ \text{N} \qquad R = \sqrt{(20)^2 + (40)^2 + (40)^2} = 60\ \text{N}$$

y sus cosenos directores son

$$\cos\theta_x = 20/60 = 1/3 \qquad \cos\theta_y = 40/60 = 2/3 \qquad \cos\theta_z = 40/60 = 2/3$$



① **Suponemos inicialmente que el torsor es positivo. Si M resulta negativo, es que el sentido del par es el opuesto al de la fuerza resultante.**

El momento del par del torsor debe ser igual a la suma de los momentos de las fuerzas dadas respecto al punto *P* por el que pasa la recta soporte de **R**. Los momentos respecto a *P* de las tres fuerzas son

$$\begin{aligned}(\mathbf{M})_{R_x} &= 20y\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{mm}\\ (\mathbf{M})_{R_y} &= -\ 40(60)\mathbf{i} - 40x\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{mm}\\ (\mathbf{M})_{R_z} &= 40(80 - y)\mathbf{i} - 40(100 - x)\mathbf{j}\ \text{N} \cdot \text{mm}\end{aligned}$$

y el momento total es

$$\mathbf{M} = (800 - 40y)\mathbf{i} + (-4000 + 40x)\mathbf{j} + (-40x + 20y)\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{mm}$$

Los cosenos directores de **M** son

$$\begin{aligned}\cos\theta_x &= (800 - 40y)/M\\ \cos\theta_x &= (-\ 4000 + 40x)/M\\ \cos\theta_x &= (-\ 40x + 20y)/M\end{aligned}$$

donde *M* es el módulo de **M**. Al igualar los cosenos directores de **R** y **M** resulta

$$\begin{aligned}800 - 40y &= \frac{M}{3}\\ -\ 4000 + 40x &= \frac{2M}{3}\\ -\ 40x + 20y &= \frac{2M}{3}\end{aligned}$$

Resolviendo las tres ecuaciones tenemos

$$M = -2400\ \text{N} \cdot \text{mm} \qquad x = 60\ \text{mm} \qquad y = 40\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

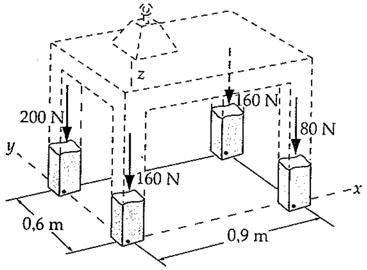
Vemos que *M* resulta ser negativo, lo que significa que el momento del par es un vector de sentido opuesto a **R** y el torsor es negativo.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.129 Una mesa ejerce las cuatro fuerzas que se indican sobre la superficie del suelo. Reducir ese sistema a un sistema fuerza-par en el punto *O*. Demostrar que **R** es perpendicular a $\mathbf{M}_O$.

Resp. $\mathbf{R} = -600\mathbf{k}$ N $\quad \mathbf{M}_O = -216\mathbf{i} + 216\mathbf{j}$ N · m



z
200 N
160 N
80 N
160 N
y
x
0,6 m
0,9 m

Figura problema 2.129

2.130 Una pelota de base-ball se lanza con un efecto tal que sobre ella actúan las tres fuerzas representadas en la figura. El peso *W* es de 1,4 N, la resistencia del aire *D* es de 0,45 N y la sustentación *L* es perpendicular a la velocidad **v** de la pelota. Sabiendo que las componentes *y* y *z* de la resultante son, respectivamente, −1,5 N y −0,24 N, hallar *L*, *θ* y *R*.

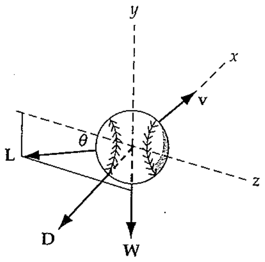
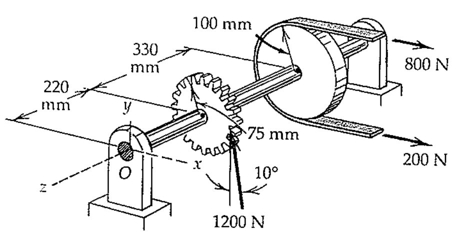


Figura 2.130

2.131 La polea y el engranaje están sometidos a las cargas que se indican. Para estas fuerzas, determinar el sistema fuerza-par equivalente en el punto *O*.

Resp. $\mathbf{R} = 792\mathbf{i} + 1182\mathbf{j}$

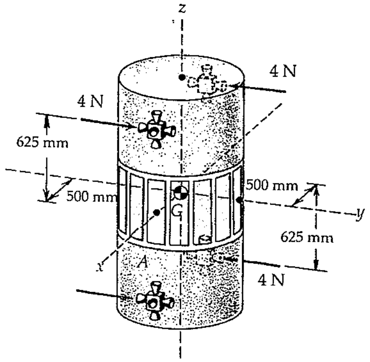
$\mathbf{M}_O = 260\mathbf{i} - 504\mathbf{j} + 28{,}6\mathbf{k}$ N · m



100 mm
330 mm
220 mm
y
800 N
75 mm
200 N
O
x
10°
z
1200 N

Figura problema 2.131

2.132 Se representa otra vez la nave espacial del problema 2.113. Se pretende disparar los cuatro cohetes de maniobra de 4 N, tal como se muestra, con el propósito de que el ingenio gire más deprisa en torno a su eje *z*, pero falla el cohete *A*. Determinar el sistema fuerza-par equivalente en *G* a los tres cohetes restantes.



z
4 N
4 N
625 mm
500 mm
500 mm
G
y
625 mm
x
A
4 N

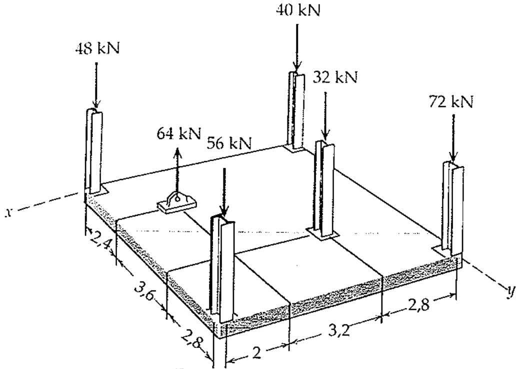
Figura problema 2.132

2.133 La losa de hormigón soporta las seis fuerzas verticales representadas. Hallar las coordenadas *x* e *y* del punto de la losa por el que pasa la recta soporte de la resultante.

Resp. $x = 2{,}92$ m $\quad y = 6{,}33$ m

Problemas representativos

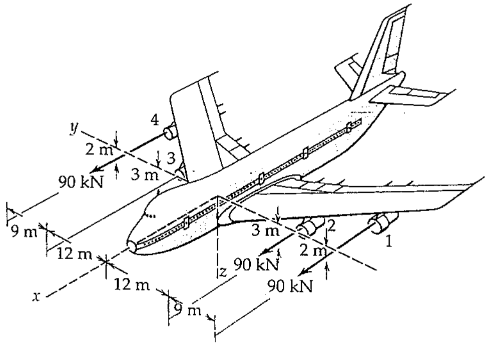
2.134 En la figura vuelve a representarse el avión de pasajeros del problema 2.69 con información adicional en tres dimensiones. Si el motor 3 falla repentinamente, determinar la resultante de los empujes de los otros tres, de una intensidad de 90 kN cada uno. Especificar las coordenadas *y* y *z* del punto por el que pasa la recta soporte de la resultante.



40 kN
48 kN
32 kN
72 kN
64 kN
56 kN
x
y
2,4
3,6
2,8
2
3,2
2,8

Dimensiones en metros

Figura problema 2.133



y
4
2 m
3
90 kN
3 m
9 m
12 m
x
12 m
3 m
2
z
90 kN
2 m
1
90 kN
9 m

Figura problema 2.134

2.135 Determinar el ángulo *θ* para que la fuerza neta vertical aplicada al cáncamo fijo sea de 750 N. Determinar la intensidad de la correspondiente fuerza resultante y sus cosenos directores.

Resp. $R = 1021$ N $\quad \cos\theta_x = 0{,}525$

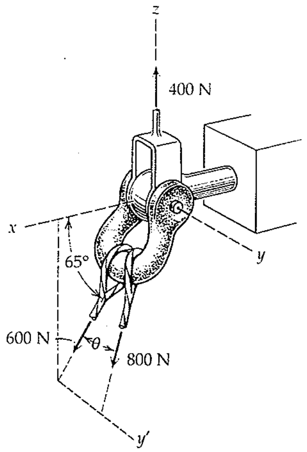
$\cos\theta_y = 0{,}430 \quad \cos\theta_z = -0{,}734$

2.136 Sustituir las dos fuerzas y el par único por un sistema fuerza-par equivalente en el punto *A*.

2.137 Sobre la pequeña armadura espacial actúan las dos fuerzas ascendentes indicadas. Reducir éstas a sólo un sistema fuerza-par en el punto *O*. Demostrar que **R** es perpendicular a $\mathbf{M}_O$. Determinar después el punto del plano *x-z* por el que pasa la resultante.

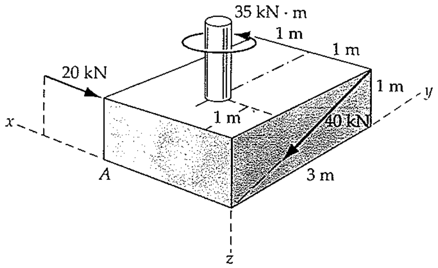
Resp. $\mathbf{R} = 2400\mathbf{j}$ N $\quad \mathbf{M}_O = 1440\mathbf{i} + 5760\mathbf{k}$ N · m

$x = 2{,}4$ m $\quad y = -0{,}6$ m



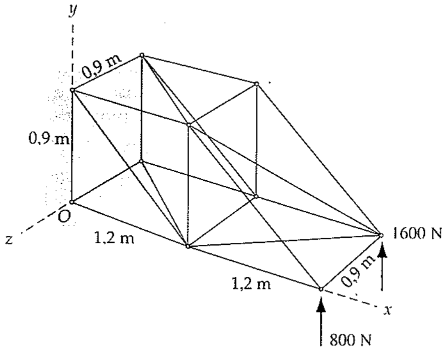
z
400 N
x
y
65°
600 N
θ
800 N
y'

Figura problema 2.135



35 kN · m
1 m
1 m
20 kN
1 m
y
x
1 m
40 kN
A
3 m
z

Figura problema 2.136



y
0,9 m
0,9 m
O
z
1,2 m
1600 N
1,2 m
0,9 m
x
800 N

Figura problema 2.137

2.138 Representar la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre el conjunto de tubos mediante un sistema fuerza-par en *A*.

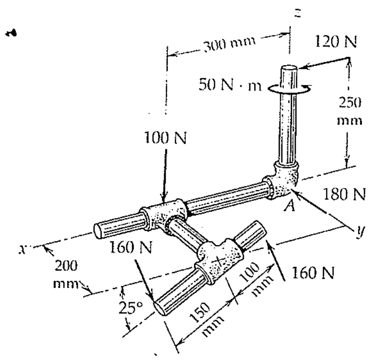


Figura problema 2.138

2.139 El motor de 160 N de peso está montado en el soporte y su eje resiste el empuje de 120 N y el par de 25 N · m aplicados a él. Determinar la resultante del sistema de fuerzas indicado, en función de una fuerza **R** en *A* y un par **M**.

Resp. $\mathbf{R} = -120\mathbf{i} - 160\mathbf{k}$ N
$\mathbf{M} = -7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 24\mathbf{k}$ N · m

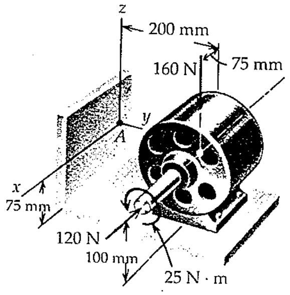


Figura problema 2.139

2.140 Se desea establecer el efecto combinado de las tres fuerzas sobre la base *O*, haciendo que por este punto pase la resultante **R**. Determinar ésta y el momento **M** del par correspondiente.

2.141 Sustituir por un torsor las dos fuerzas que actúan sobre el cubo. Escribir en forma vectorial el momento **M** asociado al torsor y especificar las coordenadas del punto *P* del plano *x-z* por el que pasa la recta soporte del torsor.

$$Resp.\ \mathbf{M} = -\frac{F_a}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$x = \frac{a}{2} \qquad z = 0$$

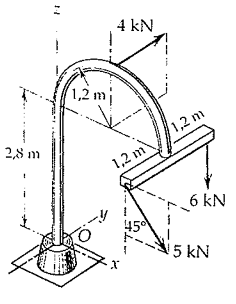


Figura problema 2.140

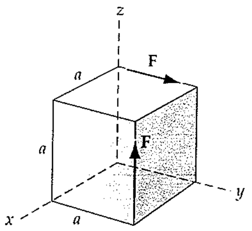


Figura problema 2.141

2.142 La resultante de las dos fuerzas y el par puede representarse mediante un torsor. Hallar la expresión vectorial del momento **M** del torsor y las coordenadas del punto *P* del plano *x-z* por el que pasa **R**.

Resp. $\mathbf{M} = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ N · m $\qquad x = z = 0{,}1$ m

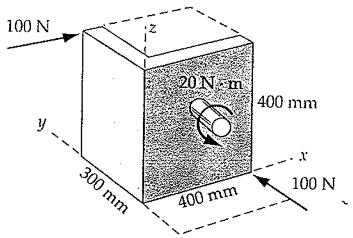


Figura problema 2.142

2.143 Sustituir por un torsor el sistema de dos fuerzas y un par del problema 2.136. Hallar los módulos del momento **M** y la fuerza resultante **R** del torsor y las coordenadas del punto *P* del plano *x-y* por el que pasa **R**.

Resp. $M = 26{,}9$ kN · m $\qquad R = 44{,}7$ kN
$x = 0{,}221$ m $\qquad y = -0{,}950$ m

2.144 En la posición representada, el cigüeñal de un pequeño compresor bicilíndrico está sometido a las fuerzas de 400 y 800 N, ejercidas por las bielas, y el par de 200 N · m. Sustituir este sistema de cargas por un sistema fuerza-par en *A*. Comprobar que **R** no es perpendicular a $\mathbf{M}_A$. Seguidamente, sustituir el sistema fuerza-par por un torsor y hallar los módulos *M* y *R* del momento del torsor y la fuerza del torsor así como las coordenadas del punto del plano *x-z* por el que pasa la recta soporte del torsor.

Resp. $M = 85{,}8$ N · m $\qquad R = 1108$ N;
$x = 0{,}1158$ m $\qquad z = -0{,}478$ m

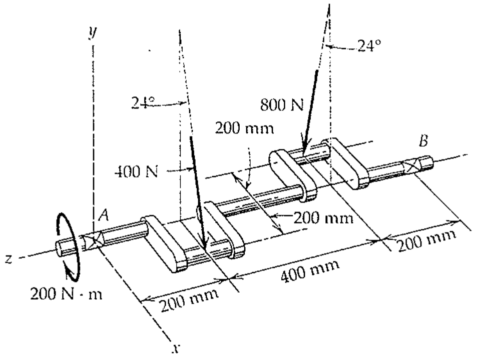


Figura problema 2.144

2.10 FORMULACIÓN DE PROBLEMAS Y REPASO

En este capítulo 2 hemos establecido las propiedades de las fuerzas, momentos y pares y los procedimientos adecuados para representar sus efectos. Para estudiar el equilibrio a lo largo de los capítulos que siguen es absolutamente esencial dominar perfectamente esta materia. Muchas de las dificultades que se presentan al aplicar los principios del equilibrio derivan de errores de interpretación y aplicación correcta de los procedimientos de este capítulo. Por esta razón, el lector deberá retroceder y consultar estos temas cuando le surjan dificultades y asegurarse de que fuerzas, momentos y pares están correctamente representados.

Para que en los problemas de ingeniería se manejen correctamente las fuerzas, hay que tener por completo presente la naturaleza vectorial de estas magnitudes. Para los casos en que la dirección de una fuerza está definida por uno o dos ángulos o por dos puntos de su recta soporte, hemos desarrollado el procedimiento para expresarla en función de sus componentes rectangulares. Debemos también ser capaces de combinar dos o más fuerzas concurrentes en una fuerza resultante equivalente, así como de resolver el problema contrario de descomponer una fuerza en sus componentes según unas direcciones determinadas.

La tendencia de una fuerza a rotar o hacer girar un cuerpo alrededor de un eje la hemos tratado en asociación al concepto de momento, el cual muestra propiedades de vector. Vimos entonces que la determinación del momento de una fuerza suele ser más fácil si se componen los momentos de las componentes de la fuerza.

El par se definió como el momento combinado de dos fuerzas iguales, opuestas y no colineales. Un par presenta la singular propiedad de que produce un giro o rotación puro cualquiera que sea el lugar donde actúan las fuerzas. Su utilidad la encontramos en la sustitución de una fuerza que actúe en un punto por un sistema fuerza-par aplicado en un punto diferente.

Establecidos ya los principios de los momentos y los pares, pasamos luego al problema de reducir un sistema de fuerzas y pares arbitrario a un sistema constituido por una fuerza aplicada a un punto cualquiera acompañada del correspondiente par resultante. Vimos además que esa fuerza resultante y ese par resultante podían combinarse para obtener una fuerza resultante y un par resultante paralelos sobre cierta recta soporte, combinación que recibe el nombre de torsor.

Con el concepto de fuerza resultante y momento resultante presente, podemos mirar adelante y considerar la esencia del equilibrio. Cuando la fuerza resultante de las que actúan sobre un cuerpo sea nula, dicho cuerpo se encontrará en equilibrio de traslación, es decir, su centro de masa estará en reposo o se moverá a lo largo de una línea recta a velocidad constante. Además, si el par resultante es nulo, el cuerpo estará en equilibrio de rotación, sin que gire en absoluto o girando a velocidad angular constante. Cuando ambas resultantes sean nulas, el cuerpo se encontrará en equilibrio completo. O sea, vemos ahora que las condiciones necesarias para que haya equilibrio es que sean nulas las resultantes: $\Sigma \mathbf{R} = 0$ y $\Sigma \mathbf{M} = 0$.

PROBLEMAS DE REPASO

2.145 Un cable ejerce una fuerza **F** en el soporte del miembro estructural. Si la componente x de **F** es 4 kN, hallar su componente y y su módulo.

Resp. $F_y = 3{,}14$ kN
$F = 5{,}09$ kN

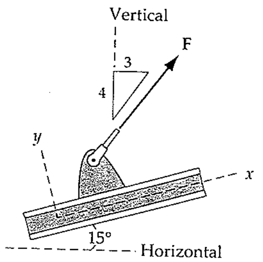


Figura problema **2.145**

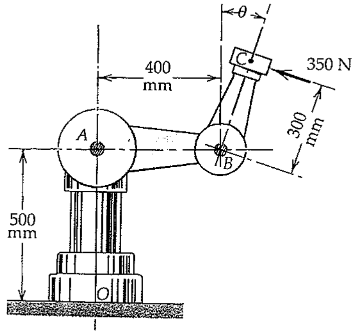


Figura problema **2.146**

2.146 Calcular el momento M_O de la fuerza de 350 N respecto al punto O de la base del robot si es $\theta = 20°$.

2.147 En el problema tipo 2.5 calcular el módulo de la fuerza más pequeña que puede aplicarse en A y respecto a O produzca el mismo momento que la fuerza de 600 N. Hallar el correspondiente ángulo θ entre **P** y la horizontal.

Resp. $P = 584$ N $\quad \theta = 26{,}6°$

2.148 Representar la resultante de las tres fuerzas y el par mediante un sistema fuerza-par en el punto A.

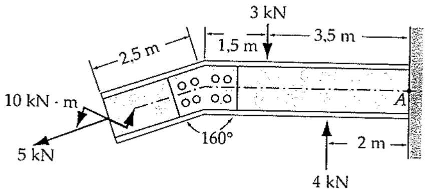


Figura problema **2.148**

2.149 Reducir el sistema de cargas dado a un sistema fuerza-par en el punto A. Determinar después la distancia x a la derecha de A donde actúa la resultante de las tres fuerzas.

Resp. $R = 320$ N (hacia abajo)
$M_A = 124$ N · m (H) $\quad x = 388$ mm

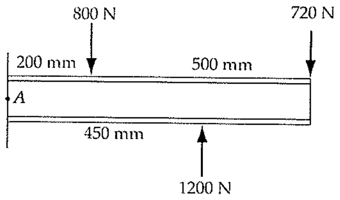


Figura problema **2.149**

2.150 Las componentes y y z de una fuerza **F** son 100 y 200 N respectivamente. Si el coseno director $l = \cos \theta_x$ de la recta soporte de la fuerza vale −0,5, escribir la expresión vectorial de **F**.

2.151 Los sentidos de rotación del árbol de entrada A y del de salida B del reductor de velocidades por tornillo sin fin están indicados por medio de las flechas curvadas de trazo discontinuo. Al eje A se le aplica un par de 80 N · m de sentido coincidente con el de rotación. El eje de salida B proporciona un par de 320 N · m a la máquina que acciona (no está dibujada). El eje de la máquina accionada ejerce un par de reacción igual y opuesto sobre el eje de salida del reductor. Determinar la resultante M de los dos pares que se ejercen sobre la unidad reductora y calcular el coseno director de M relativo al eje x.

Resp. $\mathbf{M} = -320\mathbf{i} - 80\mathbf{j}$ N · m
$\cos \theta_x = -0{,}970$

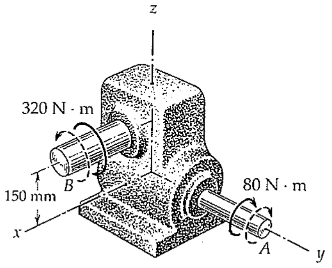


Figura problema **2.151**

2.152 Durante una operación de taladrado, el pequeño dispositivo robótico de la figura está sometido en el punto C a la fuerza de 800 N indicada. Sustituir esa fuerza por un sistema fuerza-par el punto O.

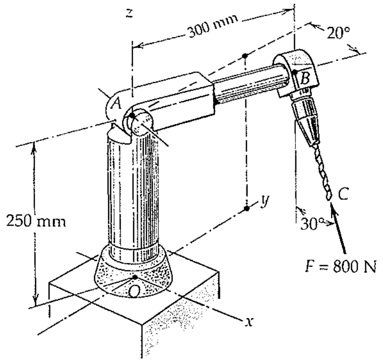


Figura problema **2.152**

2.153 Vuelve a representarse aquí la trampilla del problema 2.103. Si la tensión de la cadena AB es 100 N, determinar el módulo M de su momento respecto del eje de las bisagras.

Resp. $M = 46{,}8$ N · m

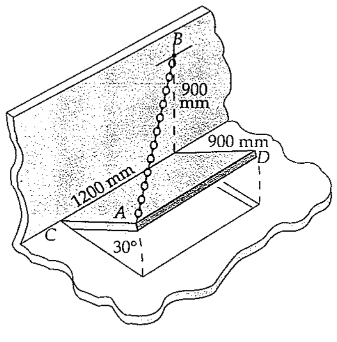


Figura problema **2.153**

*PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

***2.154** Consideremos la fuerza de 350 N que se ejerce sobre el brazo del robot del problema 2.146. Determinar y representar gráficamente el momento de esa fuerza respecto al punto O en el intervalo $0 \le \theta \le 90°$. Coméntese el significado físico del valor máximo de ese momento. ¿Para qué valores de θ es $M_O = 310$ N · m.

***2.155** En la figura se representa un instante cualquiera del izado de un mástil de bandera dotado de un bastidor triangular sin peso. La tensión de 75 N del cable elevador permanece constante. Determinar y representar gráficamente el momento respecto al punto de giro O de esa fuerza de 75 N en el intervalo $0 \le \theta \le 90°$. Hallar el valor máximo de ese momento y el ángulo para el que se produce; coméntese el significado físico de este último. Puede despreciarse el efecto del diámetro del tambor D.

$$\textit{Resp.}\ \mathbf{M}_O = \frac{1350 \text{ sen } (\theta + 60°)}{\sqrt{45 + 36 \cos (\theta + 60°)}} \mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_O = 225 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ para } \theta = 60°$$

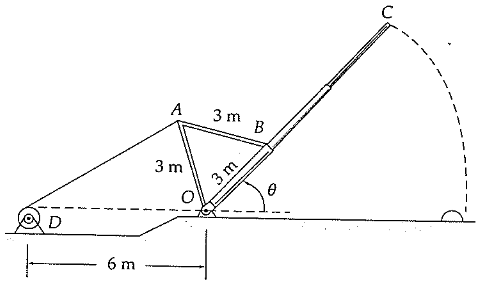


Figura problema 2.155

***2.156** Una persona mantiene rígido el codo de modo que el ángulo ABC sea constante mientras rota la articulación del hombro en A con el brazo en el plano vertical que se muestra. La articulación del hombro permanece inmóvil. Determinar y representar gráficamente sobre los mismos ejes los momentos respecto a los puntos A y B del peso de la esfera de 40 N cuando el ángulo θ varía entre 0° y 120°. Coméntese el significado físico del máximo momento de cada curva.

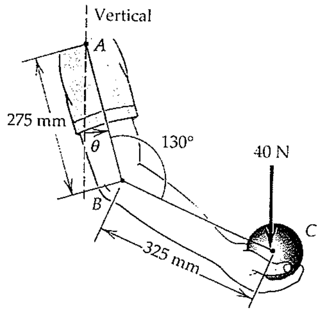


Figura problema 2.156

***2.157** Supóngase que el cilindro hidráulico AB ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ de intensidad constante 2,5 kN mientras eleva la caja volquete. Determinar y representar gráficamente el momento de esa fuerza respecto al punto O en el intervalo $0 \le \theta \le 90°$. ¿Para qué ángulo θ es máximo ese momento y cuánto vale ese momento máximo?

$$\textit{Resp.}\ \mathbf{M}_O = \frac{4{,}8(\text{sen } \theta + \cos \theta)}{\sqrt{7{,}04 + 3{,}84(\text{sen } \theta - \cos \theta)}} \mathbf{k} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_O = 2{,}83 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ para } \theta = 16{,}87°$$

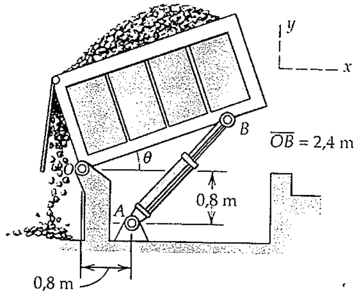


Figura problema 2.157

***2.158** El peso del cilindro hace que el cable ejerza una tracción $\mathbf{T}$ de módulo constante 900 N en el punto de anclaje O. La pequeña polea C puede ser desplazada a lo largo de una recta paralela al eje x. Determinar y representar gráficamente la proyección T_{AB} de $\mathbf{T}$ sobre la recta AB en función de la posición x de la polea en el intervalo $0 \le x \le 4$ m. Coméntese el significado físico de los cambios de signo que puedan aparecer en la curva que se obtenga.

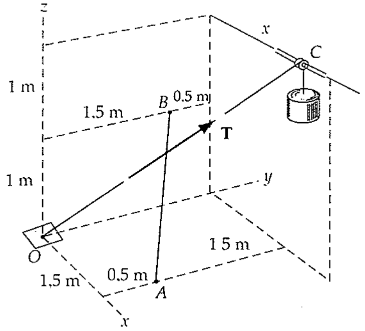


Figura problema 2.158

***2.159** La placa rectangular se inclina en torno a su borde inferior merced al cable que se mantiene bajo una tensión constante de 600 N. Determinar y representar gráficamente el momento de esa tensión respecto al borde inferior AB de la placa en el intervalo $0 \le \theta \le 90°$.

$$\textit{Resp.}\ M_{AB} = \frac{7200 \text{ sen } \theta}{\sqrt{41 + 24 \cos \theta}} \text{ N} \cdot \text{m}$$

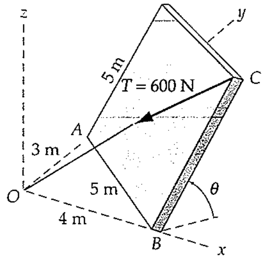
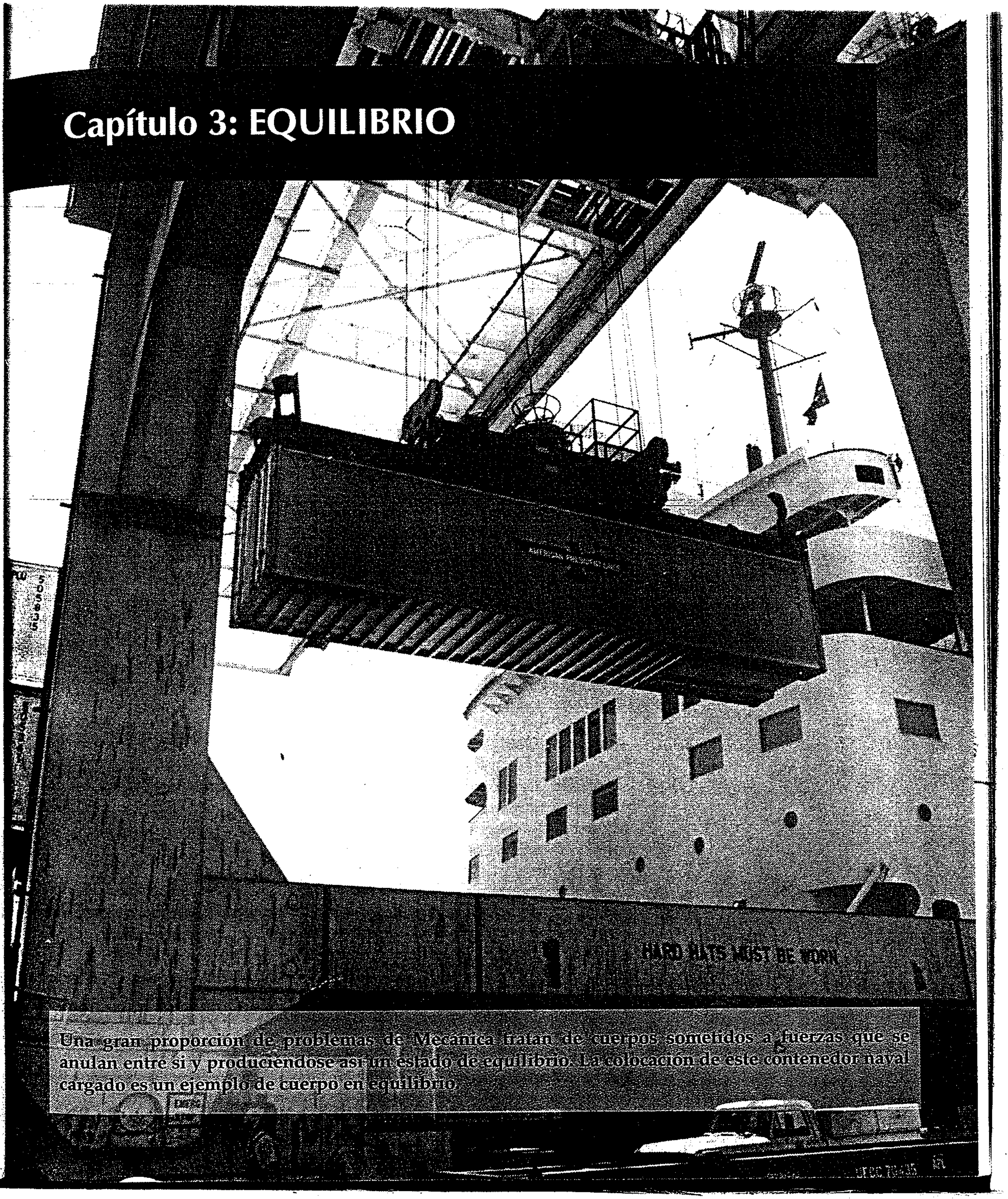


Figura problema 2.159

Capítulo 3: EQUILIBRIO



Una gran proporción de problemas de Mecánica tratan de cuerpos sometidos a fuerzas que se anulan entre sí y produciéndose así un estado de equilibrio. La colocación de este contenedor naval cargado es un ejemplo de cuerpo en equilibrio.

3.1 INTRODUCCIÓN

La Estática se ocupa principalmente de la descripción de las condiciones a la vez necesarias y suficientes que deben cumplir las fuerzas para mantener el equilibrio de los cuerpos. Por tanto, el presente capítulo que está dedicado al equilibrio constituye la parte nuclear de la Estática y debe dominarse a fondo. Utilizaremos continuamente los conceptos que desarrollamos en el capítulo 2 acerca de las fuerzas, momentos, pares de fuerzas y resultantes, a la vez que aplicaremos las leyes del equilibrio. Los procedimientos que se desarrollan en este capítulo 3 configuran una introducción comprehensiva a los métodos generales que se emplean en Mecánica para resolver innumerables problemas y también en otros campos de la ingeniería. El método que presentamos es fundamental para dominar la Estática provechosamente, por lo que instamos al lector a que lea y estudie los apartados que siguen con particular esfuerzo y atención a los detalles.

Cuando un cuerpo se halla en equilibrio, la resultante de *todas* las fuerzas que sobre él actúan es nula. O sea, la fuerza resultante **R** y el momento resultante M son ambos cero y tenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M} = 0 \tag{3.1}$$

que son condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio.

Aunque todos los cuerpos sean intrínsecamente tridimensionales, en muchos casos pueden tratarse como si fueran bidimensionales cuando las fuerzas a que están sometidos actúan en un solo plano o pueden proyectarse en un único plano. Cuando esta simplificación no sea posible, el problema deberá tratarse como tridimensional. Seguiremos el mismo orden expositivo que en el capítulo 2: en la sección A trataremos del equilibrio de los sistemas de fuerzas bidimensionales y en la sección B del equilibrio de los sistemas de fuerzas tridimensionales.

SECCIÓN A. EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

3.2 AISLAMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO

Es fundamental que, antes de aplicar las ecuaciones 3.1, se defina sin ambigüedad el cuerpo o sistema mecánico concreto que vaya a estudiarse y representen clara y completamente *todas* las fuerzas que actúen *sobre* el cuerpo. La omisión de una fuerza o la inclusión de otra que no actúe sobre el cuerpo en cuestión conducirá a resultados erróneos.

Se define un sistema mecánico como un cuerpo o grupo de cuerpos que puede aislarse de los demás cuerpos. Dicho sistema puede ser un cuerpo único o una combinación de cuerpos conectados. Los cuerpos pueden ser rígidos o no. El sistema puede ser también una masa definida de fluido, líquido o gas, o una combinación de fluidos o sólidos. En Estática, la atención se dirige principalmente a la descripción de las fuerzas que se ejercen sobre cuerpos rígidos en reposo, si bien también se considera la Estática de fluidos. Una vez decidido qué cuerpos o combinación de cuerpos hay que analizar, se *aísla* ese cuerpo o combinación de cuerpos de todos los cuerpos que le rodean. Ese aislamiento se logra mediante el *diagrama de sólido libre*, que es una representación esquemática del cuerpo o conjunto de cuerpos aislado en la que figuran todas las fuerzas aplicadas a él por otros cuerpos que se consideran suprimidos. Si hay presencia de fuerzas másicas, tales como atracciones gravitatorias o magnéticas, de intensidad apreciable, estas fuerzas deberán también representarse en el diagrama del cuerpo aislado. Solamente después de haber trazado con cuidado ese diagrama se podrán llevar a cabo los cálculos de las diversas fuerzas. A causa de su crucial importancia hemos de hacer hincapié en que

el diagrama de sólido libre es el paso más importante en la resolución de problemas de Mecánica.

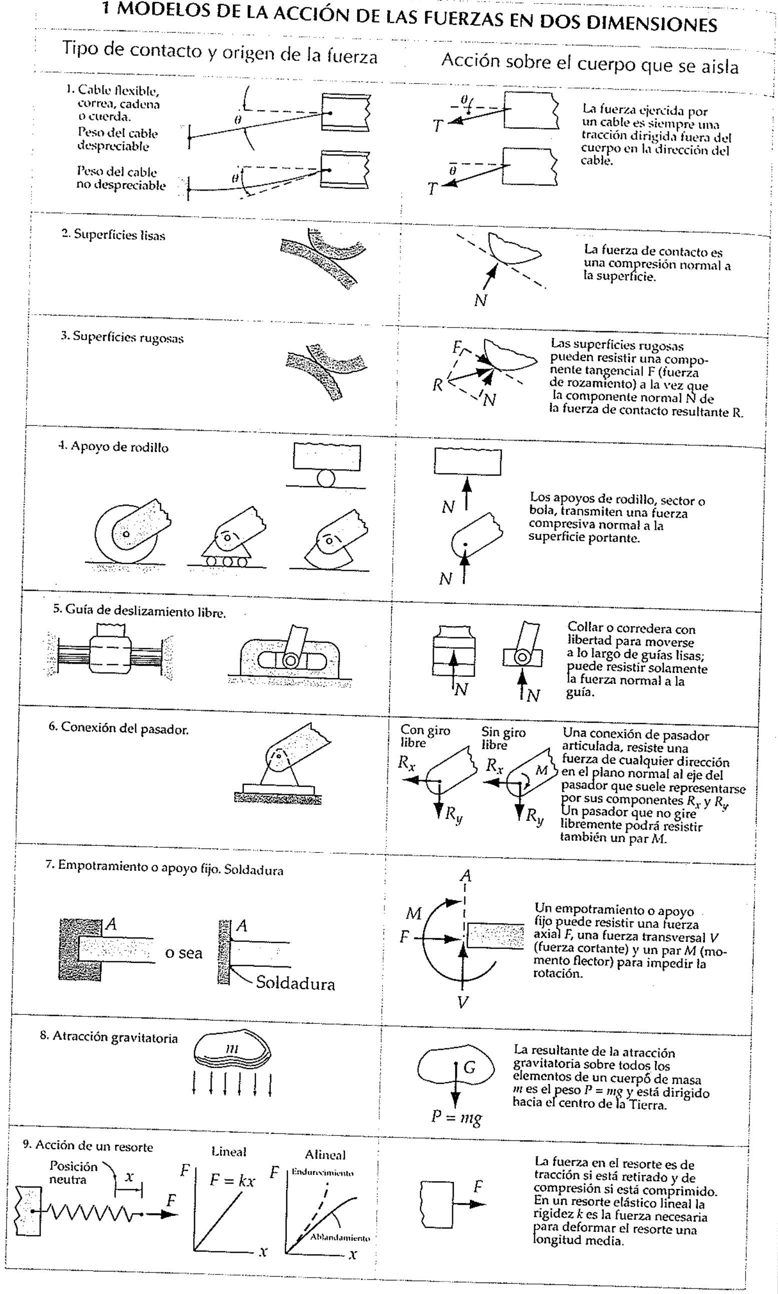
Antes de intentar el trazado de un diagrama de sólido libre, deben reconocerse las características mecánicas del conjunto de fuerzas aplicadas. En el apartado 2.2 se describieron las características fundamentales de las fuerzas, enfocando la atención esencialmente hacia las características vectoriales de las mismas. Vimos allí que las fuerzas pueden ser aplicadas como resultado de contacto físico directo o bien por acción a distancia y que en uno u otro caso pueden ser tanto interiores como exteriores al cuerpo considerado. Observemos además que la aplicación de fuerzas exteriores lleva aparejada la aparición de fuerzas reactivas y que tanto las fuerzas aplicadas (o activas) como las reactivas pueden ser concentradas o distribuidas. Adicionalmente, se introdujo el principio de transmisibilidad, lo que permite tratar las fuerzas como vectores deslizantes en lo que concierne a sus efectos exteriores sobre los cuerpos rígidos. Ahora vamos a hacer uso de todas esas características de las fuerzas para obtener el modelo analítico de un sistema mecánico aislado, al cual aplicaremos a continuación las ecuaciones de equilibrio.

En la figura 3.1 pueden verse los tipos corrientes de aplicación de fuerzas a sistemas mecánicos para estudios en dos dimensiones. En cada ejemplo se indica la fuerza ejercida *sobre* el cuerpo que se aísla *por* el cuerpo que se suprime. La tercera ley de Newton, que establece la existencia de una reacción igual y opuesta a toda acción, deberá cumplirse estrictamente. El sentido de la fuerza ejercida *sobre* el cuerpo en cuestión por un miembro en contacto o de apoyo es siempre tal que se opone al movimiento del cuerpo que tendría lugar si se retirase ese miembro en contacto o de apoyo.

En el ejemplo 1, se representa la acción de un cable, correa, cuerda o cadena flexible sobre un cuerpo al que esté unido. A causa de su flexibilidad, un cable flexible no puede ofrecer resistencia a la flexión, cortadura o compresión, por lo que ejerce una fuerza de tracción tangente al cable en su punto de amarre. La fuerza ejercida *por* el cable *sobre* el cuerpo al que está unido está *siempre* dirigida hacia fuera del cuerpo. Cuando la tensión T es grande frente al peso del cable, éste puede suponerse que adopta una forma rectilínea. Cuando el peso del cable no es despreciable frente a la tensión, se hace importante la flecha del cable y la tensión cambia de dirección e intensidad a lo largo del cable. En el punto de amarre ejerce una fuerza tangente a sí mismo.

Cuando están en contacto las superficies lisas de dos cuerpos, como en el ejemplo 2, la fuerza que una ejerce sobre otra es *normal* al plano tangente a ambas superficies y compresiva. Aún cuando las superficies no sean completamente lisas, esta hipótesis está justificada en la práctica para muchos casos.

Cuando las superficies en contacto de dos cuerpos son rugosas, ejemplo 3, la fuerza de contacto no será normal al plano tangente de las superficies, sino que se podrá descomponer en una componente *tangencial* o de rozamiento F y una *componente normal* N.



1 MODELOS DE LA ACCIÓN DE LAS FUERZAS EN DOS DIMENSIONES

Tipo de contacto y origen de la fuerza	Acción sobre el cuerpo que se aisla
1. Cable flexible, correa, cadena o cuerda. Peso del cable despreciable Peso del cable no despreciable	La fuerza ejercida por un cable es siempre una tracción dirigida fuera del cuerpo en la dirección del cable.
2. Superficies lisas	La fuerza de contacto es una compresión normal a la superficie.
3. Superficies rugosas	Las superficies rugosas pueden resistir una componente tangencial F (fuerza de rozamiento) a la vez que la componente normal N de la fuerza de contacto resultante R.
4. Apoyo de rodillo	Los apoyos de rodillo, sector o bola, transmiten una fuerza compresiva normal a la superficie portante.
5. Guía de deslizamiento libre.	Collar o corredera con libertad para moverse a lo largo de guías lisas; puede resistir solamente la fuerza normal a la guía.
6. Conexión del pasador.	Una conexión de pasador articulada, resiste una fuerza de cualquier dirección en el plano normal al eje del pasador que suele representarse por sus componentes R_x y R_y Un pasador que no gire libremente podrá resistir también un par *M*.
7. Empotramiento o apoyo fijo. Soldadura	Un empotramiento o apoyo fijo puede resistir una fuerza axial *F*, una fuerza transversal *V* (fuerza cortante) y un par *M* (momento flector) para impedir la rotación.
8. Atracción gravitatoria	La resultante de la atracción gravitatoria sobre todos los elementos de un cuerpo de masa *m* es el peso $P = mg$ y está dirigido hacia el centro de la Tierra.
9. Acción de un resorte	La fuerza en el resorte es de tracción si está retirado y de compresión si está comprimido. En un resorte elástico lineal la rigidez *k* es la fuerza necesaria para deformar el resorte una longitud media.

Figura 3.1

El ejemplo 4 ilustra varias formas de apoyo mecánico que eliminan eficazmente las fuerzas tangenciales de rozamiento y en este caso la reacción resultante es normal a la superficie de apoyo.

El ejemplo 5 presenta la acción de una guía lisa sobre el cuerpo que soporta. No hay resistencia paralela a la guía.

El ejemplo 6 ilustra la acción de una conexión por pasador. Dicha conexión permite soportar una fuerza cuya dirección sea cualquiera normal al eje del pasador. Esta acción suele representarse en función de dos componentes rectangulares. En la realidad, el sentido de esas componentes depende del modo en que esté cargado el miembro. A menos que se disponga de información inicial, tal sentido se asignará arbitrariamente. Entonces, si los cálculos atribuyen a una componente un signo positivo, es que el sentido asignado a la misma es el correcto; si el signo resulta negativo, es que el sentido real es el opuesto al asignado.

Si la conexión puede girar libremente en torno al pasador, la misma sólo puede soportar la fuerza *R*. Pero si la conexión no puede girar libremente, podrá soportar también un par resistente *M*. También a *M* se le atribuye un sentido arbitrario y en la realidad dependerá de cómo esté cargado el miembro en cada caso.

El ejemplo 7 muestra las resultantes de la distribución un tanto compleja de las fuerzas sobre la sección de una barra o viga esbelta en un empotramiento o soldadura. Por supuesto, aquí también los sentidos de las reacciones *F* y *V* del momento flector *M* dependen del modo en que el miembro esté cargado en cada problema.

Una de las fuerzas más corrientes es la debida a la atracción de la gravedad, ejemplo 8. Dicha fuerza afecta a todos los elementos de un cuerpo y está distribuida, en consecuencia, por todo él. La resultante de las fuerzas de la gravedad que se ejercen sobre todos los elementos es el peso, $P = mg$, del cuerpo; pasa por el centro de masa *G* y está dirigido hacia el centro de la Tierra en el caso de las estructuras ligadas a la Tierra. La posición de *G* resulta, por lo general, evidente a partir de la geometría del cuerpo, en particular cuando existen condiciones de simetría. Cuando la posición no resulta evidente de manera inmediata, la situación de *G* deberá calcularse o determinarse experimentalmente. Son aplicables consideraciones análogas en el caso de la acción a distancia de fuerzas magnéticas y eléctricas. Estas fuerzas de acción a distancia tienen el mismo efecto total sobre un cuerpo rígido que tendrían las fuerzas de igual intensidad, dirección y sentido aplicadas por contacto externo directo.

En el ejemplo 9 se ilustra la acción de un resorte elástico lineal y otro alineal de característica blanda o dura. La fuerza ejercida por un resorte elástico, sea de tracción o compresión, está dada por $F = kx$, donde *k* es la rigidez del resorte y *x* su deformación medida a partir de la posición de deformación nula.

Instamos al lector a que estudie estas nueve condiciones y las identifique cuando resuelva problemas de modo que pueda dibujar correctamente los diagramas de sólido libre. Las ilustraciones de la figura 3.1 *no son* diagramas de sólido libre, sino simplemente elementos para construir diagramas de sólido libre.

Vamos a describir ahora el procedimiento completo para trazar un diagrama de sólido libre que realice el aislamiento del cuerpo o sistema considerado.

Construcción de diagramas de sólido libre. Intervienen los pasos siguientes.

Paso 1. Decidir claramente qué cuerpo o combinación de cuerpos hay que aislar. El cuerpo elegido contendrá una o más de las cantidades desconocidas buscadas.

Paso 2. Seguidamente, el cuerpo o el conjunto de cuerpos elegido se aísla mediante un diagrama que represente su *contorno exterior*. Este contorno delimita el aislamiento del cuerpo, o del conjunto de cuerpos, de *todos* los demás cuerpos en contacto con él o actuando a distancia, los cuales se suponen eliminados. Este suele ser el paso más crítico y siempre deberemos asegurarnos de haber *aislado completamente* el cuerpo antes de proseguir.

Paso 3. A continuación, sobre el diagrama se representan en sus posiciones correctas todas las fuerzas que *sobre* el cuerpo aislado ejercen los cuerpos suprimidos. Un recorrido sistemático de todo el contorno nos revelará todas las fuerzas de contacto. Los pesos se incluirán allá donde no sean despreciables. Las fuerzas conocidas se representarán mediante flechas con su módulo, dirección y sentido indicados. Las fuerzas desconocidas se representarán mediante flechas con el módulo o la dirección desconocidos indicados con un símbolo. Si se desconoce también el sentido del vector, puede atribuirsele uno arbitrario. Los cálculos nos darán un módulo positivo si el sentido supuesto arbitrariamente resulta ser el correcto, y nos darán un módulo negativo si el sentido supuesto arbitrariamente resulta ser falso. Es necesario *mantener* las características asignadas a las fuerzas desconocidas a lo largo de todos los cálculos.

Paso 4. Sobre el diagrama se indicarán directamente los ejes coordenados elegidos. También pueden representarse a voluntad las dimensiones geométricas desconocidas. No obstante, téngase en cuenta que el diagrama de sólido libre está destinado a concentrar nuestra atención sobre la acción de las fuerzas exteriores y, por tanto, no conviene enredarlo con una información extraña excesiva. Las flechas representativas de fuerzas deben distinguirse claramente de toda otra flecha que pueda aparecer, para que no haya confusión posible. A tal fin puede emplearse un lápiz de color.

Finalizados los cuatro pasos anteriores se tendrá un diagrama de sólido libre completo y se habrá despejado el camino para aplicar los principios de la Mecánica, tanto en Estática como en Dinámica.

Muchos estudiantes se sienten tentados a omitir del diagrama de sólido libre ciertas fuerzas que a primera vista pueden parecer innecesarias para los cálculos. Caer en esta tentación conduce a un gran error. Sólo con un aislamiento *completo* y una representación sistemática de *todas* las fuerzas exteriores se pueden interpretar adecuadamente los efectos de todas las fuerzas aplicadas y reactivas. Muy a menudo, una fuerza que parece no tener influencia sobre uno de los resultados buscados, resulta tenerla. Así pues, el único procedimiento seguro es hacer que en el diagrama figuren todas las fuerzas cuyas intensidades no sean despreciables.

Por su gran importancia en Mecánica, hemos explicado con cierto detalle el diagrama de sólido libre. Este método asegura una definición precisa de un sistema mecánico y concentra la atención sobre el significado exacto y la aplicación de las leyes de las fuerzas en Estática y Dinámica. El método del diagrama de sólido libre tiene tal importancia que recomendamos vivamente al lector que relea este apartado varias veces y repase una y otra vez los ejemplos de diagrama de sólido libre de la figura 3.2 y también los problemas tipo que figuran al final del apartado siguiente.

En la figura 3.2 se ofrecen cuatro ejemplos de mecanismos y estructuras junto con diagramas de sólido libre correctos. A efectos de claridad se ha prescindido de cotas y valores. En todos los casos el sistema completo se trata como un cuerpo único, por lo cual no se indican las fuerzas internas. En estos cuatro ejemplos se incluyen, cuando procede, las características de los distintos tipos de fuerzas de contacto ilustrados en la figura 3.1.

En el ejemplo 1 la armadura se compone de elementos estructurales que, como conjunto, constituyen una estructura rígida. Es decir, la armadura puede separarse de sus apoyos y tratarse como un cuerpo rígido. Además de la carga externa aplicada F, el diagrama de sólido libre debe incluir las reacciones que sufre la armadura en A y B. El sector B sólo puede soportar una fuerza vertical, la cual se transmite a la estructura en B (fig. 3.1, ej. 4). El pasador A (fig. 3.1, ej. 6) es capaz de comunicar a la estructura una componente de fuerza tanto horizontal como vertical. En este ejemplo, relativamente sencillo, está claro que la

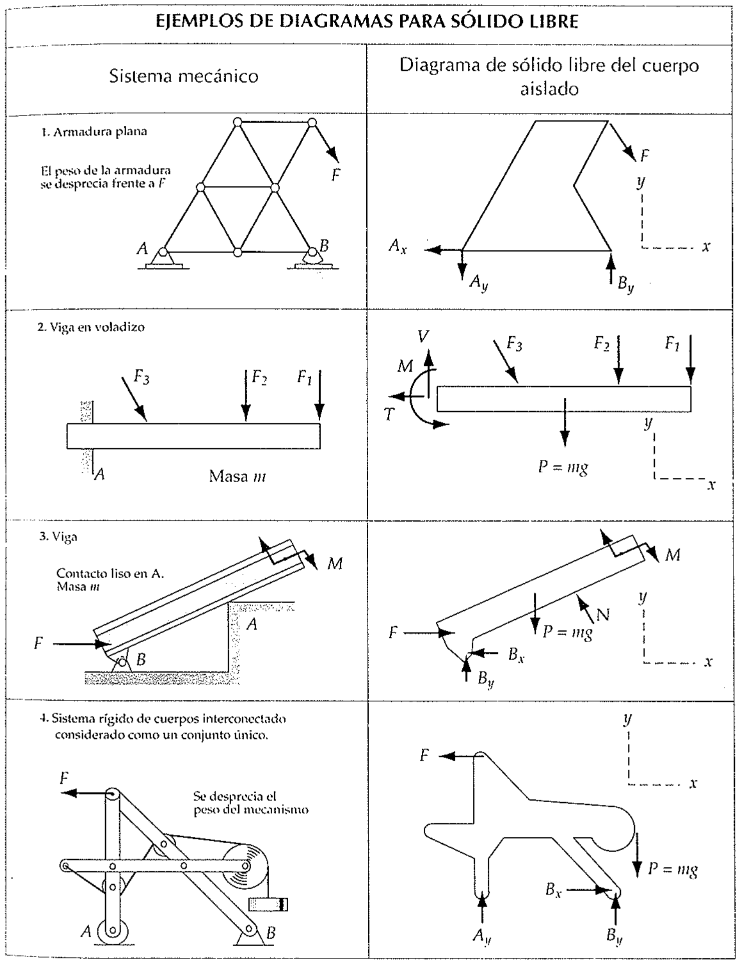

EJEMPLOS DE DIAGRAMAS PARA SÓLIDO LIBRE
Sistema mecánico
Diagrama de sólido libre del cuerpo aislado
1. Armadura plana
El peso de la armadura se desprecia frente a F
F
A
B
F
y
x
A_x
A_y
B_y
2. Viga en voladizo
F_3
F_2
F_1
A
Masa m
V
M
T
F_3
F_2
F_1
y
x
P = mg
3. Viga
Contacto liso en A.
Masa m
M
F
A
B
M
y
N
P = mg
F
B_x
B_y
x
4. Sistema rígido de cuerpos interconectado considerado como un conjunto único.
F
Se desprecia el peso del mecanismo
A
B
y
x
F
P = mg
B_x
A_y
B_y

Figura 3.2

componente vertical A_y debe estar dirigida hacia abajo para que la armadura no gire alrededor de B en sentido horario. Además, la componente horizontal A_x estará dirigida hacia la izquierda para que la armadura no se mueva hacia la derecha bajo la influencia de la componente horizontal de *F*. O sea, al construir el diagrama de sólido libre de esta armadura simple, el sentido correcto de cada una de las componentes de fuerza que es ejercida *sobre* ella *por* el basamento en *A* se percibe fácilmente y, por tanto, puede representarse con su sentido físico correcto. Cuando la observación directa no permita reconocer fácilmente el sentido de una fuerza o de una componente de fuerza, dicho sentido debe ser asignado arbitrariamente y lo acertado o erróneo de esa asignación lo determinará el signo algebraico que resulte de los cálculos. Si el peso total de los miembros de la armadura fuese apreciable frente a *F* y a las fuerzas en *A* y *B*, en el diagrama de sólido libre deberán incluirse los pesos de los miembros como fuerzas exteriores.

En el ejemplo 2 la viga en voladizo está inmovilizada en el muro y sometida a tres cargas exteriores. Al aislar la porción de viga situada a la derecha de la sección *A*, deberemos incluir las fuerzas reactivas aplicadas *por* el muro *a* la viga y cuyas resultantes se representan actuando sobre esa sección de la viga (fig. 3.1, ej. 7). Esas resultantes comprenden una fuerza vertical *V* que contrarresta las fuerzas verticales aplicadas, una tracción *T* que equilibra la componente horizontal hacia la derecha de las fuerzas aplicadas, y también un par de momento *M* y sentido antihorario para que la viga no gire en torno a *A*. Debe también representarse el peso *mg* de la viga aplicado en el centro de masa (fig. 3.1, ej. 8). Aquí se ha sustituido el un tanto complejo sistema de fuerzas realmente actuantes en la sección escindida por su sistema equivalente fuerza-par, en el que la primera se presenta descompuesta en sus componentes vertical *V* (fuerza cortante) y horizontal *F* (fuerza axial). El par *M* constituye el llamado momento flector. Con todo ello, el diagrama de sólido libre habrá quedado completo y nos mostrará la viga en equilibrio bajo la acción de seis fuerzas y un par.

En el ejemplo 3 el peso $P = mg$ se representa aplicado en el centro de la masa de la viga, punto cuya posición se supone conocida (fig. 3.1, ej. 8). La fuerza que se ejerce en el canto A sobre la viga es normal a la superficie lisa de ésta (fig. 3.1, ej. 2). Para entender más claramente este efecto, imagínese una ampliación del punto de contacto *A*, en la cual éste aparecería algo redondeado, y considérese la fuerza ejercida por esa esquina redondeada sobre la superficie plana de la viga, que se supone lisa. Si esas superficies en contacto no fueran lisas, aparecería una componente de fuerza tangencial debida al rozamiento. Además de la fuerza aplicada *F* y del par *M*, en *B* hay una conexión de pasador que sobre la viga ejerce una fuerza que tiene componentes horizontal y vertical. A estas componentes se asignan unos sentidos arbitrarios.

En el ejemplo 4 el diagrama de sólido libre revela que hay tres incógnitas para el equilibrio bajo las cargas dadas *mg* y *F*. Cualquiera de las múltiples configuraciones internas que pudiera adoptar el cable que sujeta la masa *m* sería posible sin afectar a la respuesta exterior del mecanismo en su conjunto, hecho que revela el diagrama de sólido libre. Este ejemplo hipotético nos sirve para recalcar la importancia que reviste el incluir la mayor cantidad posible de elementos en el diagrama de sólido libre y para poner de manifiesto que las fuerzas interiores a un conjunto rígido de miembros no influyen en las reacciones exteriores.

Los sentidos positivos de B_x y B_y en el ejemplo 3, y B_y en el ejemplo 4 han sido supuestos sobre los diagramas de sólido libre y la corrección de esas suposiciones se vería confirmada o negada según que los signos algebraicos resultaran positivos o negativos cuando se efectuaran los cálculos en los problemas reales.

Es de crucial importancia el aislamiento del sistema mecánico considerado para formular el modelo matemático. Por lo que hace a la construcción del siempre fundamental diagrama de sólido libre, su aspecto más importante es decidir claramente y sin ambigüedades lo que va a incluirse y lo que va a excluirse. Tal decisión no será inequívoca hasta que los límites del diagrama representen el contorno completo del cuerpo o sistema de cuerpos a aislar, iniciado en un punto cualquiera de los límites y acabado en ese mismo punto. El cuerpo contenido dentro de ese contorno cerrado será, entonces, el cuerpo libre aislado y habrán de tenerse en cuenta todas las fuerzas transmitidas a dicho cuerpo aislado, a través del contorno, por todos los cuerpos en contacto con él y suprimidos del dibujo. Instamos una vez más al lector a que preste atención especial a este paso. Antes de empezar a emplear el diagrama de sólido libre en la aplicación de los principios del equilibrio de fuerzas, que se trata en el apartado siguiente, será beneficioso adquirir cierta práctica inicial en el dibujo de diagramas de sólido libre. Los problemas que siguen están pensados para brindar tal práctica.

EJERCICIOS SOBRE EL DIAGRAMA DE SÓLIDO LIBRE

3.A En cada uno de los cinco ejemplos siguientes se presenta en la ilustración de la izquierda el cuerpo a aislar, mientras que a la derecha se presenta un diagrama de sólido libre (DSL) *incompleto* del cuerpo aislado. Añadir en cada caso las fuerzas necesarias para conseguir un diagrama de sólido libre completo. Los pesos de los cuerpos son despreciables salvo que se indique otra cosa. Por razones de sencillez se omiten cotas y valores numéricos.

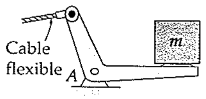
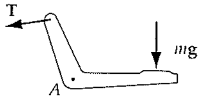
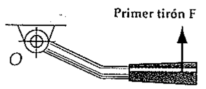
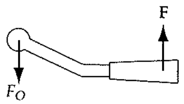
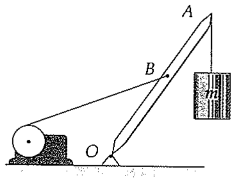
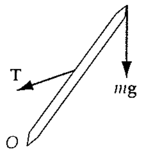
	Cuerpo	DSL incompleto
1. Palanca acodada que soporta la masa *m* con soporte de pasador en *A*.		
2. Palanca de mando que aplica un par en el árbol *O*.		
3. Pluma *OA*, de masa despreciable frente a *m*. Está articulada en *O* y en *B* la sujeta el cable de izado.		

Figura 3.A

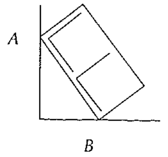
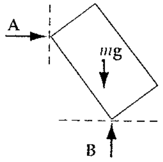
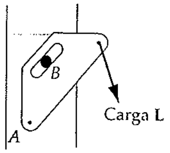
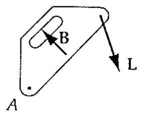
4. Cuévano uniforme de masa *m* apoyado contra una pared lisa vertical y sobre un suelo horizontal rugoso		
5. Soporte fijo cargado merced a una conexión de pasador A y un pasador fijo B dentro de una ranura lisa.		

Figura 3.A (continuación)

3.B En cada uno de los cinco ejemplos siguientes se presenta en la ilustración de la izquierda el cuerpo a aislar, mientras que a la derecha se presenta un diagrama de sólido libre (DSL) *erróneo* o *incompleto*. Háganse en cada caso los cambios o adiciones necesarios para conseguir un diagrama de sólido libre correcto y completo. Los pesos de los cuerpos son despreciables salvo que se indique otra cosa. Por razones de sencillez se omiten cotas y valores numéricos.

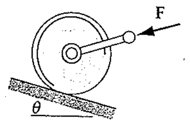
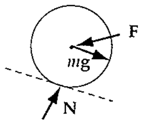
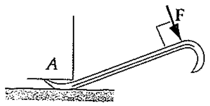
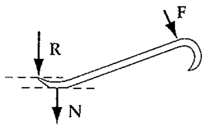
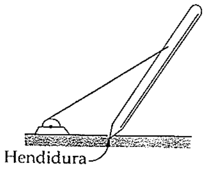
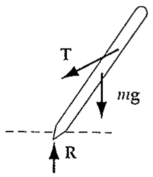
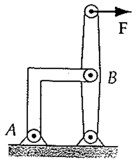
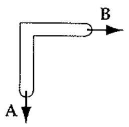
	Cuerpo	DSL incorrecto o incompleto
1. Apisonador de césped de masa *m* empujado por un plano inclinado θ		
2. Palanca alzando el cuerpo A de superficie horizontal lisa. La palanca se apoya en una superficie horizontal rugosa.		
3. Poste uniforme de masa *m* elevado a su posición por el torno. La superficie horizontal de apoyo tiene una hendidura para que el poste no resbale.		
4. Soporte angular en un marco. Articulaciones de pasador.		

Figura 3.B

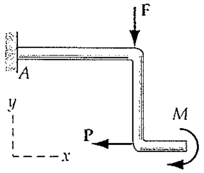
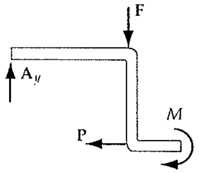
5. Barra doblada soldada al soporte en A y sometida a dos fuerzas y un par.		

Figura 3.B (continuación)

3.C Dibujar un diagrama de sólido libre correcto y completo de cada uno de los cuerpos que se describen. Tómense en cuenta los pesos de los cuerpos sólo cuando se indique la masa. Deben rotularse todas las fuerzas, conocidas o no. (*Nota*: El sentido de algunas componentes de reacción no siempre puede determinarse sin cálculos numéricos.)

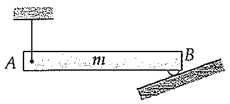
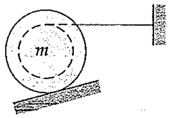
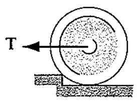
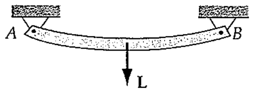
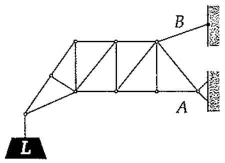
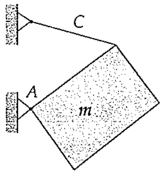
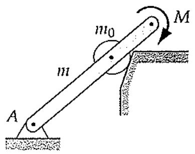
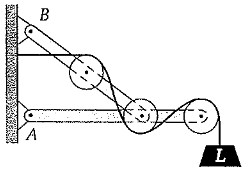
1. Barra horizontal uniforme de masa *m* suspendida de un cable en *A* y apoyada en *B* en una superficie inclinada rugosa. 	5. Carrete uniforme de masa *m* apoyado en una superficie rugosa y sujeto por el cable horizontal. 
2. Rueda de masa *m* a punto de rodar sobre el bordillo a causa de la tracción T. 	6. Barra inicialmente horizontal, pero sometida a flexión por la carga L. Cada extremo está sujeto por un pasador a un soporte rígido. 
3. Armadura cargada sujeta por un pasador en *A* y por un cable en *B*. 	7. Placa pesada uniforme de masa *m* sujeta en un plano vertical por el cable *C* y la bisagra *A*. 
4. Barra uniforme de masa *m* y rodillo de masa m_0 unidos. Sometidos al par *M* y apoyados como se indica. El rodillo puede girar libremente. 	8. El conjunto completo de entramado, poleas y cable han de aislarse como si fueran un todo. 

Figura 3.C

3.3 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

En el apartado 3.1 definimos el equilibrio como aquel estado en que es nula la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Dicho de otro modo, un cuerpo está en equilibrio cuando todas las fuerzas y momentos a él aplicados se contrarrestan entre sí. Estas condiciones se expresan mediante las ecuaciones de equilibrio 3.1, las cuales aplicadas a dos dimensiones pueden escribirse como sigue, en forma escalar,

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_o = 0 \tag{3.2}$$

La tercera ecuación representa la suma nula de los momentos de todas las fuerzas respecto a un punto O interior o exterior al cuerpo. Estas ecuaciones 3.2 son las condiciones necesarias y suficientes para que el equilibrio sea completo en dos dimensiones. Son necesarias porque, si no se cumplen, las fuerzas y los momentos no pueden contrarrestarse entre sí; son suficientes porque, si se cumplen, las fuerzas y los momentos forzosamente se contrarrestan y queda asegurado el equilibrio.

En el tomo 2, *Dinámica*, se desarrollan las ecuaciones que ligan la fuerza con la aceleración para un cuerpo rígido a partir de la segunda ley de Newton. Tales ecuaciones muestran que la aceleración del centro de masa del cuerpo es proporcional a la fuerza resultante $\Sigma\mathbf{F}$ que actúa sobre el cuerpo. En consecuencia, si un cuerpo se mueve a velocidad constante (aceleración nula), deberá ser nula la resultante de las fuerzas que actúan sobre él y podrá tratarse como si se encontrase en equilibrio.

Para que sea completo el equilibrio en dos dimensiones, deben cumplirse a la vez las tres ecuaciones 3.2. Ahora bien, esas ecuaciones representan condiciones independientes y, por ello, alguna puede cumplirse y otra no. Véase, por ejemplo, el caso de un cuerpo que se deslice por una superficie horizontal: las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas se satisfarán para la dirección vertical, según la cual la aceleración es nula, pero no para la horizontal. Asimismo, un cuerpo, como el volante de inercia de un motor que gire a velocidad angular creciente en torno a su centro de masa, no estará en equilibrio rotatorio, pero sin embargo se satisfarán las condiciones de equilibrio de las fuerzas.

(a) Categorías de equilibrio. Al aplicar las ecuaciones 3.2 se reconocen de modo natural tres categorías fácilmente reconocibles. Estas tres categorías de sistemas de fuerzas que pueden ejercerse sobre cuerpos en equilibrio se resumen en la figura 3.3 y se explican como sigue:

Caso 1. Es evidente que el equilibrio bajo la acción de fuerzas colineales exige únicamente la ecuación de fuerzas en la dirección de éstas (dirección x), ya que las otras se satisfacen automáticamente.

Caso 2. El equilibrio de fuerzas coplanarias (o sea, que yacen en un plano, que tomaremos como x-y) concurrentes en un punto O, exige únicamente las dos ecuaciones de fuerzas, puesto que la suma de momentos respecto a O, es decir, respecto a un eje z que pase por O, es necesariamente nula.

Caso 3. El equilibrio de fuerzas coplanarias paralelas exige la ecuación de fuerzas en su dirección (dirección x) y una ecuación de momentos respecto a un eje (eje z) normal al plano de las fuerzas.

Caso 4. El equilibrio de un sistema general de fuerzas coplanarias (en el plano x-y) exige las dos ecuaciones de fuerzas y una ecuación de momentos respecto a un eje (eje z) normal al plano.

CATEGORÍAS DE EQUILIBRIO EN EL PLANO

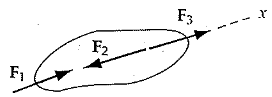
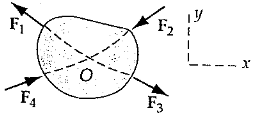
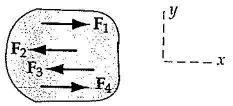
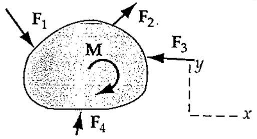
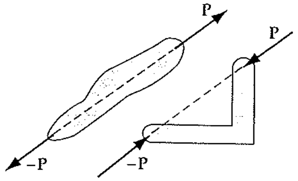
Sistema de fuerzas	Diagrama de sólido libre	Ecuaciones independientes	
1. Colineales		$\Sigma F_x = 0$	
2. Concurrentes en un punto		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$	
3. Paralelas		$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma M_x = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$	$\Sigma M_x = 0$

Figura 3.3

Se presentan muchas veces dos situaciones de equilibrio ante las cuales conviene que el lector esté alertado. La primera es el equilibrio de un cuerpo bajo la acción de sólo dos fuerzas. En la figura 3.4 se presentan dos ejemplos de este caso y vemos en ella que para un *miembro de dos fuerzas*, éstas deben ser *iguales, opuestas* y *colineales*. La forma del miembro no debe enmascarar tan sencillo requisito. En estos dos ejemplos se supone que los pesos de los miembros son despreciables frente a las fuerzas aplicadas.

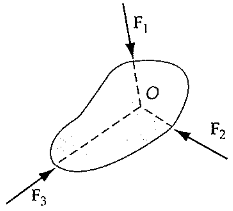
La segunda situación es la de un cuerpo en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas (fig. 3.5*a*). Vemos que las rectas soporte de las tres fuerzas deben ser *concurrentes*. Si no lo fueran, una de ellas produciría un momento no nulo respecto al punto de concurrencia de las otras dos, violándose así la condición de momento nulo respecto a un punto cualquiera. La única excepción se presenta cuando las tres fuerzas son paralelas. En este caso, podemos considerar que el punto de concurso se encuentre en el infinito. Esta condición de concurrencia de tres fuerzas en equilibrio se utiliza mucho para resolver gráficamente las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas. Se dibuja entonces el polígono de fuerzas y se cierra, tal como se muestra en la figura 3.5*b*. Es frecuente que un cuerpo sometido a la acción de más de tres fuerzas pueda ser reducido a un *miembro de tres fuerzas* componiendo dos o más de las fuerzas conocidas.

(b) Otras expresiones de las condiciones de equilibrio. Hay otras dos maneras de expresar las condiciones necesarias para el equilibrio de fuerzas en dos

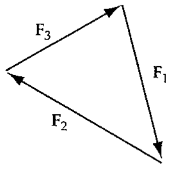


Miembro de 2 fuerzas
(*a*)

Figura 3.4



(*a*) Miembro de 3 fuerzas



(*b*) El polígono cerrado satisface $\Sigma F = 0$

Figura 3.5

dimensiones. Para el cuerpo de la figura 3.6 *a*, si $\Sigma M_A = 0$, la resultante **R**, si existe, deberá forzosamente ser una fuerza que pase por A. Si se cumple ahora la ecuación $\Sigma F_x = 0$, donde la dirección x es totalmente arbitraria, se deduce de la figura 3.6 *b* que la resultante **R**, si existe, no sólo deberá pasar por A, sino que además deberá ser perpendicular a la dirección x según se indica. Si consideramos $\Sigma M_B = 0$, siendo B un punto cualquiera tal que la recta AB no sea perpendicular a la dirección x, es evidente que **R** deberá ser nula y, por tanto, el cuerpo estará en equilibrio. Entonces, otro sistema de ecuaciones que expresa el equilibrio será

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

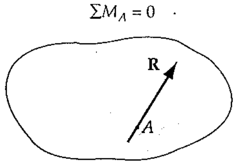
donde los puntos A y B no determinan una recta perpendicular a la dirección x.

Para un sistema de fuerzas coplanarias cabe también una tercera formulación de las condiciones de equilibrio. Si, como antes, es $\Sigma M_A = 0$ para un cuerpo cualquiera como el de la figura 3.6*c*, la resultante, si existe, deberá ser una fuerza **R** que pase por A. Además, si $\Sigma M_B = 0$, la resultante, si existe, deberá pasar por B según se indica en la figura 3.6*d*. Sin embargo, esta fuerza no podría existir si $\Sigma M_C = 0$, donde C no está alineado con A y B. Luego las condiciones de equilibrio podrán escribirse de la forma

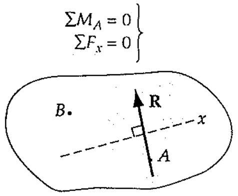
$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

donde A, B y C son puntos no pertenecientes a una misma recta.

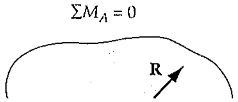
Cuando se escriban unas ecuaciones de equilibrio que no sean independientes, se tendrá una información redundante y al resolver el sistema de ecuaciones resultará 0 = 0. Por ejemplo, en el caso de un problema bidimensional general, tres ecuaciones de momentos escritas para tres puntos colineales no son independientes y contendrán información duplicada; su resolución determinará como mucho dos de las incógnitas y la tercera ecuación se limitará a cumplir la identidad 0 = 0.



(*a*)



(*b*)



(c) Ligaduras e isostaticidad. Aún cuando las ecuaciones de equilibrio desarrolladas en este apartado sean condiciones necesarias y suficientes para establecer el equilibrio de un cuerpo rígido, no siempre proporcionan información suficiente para calcular todas las fuerzas desconocidas que puedan ejercerse sobre el mismo. La suficiencia reside en las características de las restricciones que a su movimiento posible impongan sus apoyos. A dichas restricciones las llamamos ligaduras.

de la deformación de los miembros de la armadura en función de las propiedades elásticas de éstos. Las dos reacciones horizontales A_x y B_x dependerían también de cualquier deformación inicial que hubiera sido necesaria para ajustar las dimensiones de la estructura a las de la base entre A y B. Siguiendo con la figura 3.2, vemos que si el pasador B del ejemplo 3 no pudiese girar libremente, el soporte podría transmitir un par a la viga a través del pasador. Por tanto, habría cuatro reacciones desconocidas actuando sobre la viga, es decir, la fuerza en A, las dos componentes de fuerza en B y el momento del par en B. Por consiguiente, el conjunto de las tres ecuaciones escalares de equilibrio independientes no proporcionarían información suficiente para calcular las cuatro incógnitas.

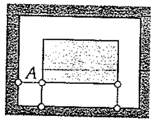
De un cuerpo rígido o de una combinación de éstos que pueda tratarse en conjunto como un único cuerpo rígido que disponga de más ligaduras de las necesarias para mantenerse en equilibrio se dice que es *hiperestático* o que está *estáticamente indeterminado*. De las ligaduras, o vínculos, que pueden retirarse sin destruir el estado de equilibrio del cuerpo se dice que son *superabundantes* o *redundantes*. El número de ligaduras superabundantes presentes corresponde al grado de hiperestaticidad o de indeterminación estática y es igual al número total de fuerzas exteriores desconocidas menos el número de ecuaciones de equilibrio independientes disponibles. Por otra parte, los cuerpos que están sujetos por el número mínimo de ligaduras necesarias para asegurar una configuración de equilibrio se denominan *isostáticos* o *estáticamente determinados* y para ellos bastan las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas exteriores desconocidas.

Los problemas de equilibrio incluidos en este apartado y en todos los del texto de este tomo I de *Estática*, se reducen generalmente a cuerpos isostáticos en que las ligaduras son justamente las suficientes para asegurar una posición estable y donde las fuerzas soportantes desconocidas pueden determinarse mediante las ecuaciones de equilibrio independientes disponibles. No obstante, con este breve estudio queremos advertir al lector de que antes de intentar resolver un problema de equilibrio se asegure de la naturaleza de las ligaduras. Sabremos que un problema es hiperestático cuando las reacciones exteriores presenten más incógnitas que ecuaciones de equilibrio independientes dispongamos para el sistema de fuerzas presente. Conviene siempre contar el número de incógnitas que introduzcan las reacciones exteriores que se ejercen sobre el cuerpo y comprobar que podemos escribir el mismo número de ecuaciones independientes; de otro modo, podríamos desperdiciar tiempo y esfuerzo en ternas. En este caso concluimos en que el cuerpo se halla incompletamente inmovilizado bajo ligaduras parciales. En la ilustración *c* tenemos un caso parecido de inmovilización incompleta ya que las tres barras paralelas no pueden ofrecer resistencia inicial alguna a un pequeño movimiento vertical del cuerpo que resultase de la aplicación de cargas externas en esa dirección. Las ligaduras en estos dos últimos casos suelen llamarse *impropias*. En la ilustración *d* de la misma figura tenemos un caso de inmovilización total, con una barra 4 que actúa de cuarta ligadura, innecesaria para mantener la inmovilidad; o sea, esta barra 4 es una ligadura *superabundante* y el problema de determinar las reacciones es *hiperestático*.

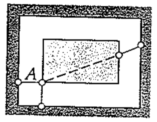
Al igual que en los cuatro ejemplos de la figura 3.7, es generalmente posible, por observación directa, establecer si las reacciones sobre un cuerpo en equilibrio bidimensional son suficientes o adecuadas (propias), parciales (impropias) o superabundantes. Tal como ya se indicó antes, la gran mayoría de los problemas de este libro son isostáticos (o estáticamente determinados) y en ellos las ligaduras son adecuadas (o propias).

(d) Resolución de problemas. Los problemas tipo que siguen a este apartado ilustran la utilización de los diagramas de sólido libre y de las ecuaciones de equilibrio en problemas típicos de Estática. Los procedimientos de su resolución deben estudiarse a fondo. En los problemas de este capítulo y en los de toda la Mecánica, es importante desarrollar unos planteos lógicos y sistemáticos acordes con los siguientes pasos:

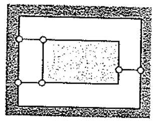
1. Identificar claramente qué cantidades se conocen y qué cantidades no se conocen.
2. Elegir sin ambigüedades el cuerpo (o grupo de cuerpos interconectados que se considera como cuerpo único) a aislar y dibujar su diagrama de sólido libre rotulando en éste todas las fuerzas y pares externos, conocidos y desconocidos, que actúan sobre el cuerpo aislado.
3. Definir un sistema de ejes de referencia cómodo, los cuales deben ser siempre a derechas si han de emplearse productos vectoriales. Los polos, o centros de momentos, se elegirán de modo que simplifiquen los cálculos. En general, lo mejor será tomar como centro de momentos un punto por el que pase el mayor número de fuerzas desconocidas. Muchas veces será necesario resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio, pero ese trabajo puede reducirse al mínimo o evitarse eligiendo cuidadosamente los centros de momentos y los ejes de referencia.
4. Identificar y especificar los principios aplicables de fuerzas y momentos o las ecuaciones que rigen las condiciones de equilibrio del problema. En los problemas tipo en que se incluyen esas relaciones, se presentan entre paréntesis precediendo a los cálculos principales.
5. En cada problema, hay que comparar el número de ecuaciones independientes con el número de incógnitas.
6. Llévense a cabo los cálculos y verifíquense los resultados. En numerosos problemas es posible desarrollar el sentido práctico haciendo antes una estimación o conjetura acerca de cuál puede ser un resultado razonable, para luego compararla con los valores calculados.



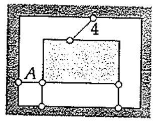
(*a*) Inmovilización total.
Ligaduras adecuadas



(*b*) Inmovilización incompleta.
Ligaduras parciales.



(*c*) Inmovilización incompleta.
Ligaduras parciales

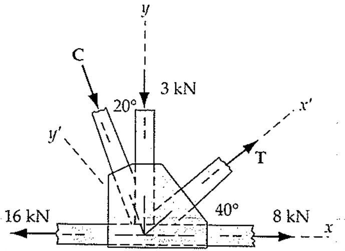


(*d*) Inmovilización excesiva.
Ligaduras superabundantes

Figura 3.7

PROBLEMA TIPO 3.1

Determinar los módulos de las fuerzas C y T que actúan sobre los miembros que concurren en el nudo de armadura de puente junto con las otras tres fuerzas representadas.



Solución. El esquema adjunto constituye el diagrama de sólido libre del nudo en cuestión y muestra las cinco fuerzas que se encuentran en equilibrio.

① ***Solución I (algebraica escalar).*** Para los ejes *x*-*y* dados tenemos

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad (8 + T\cos 40° + C \text{ sen } 20°) - 16 = 0$$

$$0{,}766T + 0{,}342C = 8 \qquad (a)$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad T \text{ sen } 40° - C\cos 20° - 3 = 0$$

$$0{,}643T - 0{,}940C = 3 \qquad \textbf{(b)}$$

La resolución del sistema formado por las ecuaciones (*a*) y (*b*) da

$$T = 9{,}09 \text{ kN} \qquad C = 3{,}03 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Solución II (algebraica escalar). Para evitar la aparición de un sistema de ecuaciones podemos emplear los ejes *x'*-*y'* sumando primero en dirección *y'* y eliminando así la intervención de *T*. O sea, ②

$$[\Sigma F_{y'} = 0] \qquad -C\cos 20° - 3\cos 40° - 8 \text{ sen } 40° + 16 \text{ sen } 40° = 0$$

$$C = 3{,}03 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_{x'} = 0] \qquad T + 8\cos 40° - 16\cos 40° - 3 \text{ sen } 40° - 3{,}03 \text{ sen } 20° = 0$$

$$T = 9{,}09 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Solución III (algebraica vectorial). Siendo **i** y **j** los vectores unitarios de los ejes *x* e *y*, al igualar a cero la suma de las fuerzas para imponer la condición de equilibrio se obtiene

$$[\Sigma \mathbf{F} = 0] \qquad 8\mathbf{i} + (T\cos 40°)\mathbf{i} + (T \text{ sen } 40°)\mathbf{j} - 3\mathbf{j} + (C \text{ sen } 20°)\mathbf{i} - (C\cos 20°)\mathbf{j} - 16\mathbf{i} = 0$$

Igualando a cero los coeficientes de **i** y **j** resulta

$$8 + T\cos 40° + C \text{ sen } 20° - 16 = 0$$

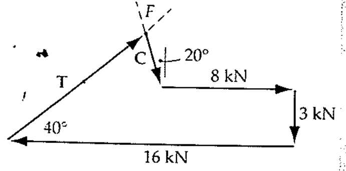
$$T \text{ sen } 40° - 3 - C\cos 20° = 0$$

que son, por supuesto, las mismas ecuaciones (*a*) y (*b*) resueltas antes.

Solución IV (gráfica). Se acompaña la representación del polígono de fuerzas que representa la igualación a cero de la suma vectorial de las cinco fuerzas. Se ve enseguida que las ecuaciones (*a*) y (*b*) son las proyecciones de los vectores en

① **Como se trata de un problema de fuerzas concurrentes, no es necesaria una ecuación de momentos.**

② **La elección de unos ejes de referencia que faciliten los cálculos es siempre una cuestión importante. En este ejemplo, existe también la posibilidad de tomar unos ejes respectivamente coincidentes y perpendiculares a *C* y sumar las componentes de las fuerzas normales a *C*, para que ésta no aparezca.**



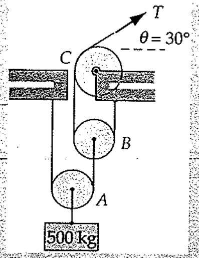
las direcciones x e y. Análogamente, al proyectar en las direcciones x' e y' se obtienen las ecuaciones de la solución II.

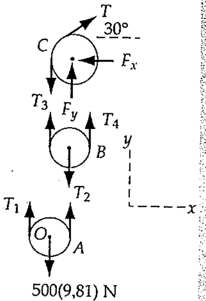
La solución gráfica se obtiene fácilmente. Los vectores conocidos se trazan, a ③ la escala adoptada, uno a continuación de otro y luego se cierra el polígono con rectas paralelas a las direcciones de **T** y **C**. Con el punto F de intersección se llega a la solución y ello nos permite medir directamente sobre el dibujo los módulos de T y C con la precisión que hayamos incorporado a la construcción gráfica.

③ **Los vectores conocidos pueden sumarse en un orden cualquiera, pero deben sumarse *antes* que los vectores incógnita.**

PROBLEMA TIPO 3.2

Calcular la tensión T en el cable que soporta la masa de 500 kg a través del dispositivo de poleas representado. Cada polea puede rotar libremente y la masa de todas las piezas es despreciable comparada con la de la carga. Hallar la intensidad de la fuerza total que actúa sobre el cojinete de la polea C.





Solución. Se representa el diagrama de sólido libre de cada polea con relación ① a las otras. Empezamos por el de la polea A, que incluye una única fuerza conocida. Designando por r el radio no especificado de la polea, el equilibrio de los momentos respecto a su centro O y el equilibrio de las fuerzas en dirección vertical requieren que

② $[\Sigma M_O = 0]$ $\quad T_1 r - T_2 r = 0 \qquad T_1 = T_2$

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad T_1 + T_2 - 500(9{,}81) = 0 \qquad 2T_1 = 500(9{,}81) T_1 = T_2 = 2452 \text{ N}$

Con el ejemplo de esta polea A, el equilibrio de las fuerzas actuantes en la polea B podemos escribirlo, por inspección, así

$$T_3 = T_4 = T_2/2 = 1226 \text{ N}$$

Para la polea C, el ángulo $\theta = 30°$ no afecta en modo alguno al momento de T respecto al centro de la polea, por lo que el equilibrio de los momentos requiere

$$T = T_3 \qquad \text{o bien} \qquad T = 1226 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

El equilibrio de la polea en las direcciones x e y requiere

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad 1226 \cos 30° - F_x = 0 \qquad F_x = 1062 \text{ N}$

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad F_y + 1226 \text{ sen } 30° - 1226 = 0 \qquad F_y = 613 \text{ N} \qquad$ *Resp.*

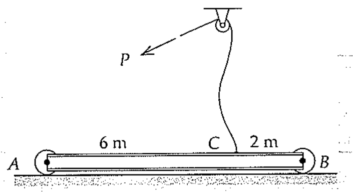
$[F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}]$ $\quad F = \sqrt{(1062)^2 + (613)^2} = 1226 \text{ N}$

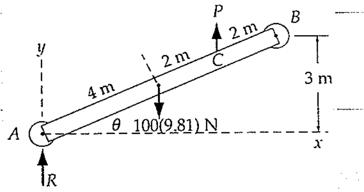
① **Obsérvese que se tiene muy en cuenta la tercera ley de Newton y a cada acción se asocia una reacción igual y opuesta.**

② **Es evidente que el radio r no influye en los resultados. Habiendo analizado una única polea, los resultados deben hacerse patentes por inspección.**

PROBLEMA TIPO 3.3

Inicialmente la viga uniforme en doble T de 100 kg descansa sobre la superficie horizontal mediante los rodillos A y B. Utilizando el cable sujeto en C se desea elevar el extremo B hasta una altura de 3 m por encima del extremo A. Hallar la tracción P a ejercer, la reacción en A y el ángulo θ que forma la viga con la horizontal en la posición final.





Solución. Al construir el diagrama de sólido libre tenemos en cuenta que la reacción sobre el rodillo A y el peso son fuerzas verticales. Por consiguiente, habida cuenta de la ausencia de fuerzas horizontales, P será también vertical. Según vimos en el problema tipo 3.2, la tensión P en el cable es igual a la fuerza aplicada a la viga en C.

Tomando momentos respecto a A, no aparece la fuerza R y resulta

① $[\Sigma M_A = 0]$ $\quad P(6 \cos \theta) - 981(4 \cos \theta) = 0 \qquad P = 654 \text{ N} \qquad$ *Resp.*

El equilibrio de las fuerzas verticales requiere

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad 654 + R - 981 = 0 \qquad R = 327 \text{ N} \qquad$ *Resp.*

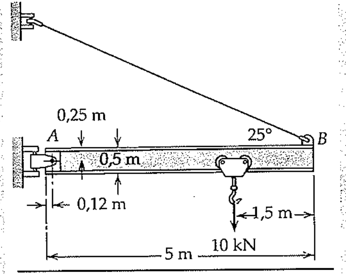
El ángulo θ depende sólo de la geometría y es

$$\text{sen } \theta = 3/8 \qquad \theta = 22{,}0° \qquad \textit{Resp.}$$

① **Es evidente que el equilibrio de este sistema de fuerzas paralelas es independiente de $\boldsymbol{\theta}$.**

PROBLEMA TIPO 3.4

En la grúa de la figura, determinar la tensión T en el cable de soporte y el módulo de la fuerza en el pasador A. La viga AB es una viga en doble T estándar de 0,5 m y 95 kg por metro de longitud.



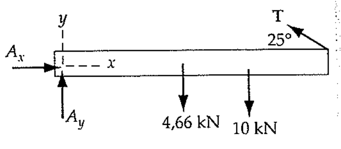


Diagrama de sólido libre

Solución algebraica. Evidentemente, el sistema es simétrico respecto al plano vertical x-y que pasa por el centro de la viga, por lo que el problema puede analizarse como de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanarias. El diagrama de sólido libre de la viga es el representado en la figura con la reacción del pasador en A descompuesta en sus dos componentes rectangulares. El peso de la viga vale $95(10^{-3})(5)(9{,}81) = 4{,}66$ kN y está aplicado en su centro. Se observará que hay tres incógnitas A_x, A_y y T, las cuales pueden determinarse con las tres ecuaciones de equilibrio. Empezaremos tomando momentos respecto a A, con lo que eliminamos de la ecuación dos de las tres incógnitas. Al escribir esta ecuación, es más sencillo considerar los momentos de las componentes x e y de **T** que calcular la distancia de **T** a A. ① Entonces, tomando como positivo el sentido antihorario, podemos escribir

② $$[\Sigma M_A = 0] \qquad (T \cos 25°)0{,}25 + (T \text{ sen } 25°)(5 - 0{,}12) - 10(5 - 1{,}5 - 0{,}12) - 4{,}66(2{,}5 - 0{,}12) = 0$$

de donde

$$T = 19{,}61 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Igualando a cero la suma de las fuerzas en las direcciones x e y se tiene

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad A_x - 19{,}61 \cos 25° = 0 \qquad A_x = 17{,}77 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad A_y + 19{,}61 \text{ sen } 25° - 4{,}66 - 10 = 0 \qquad A_y = 6{,}37 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

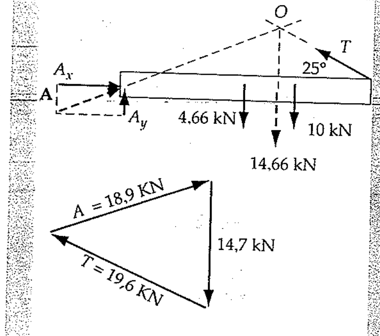
③ $$\left[A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}\right] \qquad A = \sqrt{(17{,}77)^2 + (6{,}37)^2} \qquad A = 18{,}88 \text{ kN}$$

Solución gráfica. Para la solución gráfica se utiliza el principio de que tres fuerzas en equilibrio deben ser concurrentes, componiendo así las dos fuerzas verticales conocidas de 4,66 y 10 kN en una sola fuerza de 14,66 kN, situada tal como se muestra en el diagrama de sólido libre modificado de la figura inferior. La posición de esta carga puede determinarse gráfica o algebraicamente. La intersección de la fuerza de 14,66 kN con la recta soporte de la tensión **T** desconocida define el punto de concurso O por el que debe pasar la recta soporte de la reacción **A** del pasador. Los módulos desconocidos de **T** y **A** pueden determinarse ahora construyendo el polígono cerrado de fuerzas en equilibrio. Una vez dibujada a escala la carga vertical conocida, tal como se muestra en la figura inferior, por el extremo del vector representativo de la fuerza de 14,7 kN se traza una recta paralela a **T**. Análogamente, por el origen de la fuerza de 14,7 kN se traza una recta paralela a **A**, cuya dirección ya conocemos. La intersección de las rectas representativas de los vectores **T** y **A** determina los módulos T y A de éstas para que sea nula la suma de las tres fuerzas. Esos módulos pueden medirse directamente sobre el diagrama dibujado a escala. Las componentes x e y de A pueden construirse, si se desea, sobre el polígono de fuerzas.

① La justificación de este paso se encuentra en el teorema de Varignon expuesto en el apartado 2.4. Este principio es de gran aplicación en Mecánica.

② Normalmente, en los problemas bidimensionales el cálculo de los momentos se efectúa con mayor facilidad mediante operaciones escalares que recurriendo al producto vectorial r × F. Como veremos más adelante, en tres dimensiones suele ocurrir todo lo contrario.

③ Si se desea, puede determinarse la dirección de la reacción en A. Ahora bien, para diseñar el pasador A o para determinar su resistencia interna interesa únicamente el módulo de la fuerza.



Solución gráfica

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.1 Hallar las tensiones en los cables CA y CB.

Resp. $T_{CA} = 2870$ N $\qquad T_{CB} = 3520$ N

3.2 ¿Qué fuerza horizontal P debe ejercer el operario sobre la cuerda para colocar el embalaje de 50 kg exactamente en la vertical del vehículo?

3.3 La masa de la viga uniforme es de 60 kg por metro de longitud. Hallar las reacciones en los apoyos.

Resp. $A_y = 3060$ N $\qquad B_y = 2060$ N

3.4 La esfera homogénea y lisa de 50 kg descansa sobre el plano inclinado 30 grados y se apoya contra la pared lisa vertical B. Hallar las fuerzas de contacto en A y B.

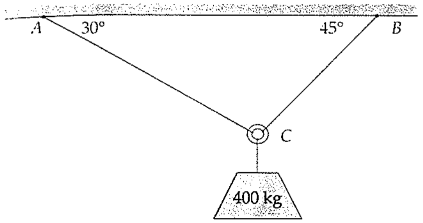


Figura problema 3.1

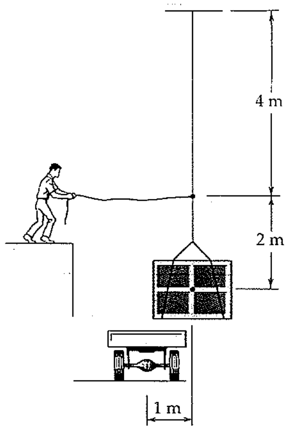


Figura problema 3.2

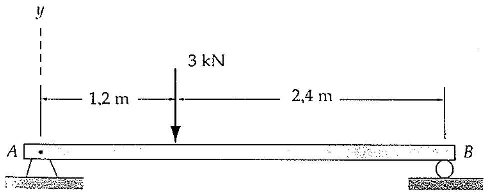


Figura problema 3.3

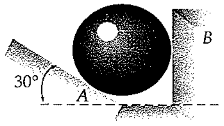


Figura problema 3.4

3.5 La barra angular uniforme de brazos iguales tiene una masa de 20 kg y se apoya en el plano vertical tal como se muestra. Calcular la fuerza F_A que soporta el pasador A.

Resp. $F_A = 277$ N

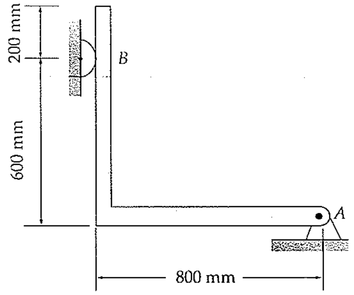


Figura problema 3.5

3.6 Para facilitar el cambio de posición de un gancho elevador cuando no lleva carga, se utiliza un sustentador deslizante como el representado. Los resaltes A y B se encajan en las alas de una viga de cajón cuando el gancho que sale por una ranura horizontal practicada en la viga soporta una carga. Calcular las reacciones en A y B cuando el gancho sostiene una masa de 300 kg.

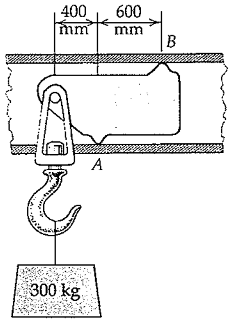


Figura problema 3.6

3.7 Hallar las reacciones en A y E si $P = 500$ N. ¿Cuál puede ser el valor máximo de P para que haya equilibrio estático? El peso de la estructura se considera despreciable respecto a las cargas aplicadas.

Resp. $A_x = -1290$ N $\qquad A_y = 2960$

$E_x = 3290$ N $\qquad P = 1732$ N

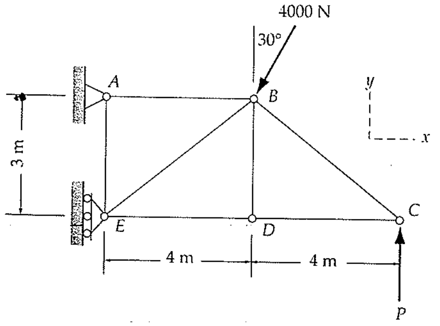


Figura problema 3.7

3.8 El pasador *A* puede soportar una fuerza máxima de 3,2 kN. ¿Cuál será entonces la máxima carga *L* que pueda soportar el soporte?

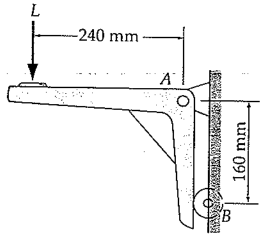


Figura problema 3.8

3.9 La barra uniforme *AB* con una masa de 50 kg soporta en *A* la carga de 200 kg. Calcular la tensión *T* en el cable portante y la intensidad F_B de la fuerza que soporta el pasador *B*.
Resp. $T = 7650$ N $F_B = 5660$ N

3.10 Resolver gráficamente el problema 3.9. (*Sugerencia:* Combinar los pesos de las masas de 50 y 200 kg en una sola fuerza.)

3.11 Un hombre empuja rampa arriba y a velocidad constante la máquina de 40 kg de centro de masa *G*. Hallar la intensidad *P* de la fuerza requerida y las fuerzas de reacción normales en *A* y *B*. Se desprecian los pequeños efectos del rozamiento.
Resp. $P = 112{,}1$ N $N_B = 219$ N $N_A = 207$ N

3.12 Para que se acomode a las subidas y bajadas de la marea, la plancha entre el embarcadero y el flotador se apoya, tal como se muestra, en los dos rodillos. Si el centro de masa de la plancha de 300 kg está en *G*, calcular la tracción *T* que sufre el cable horizontal asegurado a la cornamusa y la fuerza bajo el rodillo *A*.

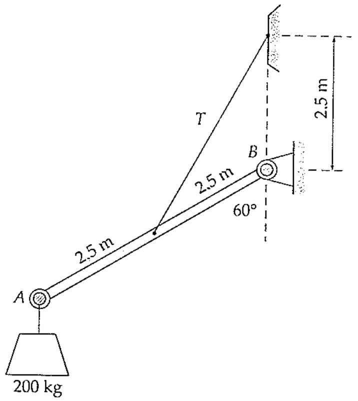


Figura problema 3.9

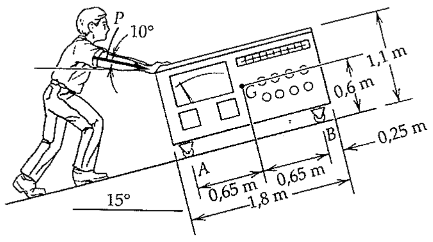


Figura problema 3.11

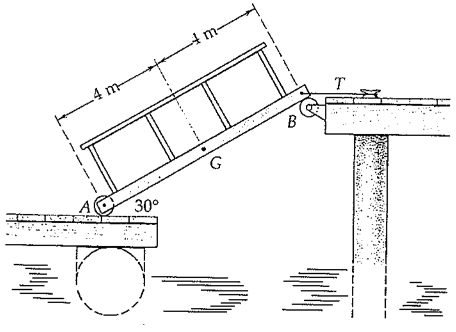


Figura problema 3.12

3.13 Durante una prueba del motor, la hélice genera un empuje *T* de 3000 N sobre el avión de 1800 kg con centro de masa *G*. Las ruedas principales *B* están trabadas y no patinan y la pequeña rueda de cola *A* está sin frenar. Calcular la variación porcentual *n* de las fuerzas normales en *A* y *B* respecto a sus valores "a motor parado".
Resp. $n_A = -32{,}6\%$ $n_B = 2{,}28\%$

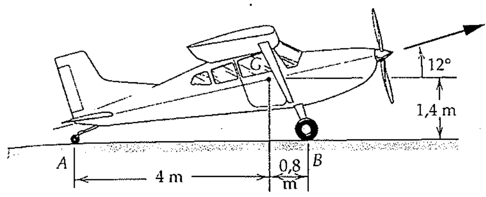


Figura problema 3.13

3.14 La rueda de 100 kg descansa sobre una superficie rugosa y carga contra el rodillo *A* cuando se aplica el par *M*. Si éste vale 60 N · m y la rueda no patina, calcular la reacción sobre el rodillo *A*.

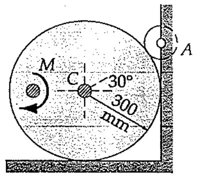


Figura problema 3.14

Problemas representativos

3.15 ¿Qué fracción *n* del peso *W* de un avión a reacción ha de ser el empuje neto (empuje en tobera *T* menos resistencia del aire *R*) para que se eleve a velocidad constante formando un ángulo *θ* con la horizontal?
Resp. $n = \operatorname{sen}\theta$

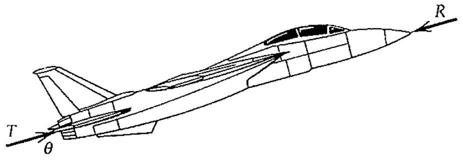


Figura problema 3.15

3.16 Determinar la fuerza *P* necesaria para mantener el motor de 200 kg en la posición en la cual $\theta = 30°$. El diámetro de la polea *B* es despreciable.

3.17 Los tres cables están atados al anillo *B* y el tensor *C* se aprieta hasta que soporta una tracción de 1,6 kN. Calcular el momento *M* en la base *D* del mástil debido a la tensión en el cable *AB*.
Resp. $M = 8$ kN · m

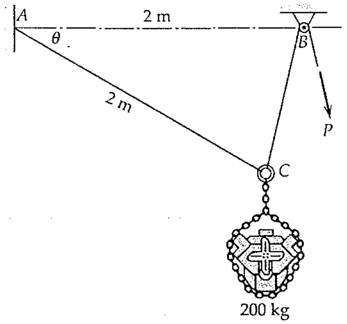


Figura problema 3.16

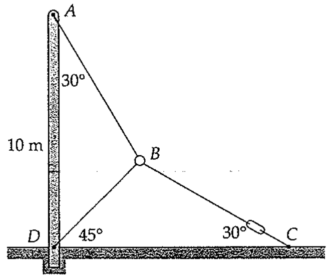


Figura problema 3.17

3.18 Calcular las tensiones en los cables 1 y 2 del sistema de poleas en función de la masa *m* del cilindro suspendido. Se desprecian las masas de las poleas pequeñas. El ángulo *α* es de 30°.

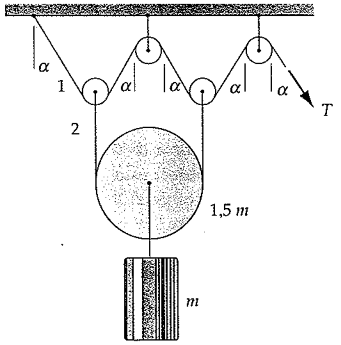


Figura problema 3.18

3.19 Se representan las fuerzas actuantes sobre cuatro viguetas concurrentes en una viga armada de puente. Calcular T_1 y T_2. Resolver el problema por dos métodos; primero, resolviendo un sistema de dos ecuaciones de equilibrio con las dos incógnitas; segundo, tomando unos ejes de referencia tales que permitan hallar cada incógnita con independencia de la otra.

Resp. $T_1 = 279$ kN $T_2 = 227$ kN

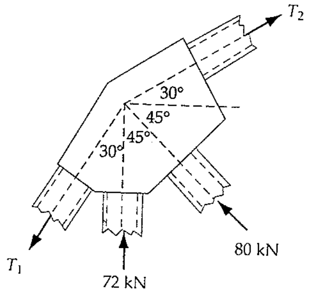


Figura problema **3.19**

3.20 El banco de madera simétrico tiene una masa de 15 kg. Determinar la mínima distancia x al extremo del tablero a la que una persona de 90 kg puede sentarse sin que el banco vuelque.

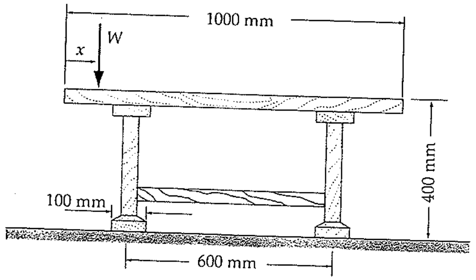


Figura problema **3.20**

3.21 Un ex alumno de Mecánica desea pesarse pero sólo dispone de una báscula A limitada a 400 N y un pequeño dinamómetro de resorte B que mide hasta 80 N. Con el montaje representado descubre que, al tirar de la cuerda de modo que B señala 76 N, la báscula indica 268 N. ¿Cuáles son su peso W y su masa m correctos?

Resp. $W = 648$ N $m = 66{,}1$ kg

3.22 Determinar la tracción T que sufre el tensor del sistema de poleas y cables en función de la masa m del cuerpo que soporta. Se desprecian las masas de las poleas y los cables.

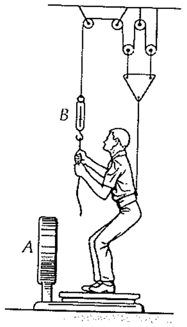


Figura problema **3.21**

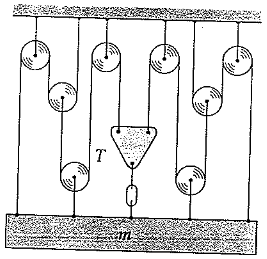


Figura problema **3.22**

3.23 El cable de la figura tiene una masa de 1,5 kg por metro de longitud y soporta la polea y el gancho de elevación que, juntos, tienen una masa de 5,4 kg. Hallar la fuerza P necesaria para mantener el equilibrio.

Resp. $P = 47{,}6$ N

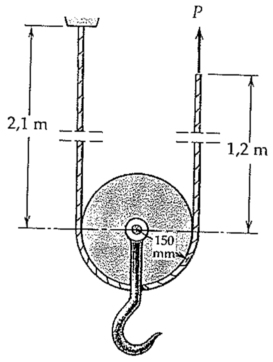


Figura problema **3.23**

3.24 Para apretar la tuerca hexagonal, la fuerza de 200 N produce un momento de 40 N · m respecto al eje del perno. Hallar las fuerzas que se ejercen entre la boca de la llave y la tuerca si el contacto se establece en los vértices A y B del hexágono.

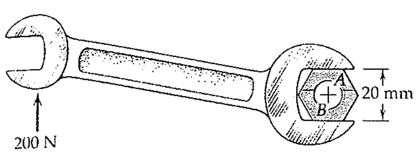


Figura problema **3.24**

3.25 Calcular la intensidad F_A de la fuerza que soporta el pasador A a consecuencia de la acción del par de 80 N · m aplicado al extremo C de la barra.

Resp. $F_A = 533$ N

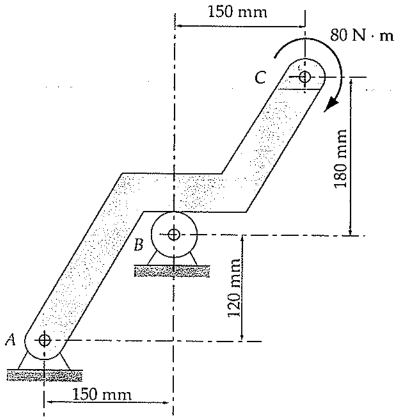


Figura problema **3.25**

3.26 El dispositivo de la figura se emplea para apretar el laminador que se pega a cada cara de un tablero cerca del borde. Si al mango se aplica una fuerza de 120 N, determinar qué fuerza ejerce cada uno de los rodillos iguales sobre su superficie correspondiente.

3.27 Navegando a vela a velocidad constante con viento en popa, el velero es impulsado por una fuerza de 4 kN contra su vela mayor y una fuerza de 1,6 kN contra su foque. La fuerza R representa la resistencia total debida al rozamiento fluido con el agua. Determinar la resultante de las fuerzas laterales, perpendiculares al movimiento, que el agua aplica al casco.

Resp. $M = 9{,}6$ kN · m

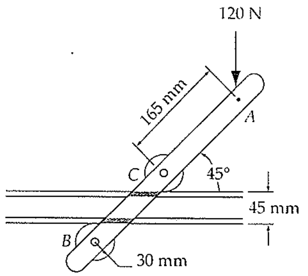


Figura problema **3.26**

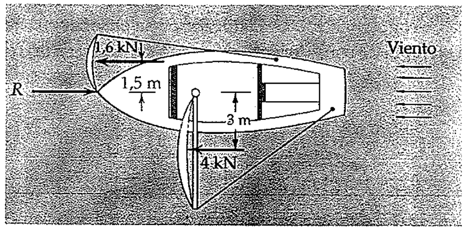


Figura problema **3.27**

3.28 El poste uniforme de 15 m tiene una masa de 150 kg y apoya sus extremos lisos contra las paredes verticales, siendo T la tensión del cable vertical que lo soporta. Calcular las reacciones en A y B.

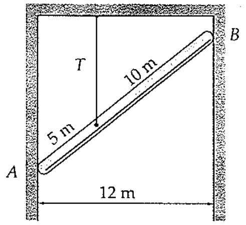


Figura problema **3.28**

3.29 Un aro uniforme de masa m y radio r lleva una masa m_0 a la distancia b del centro y se encuentra en equilibrio sobre el plano inclinado que forma un ángulo α respecto a la horizontal. Si las superficies en contacto son lo bastante rugosas para que no haya deslizamiento, escribir la expresión del ángulo θ que define la posición de equilibrio.

Resp. $\theta = \operatorname{arcsen}\left[\frac{r}{b}\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)\operatorname{sen}\alpha\right]$

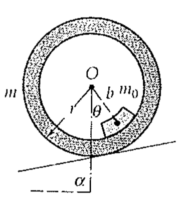


Figura problema 3.29

3.30 La llave de gancho de la figura se utiliza para hacer girar collares y ejes. Si se precisa un momento de 80 N · m para hacer girar el collar de 200 mm de diámetro alrededor de su centro *O* bajo la acción de la fuerza aplicada *F*, determinar la fuerza de contacto *R* sobre la superficie lisa en *A*. El encaje del pitón en *B* puede considerarse efectuado en la periferia del collar.

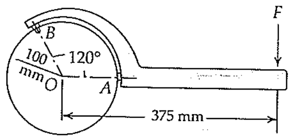


Figura problema 3.30

3.31 En la figura se muestra de que modo un bloque colocado bajo la cabeza de un martillo de orejas puede facilitar notablemente la extracción de un clavo. Si para arrancar éste hace falta tirar del mango con una fuerza de 200 N, calcular la tracción T en el clavo y la intensidad *A* de la fuerza ejercida por la cabeza del martillo sobre el bloque. Las superficies en contacto en *A* son lo bastante rugosas para evitar el deslizamiento.

Resp. $T = 800$ N $A = 755$ N

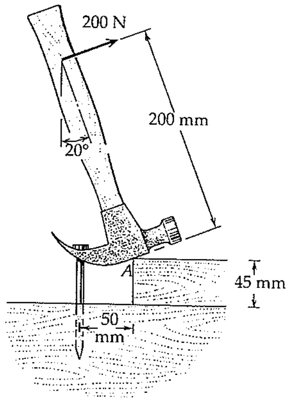


Figura problema 3.31

3.32 Calcular la intensidad de la fuerza que soporta el pasador *A* bajo la acción de la carga de 1.5 kN aplicada al soporte. Se desprecia el rozamiento en la ranura.

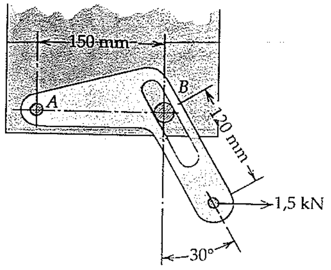


Figura problema 3.32

3.33 Las dos tablas están sujetas por un clavo largo. Si, para aflojar éste, hay que aplicar una fuerza *P* de 120 N al mango de cada palanca, hallar la tracción *T* que consecuentemente sufre el clavo. Hallar también para qué valor de *b* desaparece toda tendencia a doblar el clavo. Consignar las hipótesis que se hagan.

Resp. $T = 1560$ N $b = 53{,}8$ mm

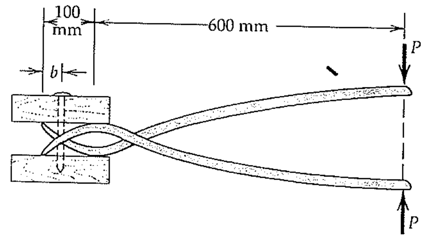


Figura problema 3.33

3.34 El pasador *A*, que conecta la viga de acero de 200 kg con centro de gravedad en *G* a la columna vertical, está soldado a la viga y a la columna. Para comprobar la soldadura, el hombre de 80 kg carga la viga ejerciendo una fuerza de 300 N contra la cuerda que, tal como se muestra, pasa por el orificio de la viga. Calcular el momento *M* del par que soporta el pasador.

3.35 Hallar la fuerza necesaria para iniciar la rodadura del cilindro de masa *m* sobre el escalón de altura *h*.

$$\text{Resp. } P = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}$$

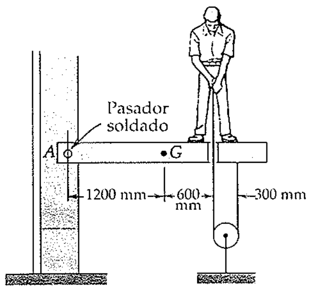


Figura problema 3.34

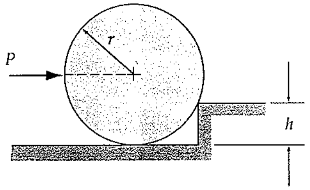


Figura problema 3.35

3.36 El cable de longitud *c* soporta la viga *OA* de masa *m*. Demostrar, empleando las geometrías del polígono de fuerzas y de la figura, que la tensión en el cable es $T = mgc/(2h)$.

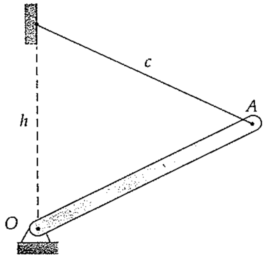


Figura problema 3.36

3.37 Determinar qué par de momento *M* hay que aplicar a la rueda de 30 kg, con centro de masa en *G*, para que la misma salve el bordillo de 40 mm. Las superficies en contacto de la rueda y el bordillo son lo bastante rugosas para evitar el deslizamiento.

Resp. $M = 26{,}3$ N · m

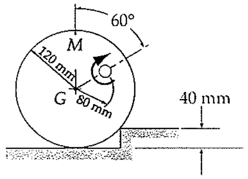


Figura problema 3.37

3.38 Merced al pequeño obstáculo contiguo al pie *A*, el armario uniforme de masa *m* no se puede deslizar. Si los pies son pequeños y el rozamiento es despreciable, determinar las fuerzas normales en *A* y *B* en función del ángulo *θ* de inclinación. ¿Para qué valor de *θ* es nula la fuerza normal en *B* y cuál es el significado físico de esa situación?

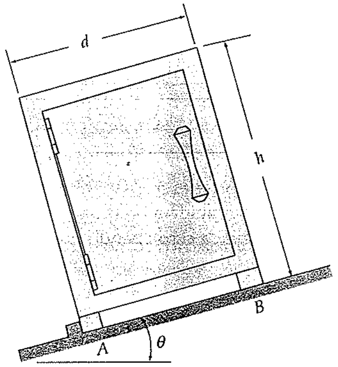


Figura problema 3.38

3.39 Sin carga, la camioneta de 1600 kg tiene su centro de gravedad en la posición que se indica. Si se añade un carga cuyo centro de gravedad se encuentra a una distancia $x = 400$ mm por detrás del puente trasero, determinar para qué peso W_L de esa carga serán iguales las fuerzas reactivas sobre todas las ruedas.

Resp. $W_L = 2400$ N

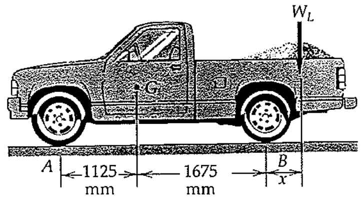


Figura problema 3.39

3.40 En el problema 3.39 la posición que se indica para el centro de gravedad de la camioneta de 1600 kg corresponde a la ausencia de carga. En la caja se coloca una carga W_L de masa 360 kg y se comprueba que el peso se reparte un 46 por ciento delante y un 54 por ciento detrás. Determinar la posición x del centro de gravedad de la carga.

3.41 Las dos poleas sin peso son solidarias. Su giro en torno al cojinete O lo impide un cable arrollado en la pequeña y asegurado a la misma y sujeto al punto A. Calcular la intensidad R de la fuerza que soporta el cojinete O para la carga aplicada de 2 kN.

Resp. R = 4.38 kN

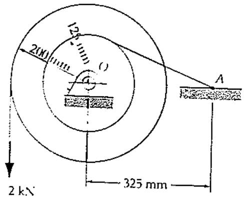


Figura problema 3.41

3.42 El modelo de avión se está ensayando en un túnel aerodinámico. El soporte está unido a un dinamómetro para fuerzas y momentos que marca cero cuando no hay corriente de aire. En las condiciones de ensayo, la sustentación L, la resistencia D del aire y el momento de cabeceo M_G actúan como se representa. El dinamómetro registra la sustentación, la resistencia del aire y un momento M_P. Determinar M_G en función de L, D y M_P.

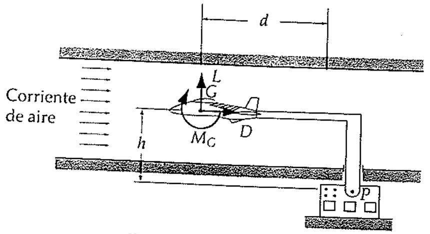


Figura problema 3.42

3.43 El bastidor simétrico tiene una masa de 1200 kg y está apoyado y cargado como se representa. Si la carga que puede soportar el pasador A está limitada a 20 kN, hallar la carga lateral P máxima permitida.

Resp. P = 18,9 kN

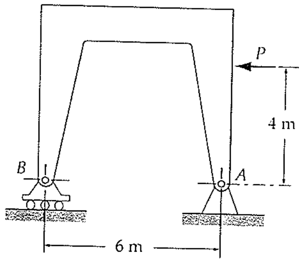


Figura problema 3.43

3.44 A consecuencia de la carga permanente de 900 N que le produce la tracción del cable de alimentación eléctrica, en el poste de luz se ha desarrollado una desviación de 5 grados. Si la masa por unidad de longitud del poste de 9 m es de 24 kg/m y es despreciable la masa del portalámparas, hallar las reacciones en la base A.

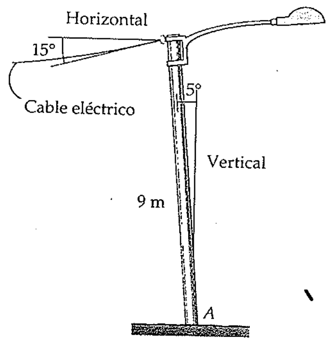


Figura problema 3.44

3.45 La máquina gimnástica consiste en una camilla liviana montada sobre rodillos de modo que puede desplazarse libremente a lo largo de la rampa. A la camilla están atados dos cables, uno para cada mano. Si éstas se mantienen juntas de modo que los cables se mantienen paralelos y si cada uno de éstos permanece prácticamente en un plano vertical, determinar la fuerza P que cada mano debe ejercer sobre su cable para conservar una posición de equilibrio. La masa de la persona es de 70 kg, la inclinación de la rampa es de 15° y el ángulo β vale 18°. Calcular además la fuerza R que la rampa ejerce sobre la camilla.

Resp. P = 45,4 N R = 691 N

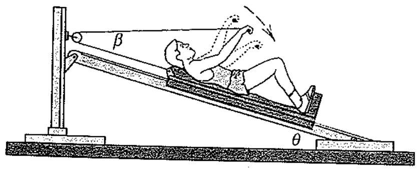


Figura problema 3.45

3.46 A través del árbol C, la polea A ejerce un par constante de 100 N · m sobre la bomba. La tensión en la parte inferior de la correa es de 600 N. El motor de impulsión B tiene una masa de 100 kg y su giro es horario. Hallar la intensidad R de la fuerza que sufre el pasador del apoyo O.

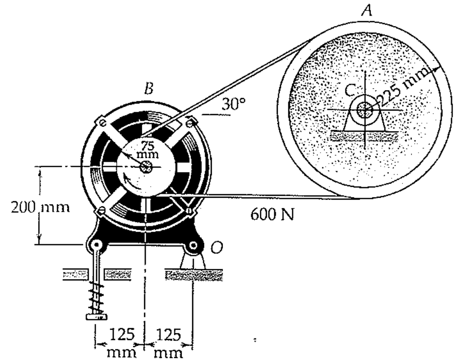


Figura problema 3.46

3.47 El punto G es el centro de masa del automóvil de tracción trasera de 1400 kg de masa. Calcular primero las fuerzas bajo las parejas de ruedas delanteras y traseras cuando el vehículo está en reposo. Repetir seguidamente los cálculos para el caso que se muestra, en que el parachoques delantero se ensaya haciendo que el automóvil empuje, mediante las ruedas traseras, contra la barrera fija con una fuerza de 2500 N. Despréciese el rozamiento en el contacto parachoques-barrera, pero no en el contacto ruedas-suelo.

Resp. En situación normal, N_A = 6310 N N_B = 7430 N
Durante el ensayo, N_A = 6720 N N_B = 7010 N

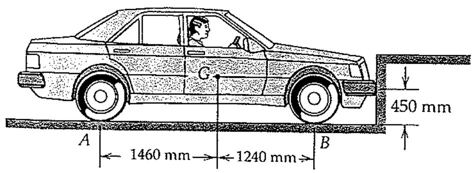


Figura problema 3.47

3.48 El tractor con neumáticos de goma de la figura tiene una masa de 13.5 Mg, su centro de masa está en G y se utiliza para empujar o arrastrar cargas pesadas. Determinar la carga P que puede arrastrar a una velocidad constante de 5 km/h subiendo una pendiente del 15%, si la fuerza motriz ejercida por el suelo en cada una de sus cuatro ruedas es el 80% de la fuerza normal bajo la rueda correspondiente. Hallar, también, la reacción normal N_B bajo el par de ruedas traseras B.

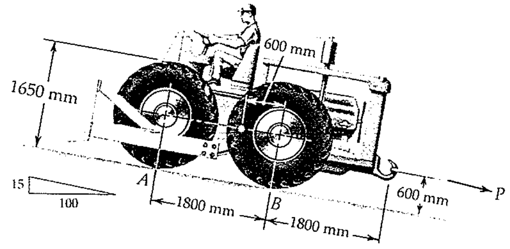


Figura problema 3.48

3.49 El camión volquete se utiliza para separar del tocón el pedazo de tronco cortado de un árbol grande. Se ha medido la sección del tronco y se calcula que la masa de éste es de 600 kg. La caja abatible tiene una masa de 300 kg y su centro de masa G_1 se encuentra justo por encima de las ruedas posteriores en la posición de levantamiento. Calcular el momento del par que se aplica al volquete sobre su eje O para efectuar el levantamiento. Calcular también las correspondientes fuerzas que actúan bajo las parejas de ruedas delanteras y traseras del camión. La masa de éste es de 3100 kg, sin contar el volquete, y su centro de masa está en G_2.

Resp. M = 2650 N · m
R_F = 15,60 kN R_R = 23,6 kN

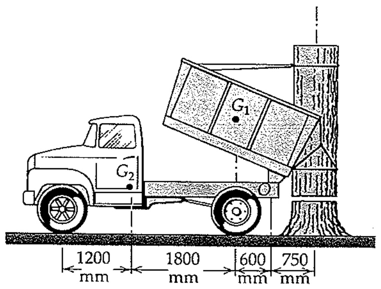


Figura problema 3.49

3.50 La abertura de carga de un avión de fuselaje de sección circular consiste en un portón semicircular uniforme AB de masa m. Determinar la compresión C que sufre en B el puntal horizontal para mantener abierto el portón en la posición representada. Hallar también la expresión de la fuerza total que soporta la bisagra A. (Consúltese en la tabla D.3 del apéndice D la posición del centroide o centro de masa del portón.)

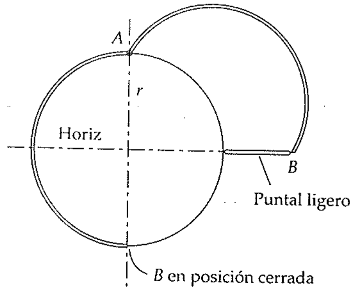


Figura problema 3.50

3.51 La abertura de carga de un avión de fuselaje de sección circular consiste en el portón cuarto circular AB de masa m. En la bisagra A hay un trinquete que mantiene el portón abierto en la posición representada. Hallar el momento que ejerce la bisagra sobre el portón.

Resp. $M_A = 0{,}709\ mgr$

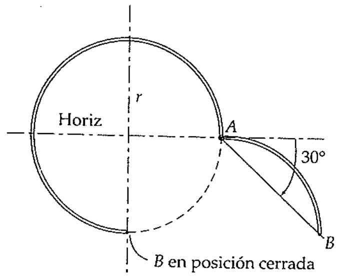


Figura problema 3.51

3.52 Para tender el ancla y que se clave en el fondo arenoso, el motor de la motora de 40 Mg de centro de gravedad en G va atrás para generar un empuje horizontal T de 2 kN. Si la cadena del ancla forma un ángulo de 60° con la horizontal, determinar el desplazamiento b hacia proa del centro de empuje con relación a la posición que ocupa cuando la embarcación flota libre. El centro de empuje es el punto por el que pasa la resultante de las fuerzas de empuje hidrostático.

3.53 Hallar la tensión T del cable y las reacciones en A y B para los casos (a) $h = 0{,}75d$ y (b) $h = 1{,}25d$. El cuerpo de masa m es homogéneo y sus pies son pequeños. El rozamiento es despreciable. (*Advertencia*: Asegúrese de que el equilibrio es posible en cada caso.)

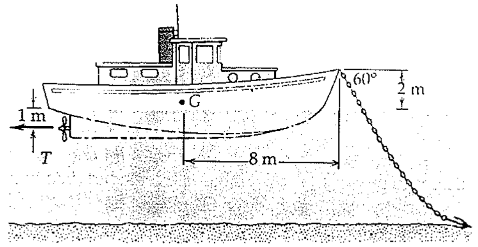


Figura problema 3.52

Resp. (*a*) $T = \frac{\sqrt{2}}{2}\ mg, N_A = \frac{\sqrt{2}}{16}\ mg, N_B = \frac{7\sqrt{2}}{16}\ mg$

(*b*) No hay equilibrio

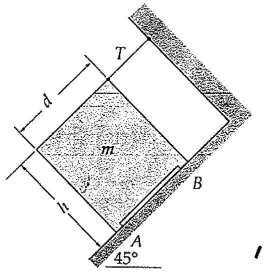


Figura problema 3.53

3.54 La grúa está izando una excavadora de 4,20 Mg. El centro de masa de la pluma OA, cuya masa es de 2 Mg, se encuentra en su punto medio. Calcular la tensión del cable en el punto B y el valor de la fuerza que soporta el pasador O en la posición de equilibrio a 60°. Se desprecia la anchura de la grúa.

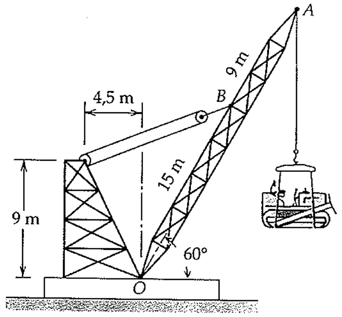


Figura problema 3.54

3.55 El conjunto de soporte y polea tiene una masa de 40 kg con su centro de masa combinado en G. Calcular qué fuerza soporta el pasador C cuando al cable se aplica una tracción de 400 N en su plano vertical. (*Sugerencia*: Para simplificar los cálculos emplear la posibilidad de sustituir una fuerza por un sistema fuerza-par. ¿Por qué es independiente el resultado del punto de fijación D de la cuerda al soporte?)

Resp. $C = 952$ N

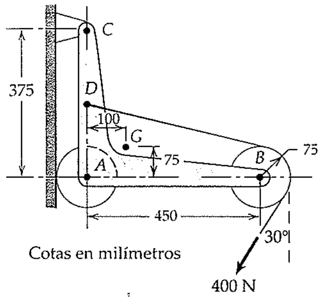


Figura problema 3.55

3.56 El tambor uniforme de 400 kg está montado sobre una línea de rodillos A y otra línea de rodillos B. Un hombre de 80 kg se mueve lentamente a una distancia de 700 mm de la línea central vertical antes de que el tambor comience a girar. Todos los rodillos son totalmente libres para girar salvo uno de la línea B, el cual debe vencer un rozamiento considerable en su cojinete. Calcular la fuerza de rozamiento F que ejerce dicho rodillo según la tangente al tambor y hallar el valor R de la fuerza ejercida sobre el tambor por todos los rodillos A en dichas condiciones.

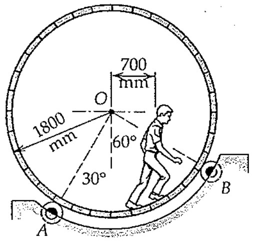


Figura problema 3.56

3.57 La carretilla de 10 kg, de centro de gravedad en G_1, transporta un contenedor de desperdicios, de centro de gravedad en G_2, hacia abajo por una rampa del 10 por ciento. Determinar la fuerza P que debe ejercer el operario, y bajo qué ángulo θ, para mantener una celeridad constante.

Resp. $P = 153{,}1$ N $\theta = 61.8°$

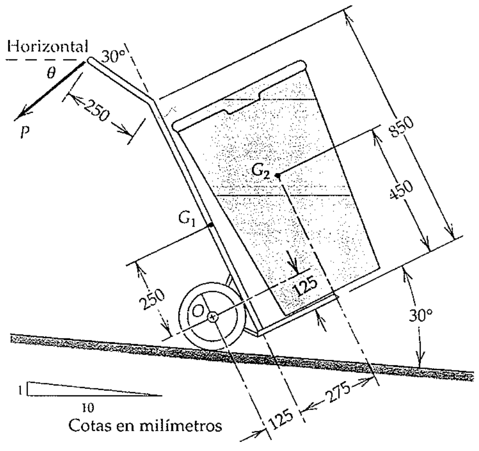


Figura problema 3.57

3.58 En la figura puede verse una colección de placas rectangulares y sus ligaduras, todas confinadas en el plano de representación.

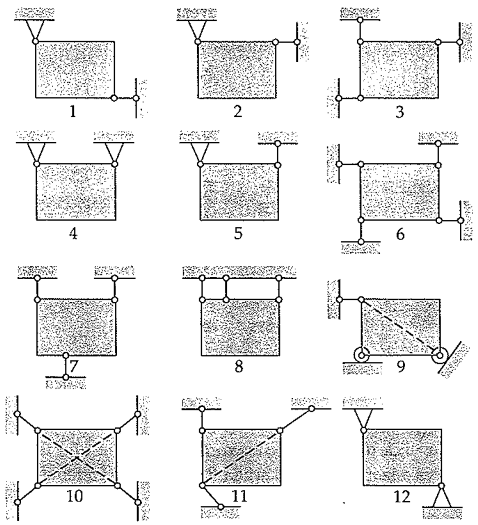


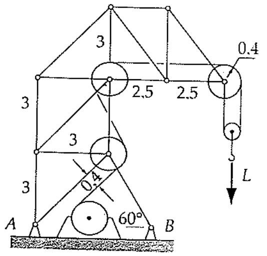
Figura problema 3.58

sentación. Las placas podrían someterse a diversas cargas conocidas aplicadas en el plano de la placa. Identificar las placas que pertenecen a cada una de las categorías siguientes.

(*a*) Inmovilización total con el número mínimo de ligaduras adecuadas.
(*b*) Inmovilización parcial con ligaduras inadecuadas.
(*c*) Inmovilización total con ligaduras superabundantes.
(*d*) Inmovilización parcial con ligaduras superabundantes.

3.59 Si la carga de la grúa se incrementa en 4 Mg, calcular el correspondiente aumento ΔA de la fuerza que soporta el pasador A.

Resp. ΔA = 56,6 kN



Cotas en metros

Figura problema 3.59

3.60 Todas las estructuras son hiperestáticas. Describir al menos una modificación de los apoyos para cada caso que convierta en isostática la estructura correspondiente.

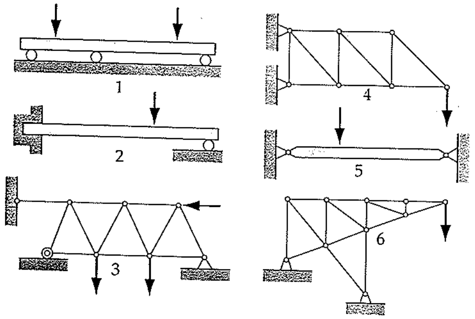


Figura problema 3.60

3.61 La viga uniforme de acero de 5 m tiene una masa de 600 kg y va a izarse desde la anilla B con las dos cadenas, AB de longitud 3 m, y CB de longitud 4 m. Determinar la tensión en la cadena AB cuando la viga está separada de la plataforma.

Resp. T = 3,53 kN

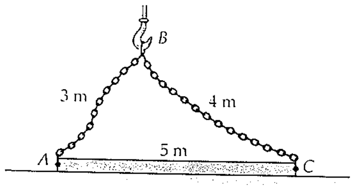


Figura problema 3.61

3.62 Calcular las fuerzas normales asociadas a las parejas de ruedas delanteras y traseras de la furgoneta de tracción delantera de 1600 kg. Repítanse luego los cálculos cuando el vehículo (*a*) sube por una pendiente del 10 por ciento y (*b*) baja por la misma pendiente, a celeridad constante en ambos casos. Comparar los cambios porcentuales n_A y n_B que experimentan las fuerzas normales en comparación con los valores nominales. Asegúrese de que en los dos casos (*a*) y (*b*) están presentes fuerzas propulsoras y fuerzas retardadoras.

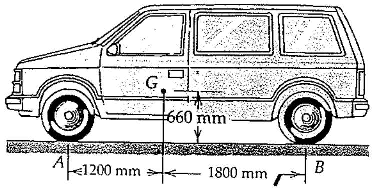


Figura problema 3.62

3.63 Un utensilio especial para voltear secciones de tubería de hormigón de gran tamaño (trazo discontinuo) se compone de un sector de 80 Mg montado sobre dos hileras de rodillos A y B. Uno de los rodillos de la hilera B es un engranaje acoplado a una corona dentada solidaria del sector, de forma que hace girar a éste en torno a su centro geométrico O. Cuando $\alpha = 0$, debe aplicarse al engranaje de B un par de momento 2460 N · m para evitar que el conjunto gire; cuando $\alpha = 30°$, para evitar la rotación se precisa un par de 4680 N · m. Determinar la posición del centro de masa G del utensilio calculando $\bar{r}$ y θ.

Resp. $\bar{r}$ = 367 mm $\qquad \theta = 79{,}8°$

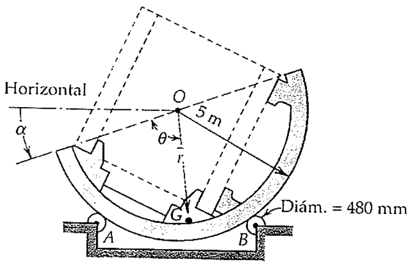


Figura problema 3.63

3.64 La placa base de una ruedecita está montada al carro de taller con arandelas elásticas blandas a cada lado para que absorban las sacudidas durante los movimientos. Inicialmente los pernos A y B están apretados a 4 kN sin cargar la ruedecita. Determinar la fuerza sobre cada perno cuando aquélla soporta una carga de 3 kN. Las fuerzas actuantes sobre cada perno pueden asimilarse a la acción de sendos resortes duros tal como se muestra en la ilustración separada. Supóngase que los pernos y la placa base son perfectamente elásticos. (*Advertencia*: Dibújese el diagrama de sólido libre de cada parte con mucho cuidado.)

Resp. F_A = 1,964 kN tracción
F_B = 4,54 tracción

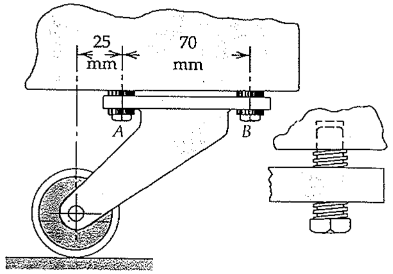


Figura problema 3.64

SECCIÓN B. EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

3.4 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Pasemos ahora a ampliar a los problemas tridimensionales los principios y métodos generales desarrollados con relación a los problemas de equilibrio bidimensionales. En el apartado 3.1 establecimos las condiciones generales de equilibrio mediante las ecuaciones 3.1, según las cuales deben ser nulos la fuerza resultante y el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio. Estas dos ecuaciones vectoriales de equilibrio y su descomposición escalar pueden escribirse:

$$\begin{aligned}
\Sigma\mathbf{F} = 0 \quad &\text{o sea} \quad \begin{cases}\Sigma F_x = 0\\ \Sigma F_y = 0\\ \Sigma F_z = 0\end{cases}\\
\Sigma\mathbf{M} = 0 \quad &\text{o sea} \quad \begin{cases}\Sigma M_x = 0\\ \Sigma M_y = 0\\ \Sigma M_z = 0\end{cases}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Las tres primeras ecuaciones escalares establecen que en todo cuerpo en equilibrio no existe fuerza resultante actuando en ninguna de las direcciones de los ejes coordenados. Las otras tres ecuaciones escalares expresan la condición adicional para el equilibrio, según la cual el momento resultante de las fuerzas actuantes sobre el cuerpo respecto a los ejes coordenados, o a ejes paralelos a éstos, debe ser cero. Estas seis ecuaciones constituyen las condiciones necesarias y suficientes para que el equilibrio sea completo. Los ejes de referencia pueden elegirse en cada caso de forma arbitraria y conveniente, con la única restricción de que la notación vectorial debe estar referida a un triedro a derechas.

Las seis relaciones escalares 3.3 representan otras tantas condiciones independientes entre sí, ya que cualquiera de ellas puede cumplirse independientemente de las otras. Por ejemplo, en el caso de un automóvil que se acelera por una carretera recta y horizontal en la dirección x, la segunda ley de Newton nos dice que la fuerza resultante que actúa sobre el automóvil es igual al producto de la masa de éste por su aceleración; por tanto, $\Sigma F_x \neq 0$, pero las otras dos ecuaciones de las fuerzas se cumplen, puesto que son nulas las otras dos componentes de la aceleración. Análogamente, si el volante de inercia del motor del automóvil gira durante la aceleración a velocidad angular creciente alrededor del eje x, el primero no está en equilibrio rotatorio respecto a dicho eje; por tanto, para el volante él solo, $\Sigma M_x \neq 0$, además de $\Sigma F_x \neq 0$, pero se cumplirán las cuatro ecuaciones restantes referidas a ejes que pasen por el centro de masa.

Si se emplean las ecuaciones 3.3 en su forma vectorial, lo primero que ha de hacerse es expresar cada una de las fuerzas en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**. Para que se cumpla la primera ecuación, $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$, es preciso que sean cero las sumas de los coeficientes respectivos de **i**, **j** y **k** y estas tres sumas igualadas a cero dan precisamente las tres condiciones escalares de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$.

Por lo que respecta a la segunda ecuación, $\Sigma\mathbf{M} = \mathbf{0}$, donde los momentos se habrán tomado respecto a cualquier polo O, convenientemente elegido, ha de comenzarse expresando el momento de cada fuerza en forma de producto vectorial, $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde **r** es el vector de posición que une O con cualquier punto de la recta soporte de cada fuerza **F**. O sea, $\Sigma\mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Al igualar respectivamente a cero los coeficientes con que aparecen **i**, **j** y **k** en la ecuación de momentos resultante aparecen exactamente las tres ecuaciones escalares $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$ y $\Sigma M_z = 0$.

(a) Diagramas de sólido libre. En las sumas indicadas en las ecuaciones 3.3 se incluyen los efectos de *todas* las fuerzas que se consideran. Ya hemos visto en el apartado anterior que el diagrama de sólido libre es el fundamento del único procedimiento realmente digno de confianza para revelar todas las fuerzas y momentos que deben incluirse en las ecuaciones de equilibrio. En el espacio tridimensional, el diagrama de sólido libre sirve para el mismo objetivo fundamental que en el plano y debe dibujarse *siempre*. Puede elegirse entre trazar un dibujo esquematizado, en perspectiva del cuerpo con las fuerzas exteriores representadas o dibujar las proyecciones ortogonales del diagrama de sólido libre. Se ofrecerán ejemplos de ambos tipos de representación en los problemas tipo que siguen a este apartado.

Para representar correctamente las fuerzas que intervienen en un diagrama de sólido libre es preciso conocer las características de las superficies en contacto. Esas características fueron expuestas en la figura 3.1 para los problemas bidimensionales, y en la figura 3.8 se presenta su aplicación a los tridimensionales para los casos más frecuentes de transmisión de fuerzas. En este análisis tridimensional se hará uso tanto de las representaciones de la figura 3.1 como de la figura 3.8.

Puesto que el objeto esencial del diagrama de sólido libre es desarrollar una imagen representativa fiable de la acción real de todas las fuerzas (y los pares, si los hay) que actúan sobre un cuerpo, siempre que sea posible será beneficioso representar esas fuerzas con su sentido verdadero. De este modo el diagrama de sólido libre será un modelo del problema mucho más cercano a la realidad que lo es cuando los sentidos de las fuerzas se asignan arbitrariamente o siempre en coincidencia con los de los ejes coordenados utilizados. Por ejemplo, en la parte 4 de la figura 3.8, el sentido correcto de las incógnitas R_x y R_y puede saberse o adivinarse que es opuesto al del eje coordenado correspondiente. Lo mismo cabe afirmar acerca de los sentidos de los pares de las partes 5 y 6, cuyos sentidos, según la regla de la mano derecha, pueden asignarse de signos opuestos a los de los respectivos ejes coordenados. A estas alturas el lector ya debe recordar que un resultado negativo para una fuerza o un par indica simplemente que, en la realidad, la acción tiene lugar en sentido contrario al asignado en el diagrama de sólido libre. Muchas veces, por supuesto, se desconoce inicialmente el sentido verdadero, por lo que deberá asignarse arbitrariamente en el diagrama de sólido libre.

(b) Categorías de equilibrio. La aplicación de las ecuaciones 3.3 cae dentro de las cuatro categorías que se identifican en la figura 3.9.

MODELOS PARA LA ACCION DE LAS FUERZAS EN TRES DIMENSIONES

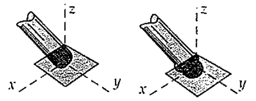
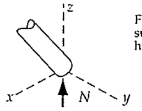
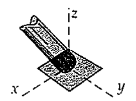
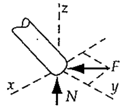
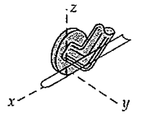
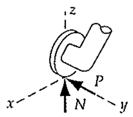
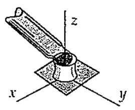
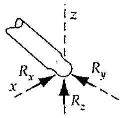
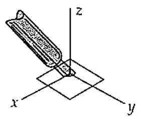
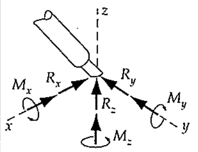
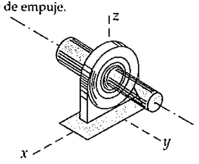
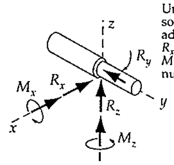
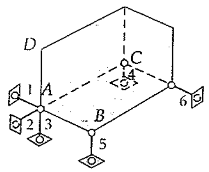
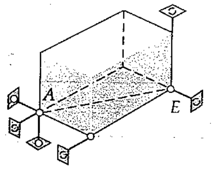
Tipo de contacto y origen de las fuerzas	Acción sobre el cuerpo a aislar
1. Miembro en contacto con superficie lisa o miembro con apoyo esférico. 	 Fuerza normal a la superficie y dirigida hacia el miembro.
2. Miembro en contacto con superficie rugosa. 	 Hay posibilidad de que sobre el miembro actúe una fuerza F tangente a la superficie (fuerza de rozamiento), además de una fuerza normal N.
3. Apoyo de rodillos sobre ruedas con vínculo lateral. 	 Además de la fuerza normal N, puede existir una fuerza lateral P ejercida por la guía sobre la rueda.
4. Rótula. 	 Una rótula que pivote libremente en torno al centro de la bola puede soportar una fuerza R de tres componentes.
5. Unión fija (empotramiento o soldadura). 	 z M_x R_x R_y M_y R_z x y M_z Además de una fuerza de tres componentes, las uniones fijas pueden soportar un par de fuerzas de momento M representado por sus componentes.
6. Cojinete de empuje. 	 Un cojinete de empuje puede soportar una fuerza axil R_y además de fuerzas radiales R_x y R_z. En ocasiones, los pares M_x y M_z deben suponerse nulos para lograr la isostaticidad.

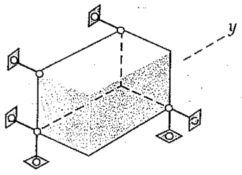
Figura 3.8



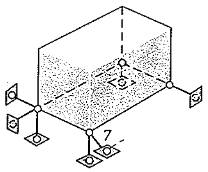
(*a*) Inmovilidad total
Ligaduras adecuadas



(*b*) Inmovilidad incompleta
Ligaduras parciales



(*c*) Inmovilidad incompleta
Ligaduras parciales



(*d*) Inmovilidad excesiva
Ligaduras superabundantes

Figura 3.10

CATEGORÍAS DE EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

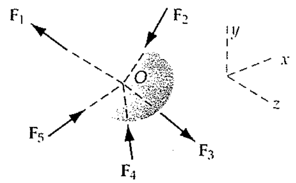
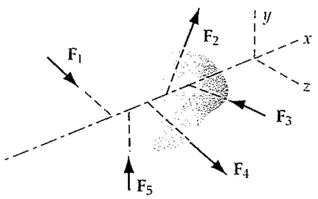
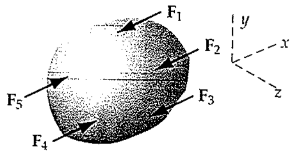
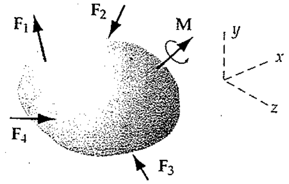
Sistema de fuerzas	Diagrama de sólido libre	Ecuaciones independientes
1. Concurrentes en un punto		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
2. Concurrentes en una recta		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_z = 0$
3. Paralelas		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_z = 0$

Figura 3.9

Caso 1. El equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto *O* exige las tres ecuaciones de fuerzas, pero no las de momentos, puesto que el momento de esas fuerzas respecto a un eje cualquiera que pase por *O* es nulo.

Caso 2. El equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes en un recta exige todas las ecuaciones, salvo las del momento respecto a esa recta, la cual se cumple automáticamente.

Caso 3. El equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas exige únicamente la ecuación de fuerzas según su dirección (dirección *x*) y dos ecuaciones de momentos respecto a ejes (*y* y *z*) normales a la dirección de las fuerzas.

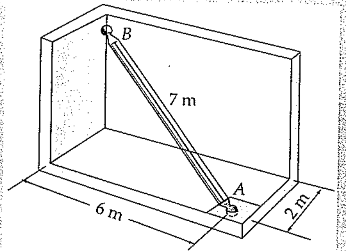
Caso 4. El equilibrio de un sistema de fuerzas cualquiera exige las tres ecuaciones de fuerzas y las tres ecuaciones de momentos.

Las observaciones que acabamos de hacer se evidencian por lo general perfectamente al resolver cada problema concreto.

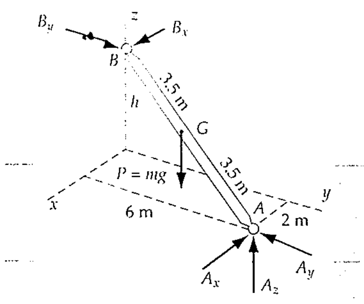
(c) Ligaduras e isostaticidad. Si bien las seis ecuaciones escalares 3.3 son condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio, no siempre contienen toda la información necesaria para calcular las fuerzas desconocidas en un problema tridimensional. Aquí también, como en el caso de los problemas planos, la suficiencia de la información reside en las características de las ligaduras que proporcionan los apoyos. Existe un criterio analítico para establecer la suficiencia (adecuación) de las ligaduras, pero su exposición se sale del marco de este texto. No obstante, para despertar la atención del lector hacia esta cuestión, en la figura 3.10 se exponen cuatro casos de ligadura. En la ilustración *a* se muestra un cuerpo cuyo vértice *A* se encuentra completamente inmovilizado por las barras 1, 2 y 3. Las barras 4, 5 y 6 impiden las rotaciones en torno a los ejes de las barras 1, 2 y 3, respectivamente, con lo que el cuerpo se halla completamente inmovilizado y decimos que las ligaduras son adecuadas (o sea, suficientes). En la ilustración *b* tenemos el mismo cuerpo con el mismo número de ligaduras, pero ahora éstas no podrían oponerse a un inicio de giro en torno el eje *AE*. En este caso la inmovilización del cuerpo es incompleta y las ligaduras son parciales (o sea, insuficientes). Análogamente, en la ilustración *c* las ligaduras no podrían oponerse a una fuerza en la dirección *y*; así, en este caso tenemos también que el cuerpo esta incompletamente inmovilizado bajo ligaduras parciales. En la ilustración *d*, añadiendo una séptima barra a un sistema de seis adecuadamente dispuestas para garantizar la inmovilización, tendríamos más ligaduras de las estrictamente necesarias para establecer una posición de equilibrio y esa barra 7 sería una ligadura *superabundante*. En tal caso, estaríamos frente a un problema *hiperestático* (o *estáticamente indeterminado*). Salvo unas cuantas excepciones, en este libro tratamos sólo con cuerpos rígidos en equilibrio con ligaduras adecuadas y los problemas son, por tanto, *isostáticos* o *estáticamente determinados*.

PROBLEMA TIPO 3.5

La barra uniforme de acero de 7 m tiene una masa de 200 kg y se apoya en A sobre el suelo a través de una articulación de rótula. El extremo esférico B descansa contra la pared vertical lisa, tal como se muestra. Calcular las fuerzas ejercidas por la pared y el suelo sobre los extremos de la barra.



Solución. Empezamos dibujando el diagrama de sólido libre de la barra, donde la fuerza de contacto que actúa sobre el punto *B* de la barra se representa perpendicular a la superficie de la pared. Además de representarse el ① peso $P = mg = 200(9{,}81) = 1962$ N, se representa la fuerza que ejerce el suelo sobre la articulación de rótula *A*, mediante sus tres componentes *x*, *y* y *z*. Estas



componentes se han colocado con los sentidos correctos que parecen corresponderles por la condición de que A se mantenga en su sitio. La altura a la que se halla B se deduce de $7 = \sqrt{2^2 + 6^2 + h^2}$; o sea, $h = 3$ m. Tal como se muestra se han asignado convenientemente unos ejes coordenados a derechas.

Solución vectorial. Tomaremos A como centro de momentos para que no aparezcan las fuerzas que actúan en ese punto. Los vectores de posición necesarios para calcular los momentos respecto a A son

$$\mathbf{r}_{AG} = -1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1{,}5\mathbf{k}\ \text{m} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_{AB} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\ \text{m}$$

donde el centro de masa G se encuentra en el punto medio de AB.
La ecuación (vectorial) de momentos nos da

$$[\Sigma \mathbf{M}_A = 0] \qquad \mathbf{r}_{AB}\times(\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y) + \mathbf{r}_{AG}\times\mathbf{W} = 0$$

$$(-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}) + (-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1{,}5\mathbf{k})\times(-1962\mathbf{k}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -6 & 3 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -3 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & -1962 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3B_y + 5886)\mathbf{i} + (3B_x - 1962)\mathbf{j} + (-2B_y + 6B_x)\mathbf{k} = 0$$

Igualando a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** y despejando resulta

② $$B_x = 654\ \text{N} \qquad \text{y} \qquad B_y = 1962\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

La reacción en A se determina fácilmente mediante

$$[\Sigma \mathbf{F} = 0] \qquad (654 - A_x)\mathbf{i} + (1962 - A_y)\mathbf{j} + (-1962 + A_z)\mathbf{k} = 0$$

$$\text{y} \qquad A_x = 654\ \text{N} \qquad A_y = 1962\ \text{N} \qquad A_z = 1962\ \text{N}$$

$$\text{Finalmente} \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$= \sqrt{(654)^2 + (1962)^2 + (1962)^2} = 2850\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

Solución escalar. Si escribimos las ecuaciones escalares de los momentos respecto a ejes respectivamente paralelos a los x e y que pasen por A, resulta

$$[\Sigma M_{A_x} = 0] \qquad 1962(3) - 3B_y = 0 \qquad B_y = 1962\ \text{N}$$

③ $$[\Sigma M_{A_y} = 0] \qquad -1962(1) + 3B_x = 0 \qquad B_x = 654\ \text{N}$$

Las ecuaciones de fuerzas nos dan, sencillamente,

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad -A_x + 654 = 0 \qquad A_x = 654\ \text{N}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad -A_y + 1962 = 0 \qquad A_y = 1962\ \text{N}$$

$$[\Sigma F_z = 0] \qquad A_z - 1962 = 0 \qquad A_z = 1962\ \text{N}$$

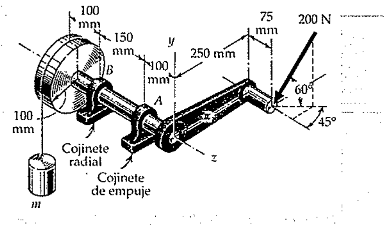
① **Por supuesto, hubiéramos podido asignar sentidos matemáticamente positivos a todas las componentes de fuerza desconocidas, en cuyo caso A_x y A_y habrían resultado negativas. Como el diagrama para sólido libre describe la situación real, es preferible en general representar las fuerzas con sus sentidos reales correctos siempre que sea posible.**

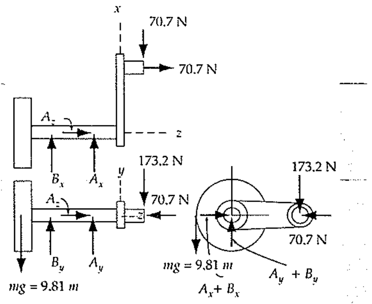
② **Obsérvese que la tercera ecuación, $-2B_y + 6B_x = 0$, simplemente confirma los resultados de las dos primeras ecuaciones. Este hecho podríamos haberlo previsto teniendo en cuenta que un sistema de fuerzas que cortan a una recta requiere únicamente dos ecuaciones de momentos. (Caso 2 de *Categorías de equilibrio.*)**

③ **Observemos que una suma de momentos respecto a un eje paralelo a z que pase por A nos da simplemente $6B_x - 2B_y = 0$, que sólo sirve como comprobación tal como indicamos antes. También habría sido posible obtener primero A_z de $\Sigma F_z = 0$ y después haber tomado momentos respecto a ejes que pasen por B para obtener A_x y A_y.**

PROBLEMA TIPO 3.6

Se aplica una fuerza de 200 N a la manivela del torno en la forma que se indica. El cojinete A soporta el empuje (fuerza en la dirección del eje del árbol) mientras que el cojinete B soporta solamente la carga radial (carga normal al eje del árbol). Determinar la masa m que puede soportar y la fuerza radial total ejercida por cada cojinete sobre el árbol. Se supondrá que ninguno de los cojinetes es capaz de aguantar un momento respecto a una recta normal al eje geométrico del árbol.





Solución. El sistema es claramente tridimensional sin ejes ni planos de simetría, por lo que habrá que analizar el problema como el de un sistema general de fuerzas en el espacio. Para ilustrar este método utilizaremos una solución escalar, si bien sería igualmente satisfactoria una solución que utilizase la notación vectorial. El diagrama de sólido libre de árbol, manivela y tambor, considerados como constituyentes de un cuerpo único, se representa mediante sus tres proyecciones
① ortogonales aunque podría haberse dibujado una perspectiva espacial.

La fuerza aplicada de 200 N se descompone en sus tres componentes y en cada uno de estos esquemas pueden verse dos de estas componentes. Pueden verse los sentidos correctos de A_x y B_x si se observa que la resultante de las dos fuerzas de 70,7 N pasa por AB. Los sentidos correctos de A_y y B_y no pueden determinarse hasta haber obtenido los módulos de los momentos, por lo que podrían haberse asignado arbitrariamente. La proyección x-y de las fuerzas de los cojinetes se indica en función de las sumas de las componentes x e y desconocidas. La adición de A_z y del peso $P = mg$ completa los diagramas de sólido libre. Obsérvese que las tres secciones representan tres problemas bidimensionales relacionados por las correspondientes componentes de las fuerzas.

② De la proyección x-y

$$[\Sigma M_O = 0] \qquad 100(9{,}81m) - 250(173{,}2) = 0 \qquad m = 44{,}1\ \text{kg} \qquad \textit{Resp.}$$

De la proyección x-z

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad 150B_x + 175(70{,}7) - 250(70{,}7) = 0 \qquad B_x = 35{,}4\ \text{N}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad A_x + 35{,}4 - 70{,}7 = 0 \qquad A_x = 35{,}3\ \text{N}$$

③ La proyección y-z da

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad 150B_y + 175(173{,}2) - 250(44{,}1)(9{,}81) = 0 \qquad B_y = 520\ \text{N}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad A_y + 520 - 173{,}2 - (44{,}1)(9{,}81) = 0 \qquad A_y = 86{,}8\ \text{N}$$

$$[\Sigma F_z = 0] \qquad A_z = 70{,}7\ \text{N}$$

① **Si las tres proyecciones ortogonales habituales no resultan totalmente familiares al lector, éste deberá repasarlas y practicarlas. Estas tres vistas pueden imaginarse como si se contemplara el cuerpo desde las caras delantera, lateral y superior de una caja de plástico transparente, colocada sobre el mismo y con sus aristas paralelas a los ejes de referencia tomados.**

② **Podríamos haber comenzado con la proyección x-z y no con la x-y.**

③ **A la vista x-y podría haber seguido inmediatamente la y-z, ya que A_y y B_y pueden determinarse tras hallar m.**

④ **Sin la hipótesis de que sea nulo todo momento que soporta cada cojinete respecto a una recta normal al eje geométrico del árbol, el problema sería hiperestático.**

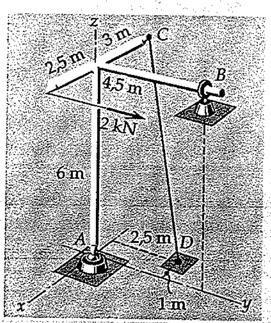
Las fuerzas radiales totales sobre los cojinetes resultan

$[A_r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}]$ $\quad A_r = \sqrt{(35{,}3)^2 + (86{,}8)^2} = 93{,}5\ \text{N}$ *Resp.*

④ $[B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}]$ $\quad B = \sqrt{(35{,}4)^2 + (520)^2} = 521\ \text{N}$ *Resp.*

PROBLEMA TIPO 3.7

La estructura tubular soldada está unida al plano horizontal x-y por una rótula en A y en B está apoyada con holgura en una anilla. El cable CD impide la rotación en torno a la recta AB cuando se aplica la carga de 2 kN y la estructura es estable en la posición representada. Despréciese el peso de la estructura frente a la carga aplicada y determínese la tensión T del cable, las reacciones en la anilla y en las componentes de la reacción en A.



Solución. El sistema es evidentemente tridimensional sin ejes ni planos de simetría, por lo que habrá que analizar el problema como uno de sistema general ① de fuerzas en el espacio. Se dibuja el diagrama de sólido libre en el cual se ha representado la reacción de la anilla en función de sus dos componentes. Sumando momentos respecto al eje AB sólo interviene la incógnita $\mathbf{T}$. La dirección de AB está especificada por el vector unitario

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 4{,}5^2}}(4{,}5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}).$$

El momento de $\mathbf{T}$ respecto a AB es la proyección sobre AB del momento respecto al punto A y vale $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$. Análogamente, el momento de la carga aplicada F respecto a AB es $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. ② Con $\overline{CD} = \sqrt{46{,}25}$ m. Las expresiones vectoriales de $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son

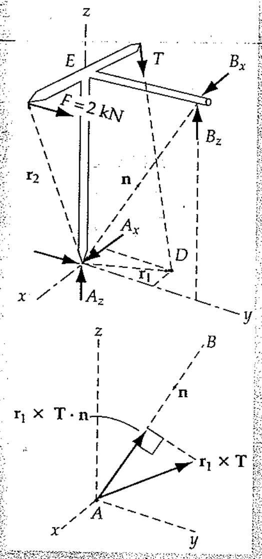
$$\mathbf{T} = \frac{T}{\sqrt{46{,}25}}(2\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \qquad \mathbf{F} = 2\mathbf{j}\ \text{kN}$$

$$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j}\ \text{m} \qquad \mathbf{r}_2 = 2{,}5\mathbf{i} + 6\mathbf{k}\ \text{m}$$

La ecuación de momentos es entonces

$$[\Sigma M_{AB} = 0] \qquad (-\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j}) \times \frac{T}{\sqrt{46{,}25}}(2\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \cdot \tfrac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

$$+ (2{,}5\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) \times (2\mathbf{j}) \cdot \tfrac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 0$$



① **Recuérdese que el vector r de la expresión r × F del momento de una fuerza es un vector que une el polo con *cualquier* punto de la recta soporte de la fuerza. En lugar de $\mathbf{r}_1$, también podríamos haber tomado el vector $\overrightarrow{AC}$.**

Efectuando las operaciones resulta

$$-\frac{48T}{\sqrt{46{,}25}} + 20 = 0 \qquad T = 2{,}83\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

y las componentes de T son, pues

$$T_x = 0{,}833\ \text{kN} \qquad T_y = 1{,}042\ \text{kN} \qquad T_z = -2{,}50\ \text{kN}$$

Las demás incógnitas pueden hallarse fácilmente como sigue, sumando fuerzas y sumando momentos,

$[\Sigma M_z = 0]$ $\quad 2(2{,}5) - 4{,}5B_x - 1{,}042(3) = 0$ $\quad B_x = 0{,}417\ \text{kN}$ *Resp.*

$[\Sigma M_x = 0]$ $\quad 4{,}5B_z - 2(6) - 1{,}042(6) = 0$ $\quad B_z = 4{,}06\ \text{kN}$ *Resp.*

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad A_x + 0{,}417 + 0{,}833 = 0$ $\quad A_x = -1{,}250\ \text{kN}$ *Resp.*

③ $[\Sigma F_y = 0]$ $\quad A_y + 2 + 1{,}042 = 0$ $\quad A_y = -3{,}04\ \text{kN}$ *Resp.*

$[\Sigma F_z = 0]$ $\quad A_z + 4{,}06 - 2{,}50 = 0$ $\quad A_z = -1{,}56\ \text{kN}$ *Resp.*

② **La ventaja de la notación vectorial en este problema reside en la libertad para tomar momentos respecto a cualquier eje. En este problema, esta libertad permite elegir un eje que elimina cinco de la incógnitas.**

③ **Los signos negativos de las componentes A indican que su sentido es opuesto al asignado en el diagrama para sólido libre.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.65 Bajo cada apoyo A, B y C de la plancha inhomogénea se instala un dinamómetro cuyas lecturas son 600, 480 y 680 N, respectivamente. Hallar el peso P de la plancha y las coordenadas x-y de su centro de masa.

Resp. $P = 1760$ N $\quad x = 562$ mm $\quad y = 163{,}6$ mm

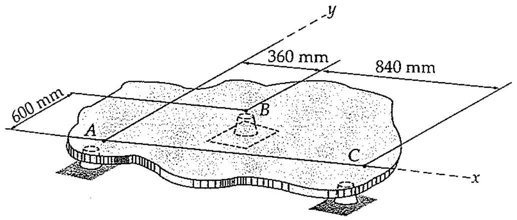


Figura problema 3.65

3.66 Las dos vigas en doble T, de 100 kg de masa cada una, están soldadas a escuadra y se elevan mediante cables verticales de modo que ambos permanecen horizontales. Calcular las tensiones en cada uno de los cables A, B y C.

3.67 Hallar las tensiones en los tres cables que sujetan la placa de 90 kg.

Resp. $T_A = T_B = 235$ N $\quad T_C = 441$ N

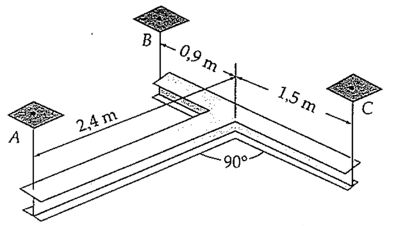


Figura problema 3.66

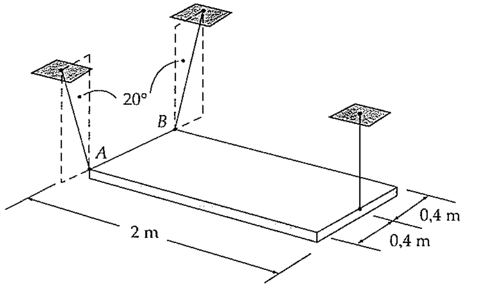


Figura problema 3.67

3.68 Se aprieta el tensor F hasta que el cable AE se encuentra sometido a una tracción de 5 kN. Hallar las tensiones en los cables AB, AC y AD.

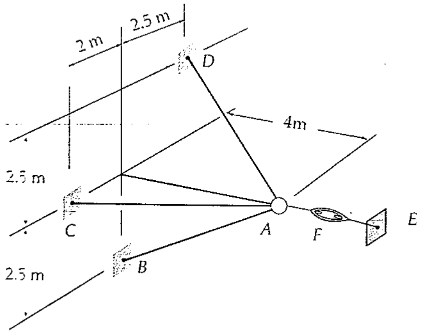

2 m
2.5 m
D
4m
2.5 m
C
A
F
E
2.5 m
B

Figura problema 3.68

3.69 Hallar las tensiones en los alambres AB, AC y AD.

Resp. $T_{AB} = 0{,}501\ mg$
$T_{AC} = 0{,}290\ mg$
$T_{AD} = 0{,}412\ mg$

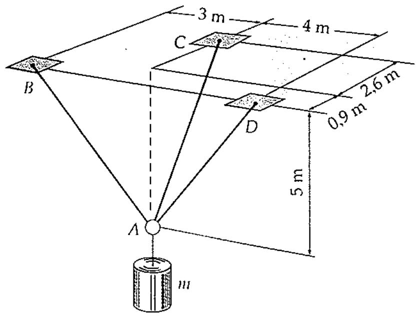

3 m
4 m
C
B
2.6 m
0.9 m
D
5 m
A
m

Figura problema 3.69

3.70 La viga uniforme tiene una masa de 60 kg/m. Hallar las reacciones en el soporte empotrado A durante la aplicación de la fuerza de 5 kN en B.

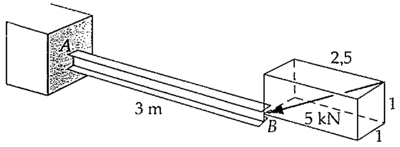

A
3 m
2,5
B
5 kN
1
1

Figura problema 3.70

3.71 La pluma liviana en ángulo recto que soporta al cilindro de 400 kg está sujeta por tres cables y una rótula O fija al plano vertical x-y. Hallar la reacción en O y las tensiones de los cables.

Resp. $O_x = 1962$ N $O_y = 0$ $O_z = 6540$ N
$T_{AC} = 4810$ N $T_{BD} = 2770$ N $T_{BE} = 654$ N

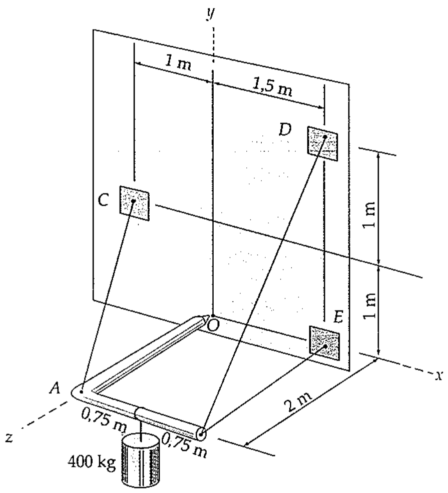

y
1 m
1,5 m
D
C
1 m
1 m
E
O
x
A
2 m
z
0,75 m
0,75 m
400 kg

Figura problema 3.71

3.72 La antena de la figura tiene una masa de 1 Mg y se mantiene en posición vertical merced a los tres cables que van desde la cúspide A hasta las posiciones indicadas en el suelo. El mecanismo tensor F permite ajustar la tensión de los cables. Si en el cable AE se desarrolla una tensión de 4,8 kN, hallar las tensiones en los otros dos cables.

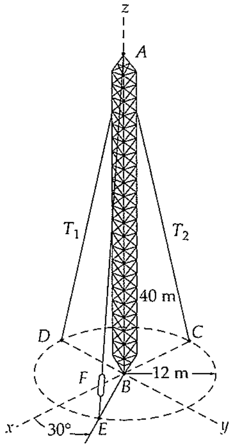

z
A
T_1
T_2
40 m
D
C
F
B
12 m
x
30°
E
y

Figura problema 3.72

3.73 Hallar las reacciones en los apoyos A, B y C de la armadura triangular rígida cargada como se indica. La sección normal de la armadura es un triángulo equilátero de lado 4 m.

Resp. $A_x = -3{,}90$ kN $A_y = 3$ kN $C_x = 28.5$ kN
$B_x = -19{,}65$ kN $B_y = 6{,}05$ kN $B_z = -3.5$ kN

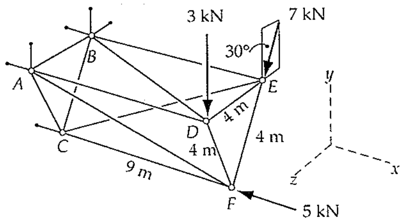

3 kN
7 kN
30°
B
A
E
y
4 m
D
4 m
4 m
C
9 m
x
z
F
5 kN

Figura problema 3.73

Problemas representativos

3.74 Una mesa para servicio duro de 60 kg se prueba aplicándole la carga vertical de 5 kN representada. Si un instrumento revela que la reacción bajo la pata A es una fuerza normal de 2000 N, hallar las fuerzas normales bajo las patas B, C y D. Supóngase que las fuerzas normales actúan en las esquinas externas de las patas.

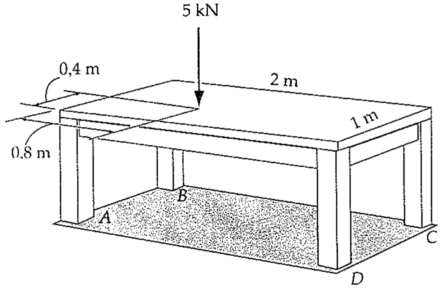

5 kN
0,4 m
2 m
1 m
0,8 m
B
A
C
D

Figura problema 3.74

3.75 El centro de masa de la puerta de 30 kg se encuentra en el centro del panel. Si el peso de la puerta carga por completo sobre la bisagra inferior A, calcular el valor de la fuerza total que soporta la bisagra B.

Resp. 190,2 N

3.76 El árbol joven, originalmente inclinado, se lleva a la posición vertical ajustando las tensiones de los vientos a $AB = 0$, $AC = 40$ N y $AD = 60$ N. Hallar la fuerza y el momento de reacción en la base O del tronco. Se desprecia el peso del árbol.

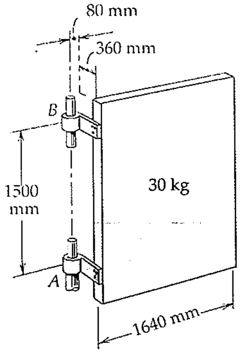

80 mm
360 mm
B
1500 mm
30 kg
A
1640 mm

Figura problema 3.75

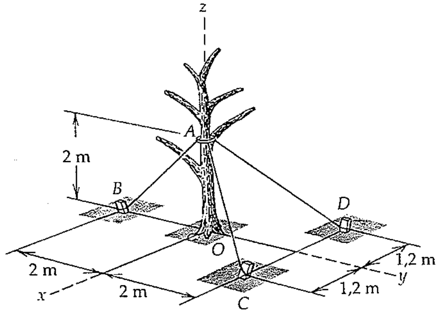

z
A
2 m
B
D
O
1,2 m
y
2 m
x
2 m
C
1,2 m

Figura problema 3.76

3.77 A causa de las condiciones del suelo combinadas con la tracción ejercida por el cable eléctrico, el poste ha desarrollado

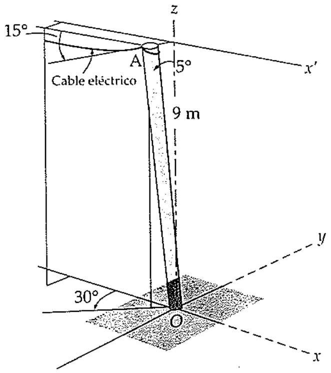

z
15°
A
5°
x'
Cable eléctrico
9 m
y
30°
O
x

Figura problema 3.77

la inclinación indicada de 5°. El poste, de 9 m, tiene una masa de 25 kg/m y la tracción del cable es de 900 N. Hallar las reacciones en la base O. Adviértase que el cable eléctrico yace en un plano vertical paralelo al plano x-z.

Resp. $O_x = 869$ N $O_y = 0$ $O_z = 2440$ N
$M_x = -524$ N · m
$M_y = 8700$ N · m
$M_z = 341$ N · m

3.78 La esfera homogénea lisa descansa sobre la acanaladura de 120° y se apoya contra la placa normal a la dirección de la acanaladura. Determinar el ángulo θ medido a partir de la horizontal para el que la reacción de cada lado de la acanaladura sea igual a la fuerza soportada por la placa.

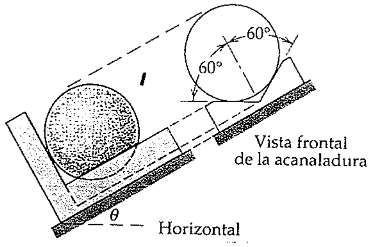


Figura problema 3.78

3.79 Un esfera homogénea lisa de masa m y radio r cuelga mediante un alambre AB de longitud $2r$, de un punto B situado en la recta de intersección de las dos paredes a 90° verticales. Determinar la reacción de cada pared sobre la esfera.

Resp. $R = \mathrm{mg}/\sqrt{7}$

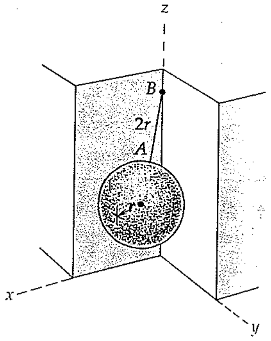


Figura problema 3.79

3.80 Durante una prueba, el motor izquierdo del bimotor es acelerado hasta generar un empuje de 2 kN. Para impedir el movimiento, las ruedas principales B y C están frenadas. Determinar la variación en las fuerzas de reacción normales en A, B y C con relación a sus valores normales a motores parados.

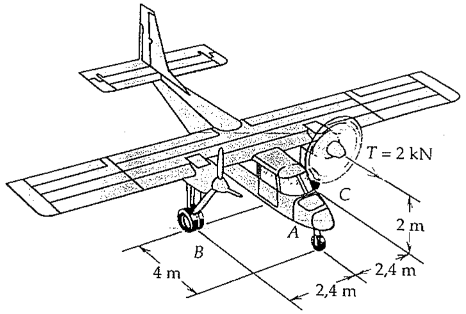


Figura problema 3.80

3.81 La masa de la plancha de acero es de 1800 kg y su centro de masa está en su centro G. Calcular la tensión en cada uno de los tres cables con los que se iza la plancha mientras permanece horizontal.

Resp. $T_A = T_B = 5{,}41$ kN $T_C = 9{,}87$ kN

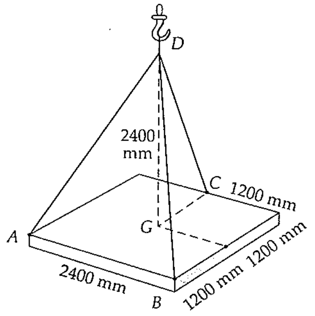
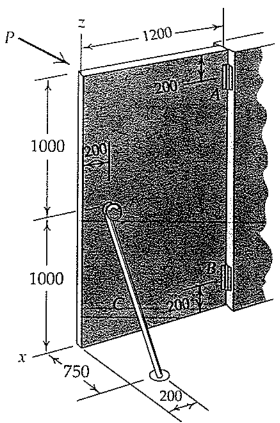


Figura problema 3.81

3.82 La puerta uniforme tiene una masa de 30 kg y no puede abrirse merced al puntal C, el cual es un miembro sin peso de dos fuerzas cuyo extremo superior está trabado bajo el pomo de la puerta y cuyo extremo inferior está unido a una ventosa que no resbala en el suelo. De las dos bisagras A y B, sólo ésta puede soportar fuerzas en la dirección vertical z. Calcular la compresión C en el puntal y las componentes horizontales de las fuerzas que sufren las bisagras A y B cuando se aplica la fuerza horizontal $P = 200$ N indicada normal al plano de la puerta.

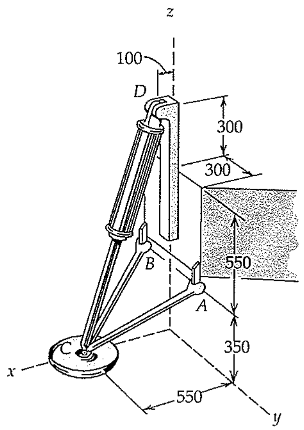


Cotas en milímetros

Figura problema 3.82

3.83 En la figura se representan las dimensiones aproximadas de una de las tres patas de aterrizaje del módulo de descanso marciano Viking. La masa total del módulo es de 600 kg. Calcular la fuerza que soporta cada pata cuando el vehículo descansa en Marte sobre una superficie horizontal. (Se supondrá que el peso se distribuye igualmente entre las patas consultando la tabla D/2 del apéndice D en caso necesario.)

Resp. $F_{AC} = F_{CB} = 240$ N tracción,
$F_{CD} = 1046$ N compresión



Cotas en milímetros

Figura problema 3.83

3.84 Determinar el efecto mecánico de la llave de ruedas sobre la tuerca. Repetir los cálculos intercalando el soporte vertical que se representa en trazo discontinuo. Supóngase que el soporte aguanta toda la carga vertical. Explicar la diferencia entre ambos casos.

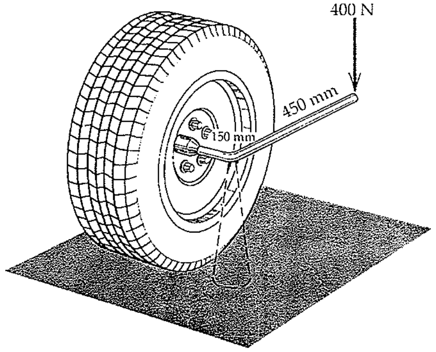


Figura problema 3.84

3.85 El soporte de peso despreciable está soldado al árbol en A y el árbol, a su vez, está soldado al soporte rígido en B. Calcular el momento torsor T (momento respecto al eje z) y el momento flector M (momento respecto a un eje normal al árbol) en B debidos a las tres fuerzas y al par aplicados al soporte.

Resp. $T = 44{,}5$ N · m $M = 14{,}87$ N · m

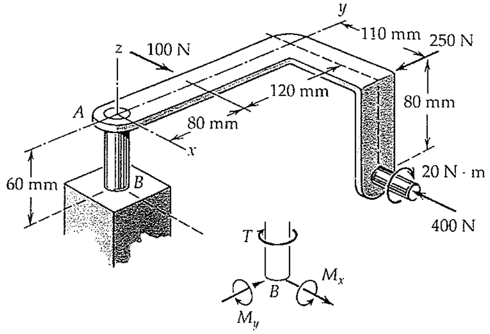


Figura problema 3.85

3.86 En las aristas de la estructura maciza están incrustadas las barras circulares que se ven en la figura. Si el peso total de la estructura puede despreciarse frente a las cargas indicadas, hallar las reacciones en los cuatro apoyos. Las superficies de contacto son todas lisas; las de A y D son verticales, la de B es horizontal. En C hay un cojinete de empuje.

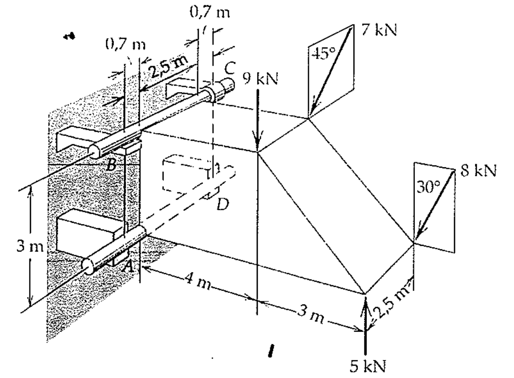


Figura problema 3.86

3.87 Tratando de derribar la rama casi serrada, el podador ejerce una tracción de 400 N en la cuerda atada en el punto A de la rama. La porción CA de ésta tiene una masa de 300 kg y su centro de masa está en el punto G. Hallar las intensidades de la fuerza y del momento de la reacción en el punto C.

Resp. $F_c = 3280$ N $M_c = 8200$ N · m

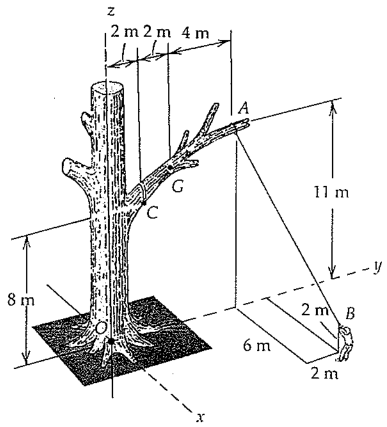


Figura problema 3.87

3.88 La placa uniforme de 15 kg está soldada al árbol vertical, sujeto éste por los cojinetes A y B. Calcular la intensidad de la fuerza que soporta el cojinete B durante la aplicación al árbol del par de 120 N · m. El cable CD impide el giro de la placa y del árbol y el peso del conjunto lo soporta completamente el cojinete A.

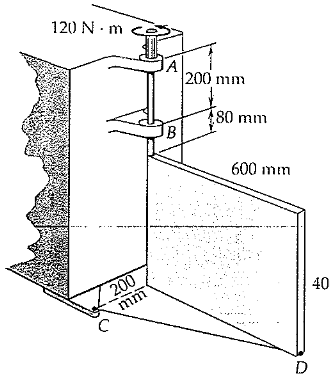


Figura problema 3.88

3.89 Un destornillador especial para trabajar en puntos de acceso difícil consiste en un cabezal engranado A que transforma la rotación del mango alrededor del eje y en rotación alrededor del eje z de la punta para cabezas Phillips. La punta aprieta hacia abajo merced a una fuerza axial P. Una vuelta del mango produce una vuelta del tornillo, de manera que el par M_o aplicado al mango genera un par igual aplicado al tornillo alrededor del eje z. Si $M_o = 10$ N · m, determinar los valores de la distancia d y de la fuerza R aplicada a la palanca, la cual es solidaria del alojamiento de los engranajes, necesarios para que el destornillador funcione en la posición que se muestra. Adviértase que la punta del destornillador queda limitada a moverse en el plano x-y una vez encajada.

Resp. $R = 166{,}7$ N $d = 60$ mm

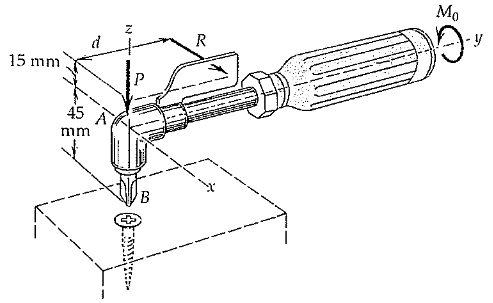
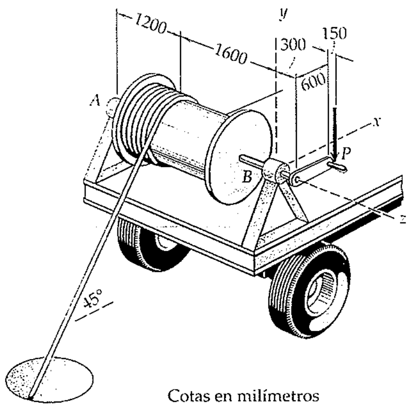


Figura problema 3.89

3.90 Para enrollar el cable subterráneo a medida que sale por el agujero de hombre se requiere ejercer una fuerza P de 200 N sobre la empuñadura. El diámetro del tambor del carrete es de 1000 mm. Calcular las fuerzas de reacción en A y B para la posición horizontal representada de la empuñadura de la manivela. Despreciar el peso del tambor.



Cotas en milímetros

Figura problema 3.90

3.91 El órgano $ABCD$ de la sierra radial tiene una masa de 20 kg con centro de gravedad en G. Si, al serrar la tabla, se aplica una fuerza horizontal de 40 N al tirador de mando, calcular el correspondiente momento flector actuante en el punto A de la columna (momento total respecto a un eje horizontal que pase por A). La reacción de la madera sobre los dientes de la sierra es de 60 N en la dirección que se indica y, muy aproximadamente, su punto de aplicación puede tomarse en E. ¿Cómo puede justificarse el considerar que la sierra está en equilibrio?

Resp. $M = 87{,}6$ N · m

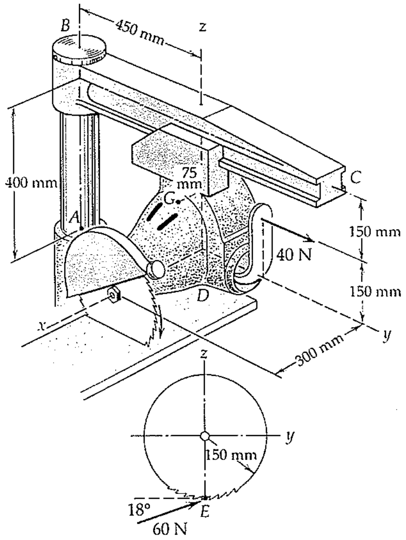


Figura problema 3.91

3.92 Los extremos superiores de los resortes helicoidales del bastidor del coche deportivo pueden subirse o bajarse mediante un mecanismo de tornillo que no se representa. Ese ajuste permite variar la fuerza con que se oprime hacia abajo cada rueda, buscando la mejor preparación para la conducción. Inicialmente, los dinamómetros indican que las fuerzas normales son 3600 N, 3600 N, 4500 Ny 4500 N en A, B, C y D, respectivamente. Si se hace bajar la parte superior del resorte posterior derecho (A) de modo que en el dinamómetro se registren 450 N más, hallar las correspondientes variaciones en las fuerzas normales en B, C y D. Despréciense los pequeños cambios de actitud (ángulos de cabeceo y balanceo) debidos al ajuste. El ancho entre las ruedas delanteras y traseras es el mismo.

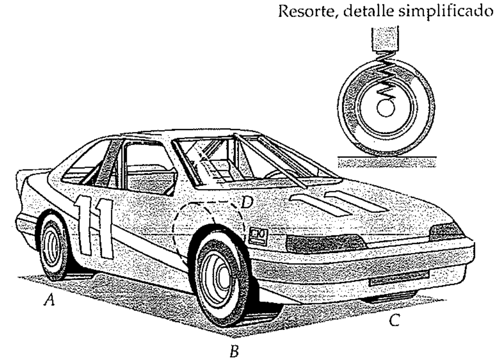


Figura problema 3.92

3.93 La pluma uniforme de acero AB, de masa 200 kg, está sujeta por los dos cables AC y AD, fijos al muro vertical, y por rótula en B. Calcular la tensión T_1 en el cable AC y el módulo de la reacción en B.

Resp. $T_1 = 545$ N $B = 2103$ N

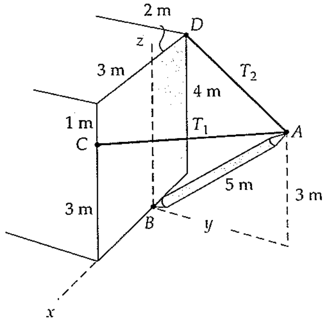


Figura problema 3.93

3.94 La pluma AB yace en el plano vertical y-z y está soportada por la rótula B y los dos cables amarrados en A. Calcular la tensión en cada cable a consecuencia de la fuerza de 20 kN actuante en el plano horizontal y aplicada en el punto medio M de la pluma. Despréciese el peso de ésta.

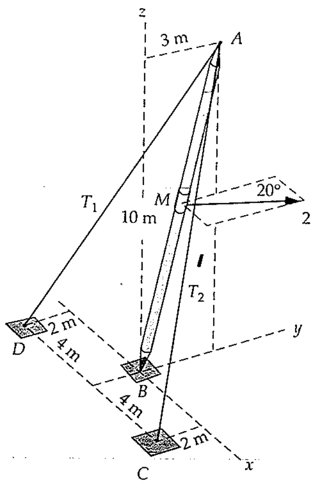


Figura problema 3.94

3.95 La puerta uniforme de la trampilla, de medidas 900 × 1200 mm, tiene una masa de 200 kg y se mantiene abierta un ángulo $\theta = \text{arctg}\,(4/3)$ merced al puntal sin peso AB. Calcular la compresión F_B en el puntal y la fuerza que soporta la bisagra D en dirección perpendicular a su eje. Supóngase que las bisagras actúan en los extremos más externos del borde inferior.

Resp. $F_B = 343$ N $\quad D_n = 496$ N

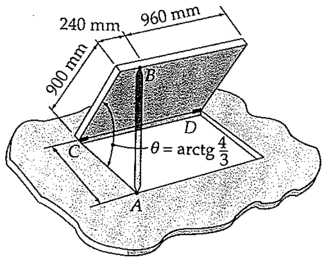


Figura problema 3.95

3.96 Una amoladora eléctrica portátil de masa 3,2 kg y centro de masa en G se mantiene en posición (eje z horizontal) sujetando la carcasa en B y C. En B la sujeción aplica sólo una fuerza en el plano x-y, mientras que la sujeción en C debe aplicar un par M_z respecto al eje z además de una fuerza. Si la fuerza tangencial de rozamiento F es el 60 por ciento de la fuerza normal R bajo la muela, calcular el par M_z y las componentes x e y de las fuerzas de sujeción en B y C si la fuerza normal R se mantiene en 30 N.

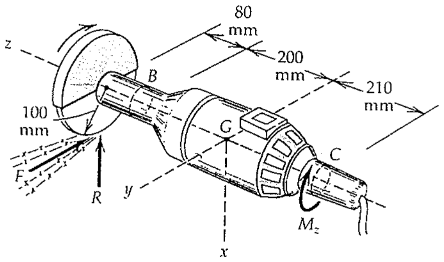


Figura problema 3.96

3.97 Un anuncio rectangular de bandera tiene una masa de 100 kg, con el centro de masa en el centro del rectángulo. El apoyo contra la pared en el punto C puede tratarse como rótula. En el vértice D se tiene apoyo solamente en la dirección y. Calcular las tensiones T_1 y T_2 de los cables soportantes, la fuerza total que se soporta en C y la fuerza lateral R que se soporta en D.

Resp. $T_1 = 347$ N $\quad T_2 = 431$ N
$R = 63{,}1$ N $\quad C = 768$ N

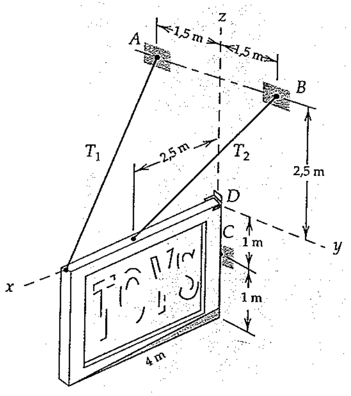


Figura problema 3.97

3.98 Bajo la acción del par de 40 N · m aplicado al árbol vertical, el cable limitador AC confina el giro del brazo OA y su árbol solidario a un ángulo de 60° medido desde el eje y. El collar D sujeto al árbol impide que éste se desplace hacia abajo dentro de su cojinete. Calcular el momento flector M, la compresión P y la fuerza cortante V en la sección B del árbol. (*Nota*: El momento flector, como vector, es normal al eje del árbol y también lo es la fuerza cortante.)

Resp. $M = 47{,}7$ N · m $\quad P = 320$ N $\quad V = 274$ N

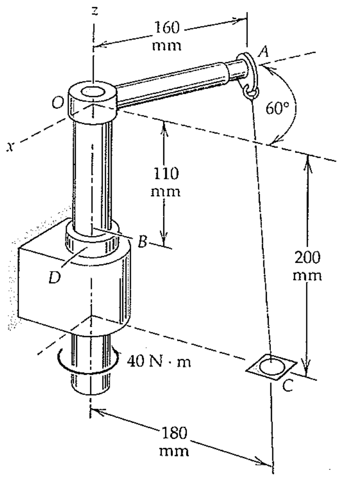


Figura problema 3.98

3.99 La placa rectangular $ABCD$ tiene una masa de 40 kg y está embisagrada por sus esquinas A y B a la superficie vertical inamovible. El cable ED mantiene horizontales los cantos BC y AD. La bisagra A puede soportar el empuje según el eje AB, mientras que la bisagra B sólo puede soportar fuerzas normales a AB. Hallar la tensión T en el cable y el módulo B de la fuerza que soporta la bisagra B.

Resp. $T = 277$ N $\quad B = 169{,}9$ N

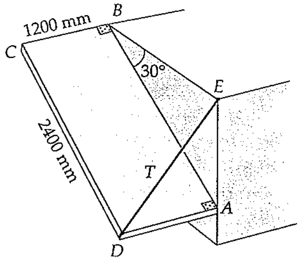


Figura problema 3.99

3.100 La lijadora eléctrica tiene una masa de 3 kg con su centro de masa en G y se mantiene levemente inclinada (eje vertical z) de modo que el disco haga contacto por su punto más alto A con la superficie que se está lijando. La herramienta se sujeta por sus empuñaduras B y C. Si la fuerza normal R contra el disco se mantiene en 20 N y se debe por completo a la componente de fuerza B_x (es decir, $C_x = 0$), y si la fuerza de rozamiento F actuante sobre el disco es el 60 por ciento de R, determinar las componentes del par M que debe aplicarse a la empuñadura C para mantener en posición a la lijadora. Supóngase que en C se soporta la mitad del peso.

Resp. $M_x = -1{,}857$ N · m $\quad M_y = 1{,}411$ N · m
$M_z = -2{,}56$ N · m

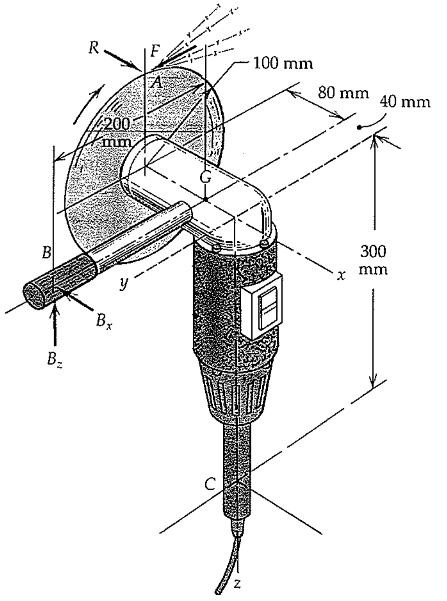


Figura problema 3.100

3.5 REPASO Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

A lo largo de este capítulo 3 hemos aplicado las propiedades conocidas de las fuerzas, momentos y pares de fuerzas, que se estudiaron en el capítulo 2, a la resolución de problemas de equilibrio de cuerpos rígidos. El estado de equilibrio de éstos se caracteriza por la condición de ser nulos los vectores resultantes de todas las fuerzas ($\Sigma F = 0$) y de todos los momentos de las fuerzas ($\Sigma M = 0$) que actúan sobre el cuerpo. Los procedimientos de resolución que hemos empleado en todos los problemas se basaron en estas dos condiciones, las cuales son fácilmente asimilables físicamente.

Como suele ser el caso, no es en la teoría sino en su aplicación donde residen las dificultades. Sin embargo, en este punto ya deben sernos familiares los pasos cruciales a efectuar cuando se apliquen las leyes del equilibrio. Estos son:

1. Decidir sin ambigüedades cuál es el cuerpo en equilibrio que va a estudiarse.
2. Aislar el cuerpo en cuestión de todos los demás cuerpos en contacto con él, dibujando su *diagrama de sólido libre*, sobre el cuál se representarán todas las fuerzas exteriores que actúen sobre el cuerpo aislado.
3. Respetar el principio de acción y reacción (tercera ley de Newton) al asignar sentido a cada fuerza.
4. Rotular todas las fuerzas y pares conocidos y desconocidos.
5. Tomar unos ejes de referencia y rotularlos, empleando siempre un triedro a derechas en los problemas tridimensionales.
6. Comprobar la adecuación de las ligaduras y cotejar el número de incógnitas con el número de ecuaciones de equilibrio independientes disponible.

Lo primero que ha de hacerse al abordar un problema de equilibrio es comprobar si es isostático. Cuando existan más apoyos de los necesarios para mantener el cuerpo en su posición, el problema es hiperestático y las ecuaciones de equilibrio no serán suficientes para determinar todas las reacciones exteriores. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio debemos elegir entre el álgebra escalar, el álgebra vectorial y el método gráfico, de acuerdo tanto con nuestras preferencias como con nuestra experiencia, pero el álgebra vectorial resulta especialmente útil en muchos problemas tridimensionales.

Una de las operaciones más útiles es simplificar los cálculos tomando un eje de momentos que elimine la intervención del mayor número de incógnitas posible, o sumando las fuerzas según la dirección que evite hacer referencia a determinadas incógnitas. Unos instantes de reflexión para aprovechar estas posibilidades pueden ahorrar una cantidad considerable de tiempo y esfuerzo.

Los fundamentos y métodos que se han cubierto en los capítulos 2 y 3 constituyen la parte esencialmente fundamental de la Estática y son la base sobre la que descansa todo lo que sigue, no sólo por lo que respecta a la Estática sino también a la Dinámica.

PROBLEMAS DE REPASO

3.101 Una acróbata de 50 kg pedalea con su uniciclo por el cable tenso pero ligeramente elástico. Si la flecha en el centro del tendido de 18 m es de 75 mm, hallar la tensión del cable. Se desprecian los efectos de los pesos del cable y el uniciclo.
Resp. $T = 29{,}4$ kN

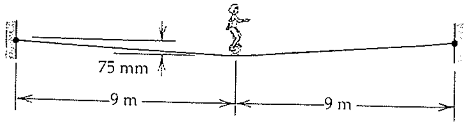


Figura problema **3.101**

3.102 Calcular la intensidad de la fuerza que soporta el pasador *B* de la leva acodada de la figura y con las cargas indicadas.

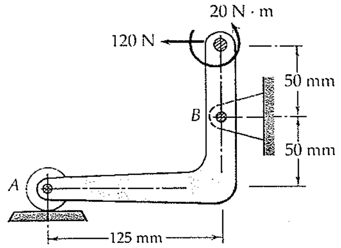


Figura problema **3.102**

3.103 El soporte sin peso *ABC* gira libremente en *A* pero su movimiento está limitado por el pasador fijo *B* dentro de la ranura lisa. Calcular la intensidad *R* de la fuerza soportada por el pasador en *A* por la acción del par aplicado de 80 N · m.
Resp. $R = 566$ N

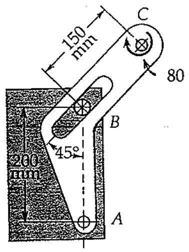


Figura problema **3.103**

3.104 La viga uniforme tiene una masa de 75 kilogramos por metro de longitud. Hallar las reacciones en el empotramiento *A*.

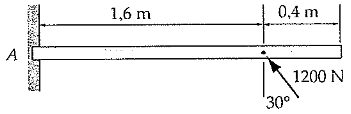


Figura problema **3.104**

3.105 La barra uniforme de 30 kg con rodillos en los extremos se apoya en las superficies horizontal y vertical gracias al cable *AC*. Calcular la tensión *T* del cable y las reacciones en *A* y *B* sobre los rodillos.
Resp. $A = 73{,}6$ N $B = 196{,}2$ N $T = 295$ N

3.106 Bajo una tensión de 10 N en *D*, la cinta magnética pasa a velocidad constante por las poleas de guía y el cabezal de borrado C. A consecuencia de los pequeños rozamientos en los cojinetes de las poleas, en *E* la cinta sufre una tensión de 11 N. Hallar la tensión *T* en el resorte de retención *B*. La placa yace en un plano horizontal y está montada sobre un cojinete de agujas de precisión en *A*.

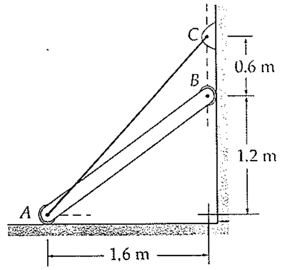


Figura problema **3.105**

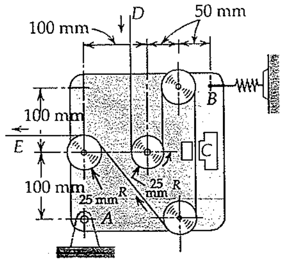


Figura problema **3.106**

3.107 El reductor de engranajes sufre la acción de los dos pares y de su peso de 200 N. Hallar la fuerza que soportan cada uno de los apoyos *A* y *B*.
Resp. $F_A = 486$ N (hacia abajo)
$F_B = 686$ N (hacia arriba)

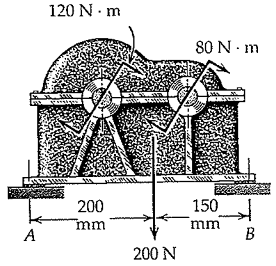


Figura problema **3.107**

3.108 Un indicador de autopista de 4 × 2 m está instalado en un poste tal como se muestra. El indicador, el bastidor y el poste tienen una masa conjunta de 300 kg, con el centro de gravedad a 3 m del eje vertical del poste. Cuando el indicador se halla sometido a un viento frontal de 125 km/h, entre sus caras anterior y posterior se desarrolla una diferencia de presión de

700 Pa. Hallar las intensidades de la fuerza y el momento de reacción en la base del poste.

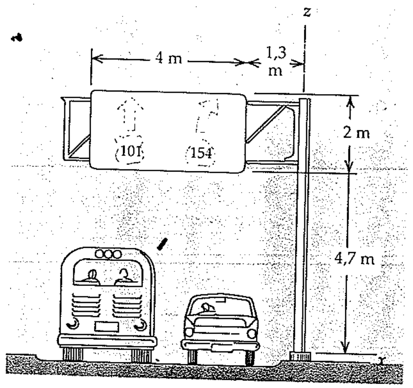

z
4 m
1,3 m
2 m
4,7 m
101
154
x

Figura problema 3.108

3.109 Si el peso de la pluma es despreciable frente a la carga aplicada de 30 kN, hallar las tensiones T_1 y T_2 en los cables y la fuerza que actúa en la rótula A.

Resp. T_1 = 45,8 kN T_2 = 26,7 kN A = 44,2 kN

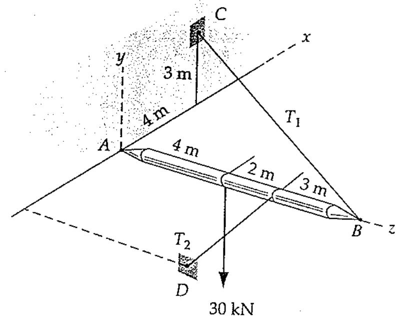

C
x
y
3 m
4 m
A
T_1
4 m
2 m
3 m
B
z
T_2
D
30 kN

Figura problema 3.109

3.110 Las tres barras uniformes de 1200 mm tienen una masa de 20 kg cada una. Se han soldado del modo que se muestra y cuelgan de los tres alambres verticales. Las barras *AB* y *BC* yacen en el plano horizontal *x-y* y la tercera yace en un plano paralelo al *x-z*. Calcular la tensión en cada alambre.

3.111 Para producir una tracción *T* de 400 N en la varilla de mando vertical hay que aplicar una fuerza vertical *P* sobre el pedal de la leva acodada. Hallar las consiguientes reacciones en los cojinetes *A* y *B*.

Resp. A = 183,9 N (hacia arriba)
B = 424 N (hacia arriba)

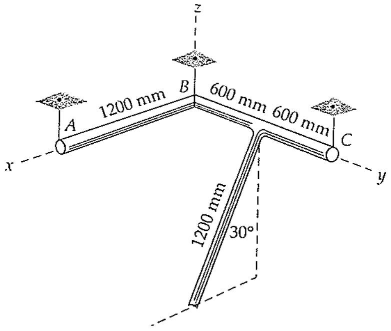

z
A
1200 mm
B
600 mm
600 mm
C
x
y
1200 mm
30°

Figura problema 3.110

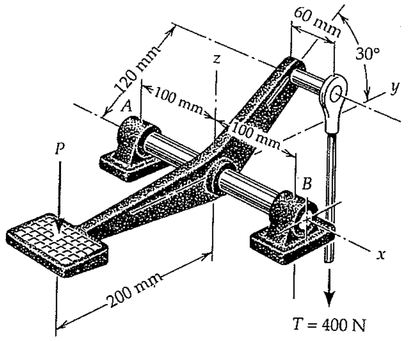

60 mm
30°
120 mm
z
y
A
100 mm
100 mm
P
B
x
200 mm
T = 400 N

Figura problema 3.111

3.112 El poste vertical sin peso resiste la carga de 4 kN y está sujeto por los dos cables *BC* y *BD* y la rótula *A*. Calcular las tensiones en los cables y la intensidad de la reacción en *A*.

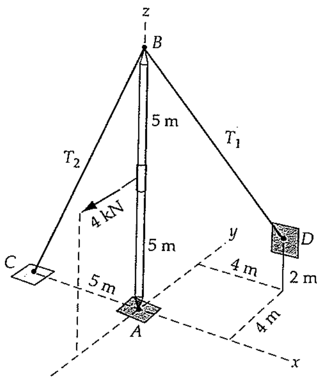

z
B
5 m
T_1
T_2
4 kN
5 m
y
D
C
5 m
4 m
2 m
A
4 m
x

Figura problema 3.112

3.113 El motor de la performadora de hincar postes genera un par de 450 N · m a la barrena. El brazo *B* se desliza libremente por dentro de la guía cilíndrica *C* pero no puede girar alrededor del eje horizontal de *C*. Si el conjunto puede girar alrededor del eje vertical de la montura *D*, determinar la fuerza ejercida contra la rueda trasera derecha por el bloque *A* (o *A'*) que impide la rodadura del camión desfrenado. (*Sugerencia*: Conviene observar el sistema desde arriba.)

Resp. A' = 187,5 N

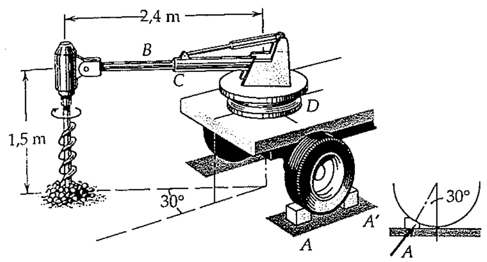

2,4 m
B
C
D
1,5 m
30°
A'
A
30°
A

Figura problema 3.113

3.114 Las placas de la figura están ligadas tal como se representa y sometidas a una fuerza conocida *F*. Indicar qué categoría es aplicable en cada caso:

I. Ligaduras inadecuadas para asegurar una inmovilidad completa.
II. Ligaduras adecuadas, pero no en exceso para mantener la placa en equilibrio.
III. Inmovilización completa, pero las ligaduras son excesivas para asegurar la posición de equilibrio.

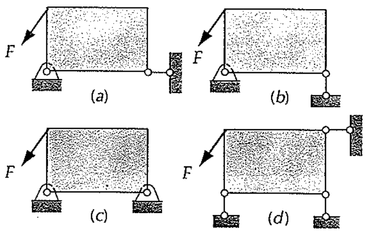


Figura problema 3.114

3.115 El engranaje *C* arrastra la polea *D* a velocidad constante. Para las tensiones indicadas de las correas, calcular la fuerza *P* sobre los dientes de engranaje y los módulos de las fuerzas totales que soportan los cojinetes *A* y *B*.

Resp. P = 70,9 N A = 83,3 N B = 208 N

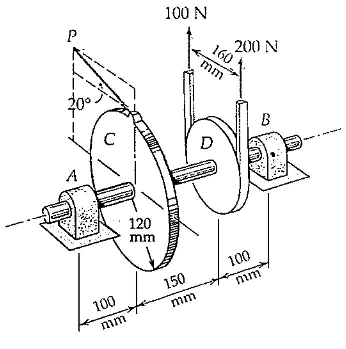

100 N
P
160 mm
200 N
20°
C
D
B
A
120 mm
100 mm
150 mm
100 mm

Figura problema 3.115

3.116 Explicar por qué la barra circular uniforme de 50 kg no puede estar en equilibrio estático en la posición indicada.

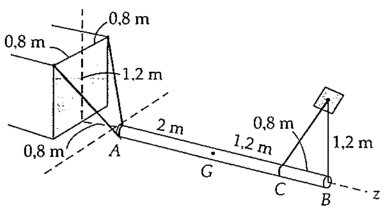

0,8 m
0,8 m
1,2 m
2 m
0,8 m
1,2 m
0,8 m
A
G
1,2 m
C
B
z

Figura problema 3.116

3.117 Para la posición representada, el cigüeñal del pequeño motor bicilíndrico está sometido a las fuerza de 400 y 800 N

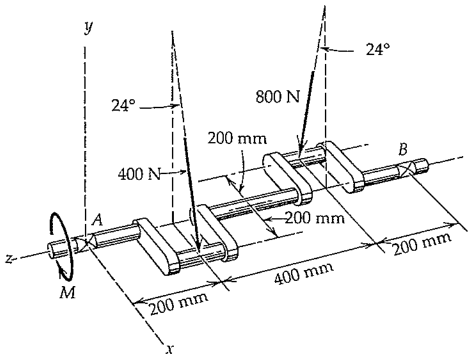

y
24°
24°
800 N
200 mm
400 N
B
A
200 mm
z
M
400 mm
200 mm
200 mm
x

Figura problema 3.117

ejercidas por las bielas. Si el cigüeñal está en equilibrio, hallar las fuerzas de soporte en *A* y *B* y el par *M* que se ejerce sobre dicho órgano.

Resp. $A_y = 457$ N $\quad A_x = -40.7$ N
$B_x = 203$ N $\quad B_y = 639$ N $\quad M = 73{,}1$ N · m

3.118 Tres bolas de acero idénticas, de masa *m* cada una, se encuentran dentro del anillo cilíndrico de acero que descansa sobre una superficie horizontal y cuya altura es ligeramente superior al radio de las bolas. El diámetro del anillo es tal que cada una de ellas está en contacto con las otras dos. Se coloca una cuarta bola, también elástica sobre las tres. Determinar la reacción *P* del anillo sobre cada una de las tres bolas inferiores.

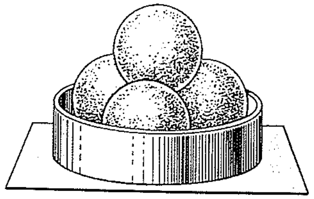


Figura problema 3.118

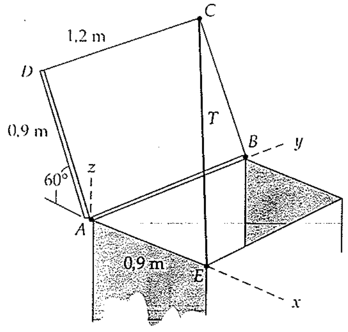
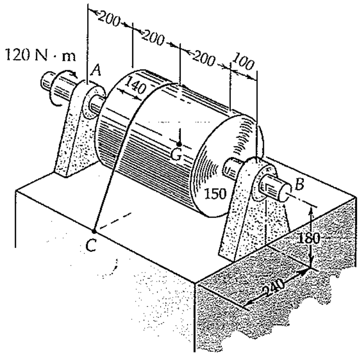


Figura problema 3.119

3.119 El cable metálico *CE* sujeta la tapa uniforme de 45 kg del depósito rectangular de modo que forma un ángulo de 60° con el plano horizontal *x*-*y*. La bisagra *B* soporta empujes en la dirección de *AB*. La bisagra *A* sólo soporta fuerzas normales a *AB*. Calcular la tensión *T* en el cable.

Resp. $T = 279$ N

3.120 El tambor y el árbol están soldados y su masa es de 50 kg con centro de gravedad en *G*. El árbol está sometido a un par de momento 120 N · m y el tambor no puede girar a causa de la cuerda arrollada alrededor suyo y fija al mismo y al punto *C*. Calcular los módulos de las fuerzas que soportan los cojinetes *A* y *B*.



Cotas en milímetros
Figura problema 3.120

* Problemas especiales para ordenador

*3.121 El pescante está proyectado para una carga máxima de 10 kN y su viga uniforme en doble *T* tiene una masa de 200 kg. (*a*) Representar gráficamente el módulo *R* de la fuerza actuante en el pasador *A* en función de *x*, dentro del radio de alcance de *x* = 0,2 m a *x* = 3,8 m. (*b*) Determinar el valor mínimo de *R* y el valor correspondiente de *x*. (*c*) ¿Para qué valor mínimo de *R* puede proyectarse sin peligro el pasador *A*? (Tómese $g = 10$ m/s^2.)

Resp. (*b*) $R_{\text{min}} = 10{,}39$ kN para $x = 0{,}8$ m
(*c*) 18,25 kN

*3.122 La puerta rectangular uniforme de la trampa, de masa *m*, está embisagrada en su canto superior y su posición la controla el cable que pasa por la polea fija *A*. Representar gráficamente la tensión *T* en el cable, necesaria para mantener abierta la puerta, en función de θ desde 0° a 90°. Expresar *T* como una cantidad adimensional $T' = T/mg$ y demostrar que el valor límite de T' cuando $\theta = 90°$ es $\frac{1}{2}$.

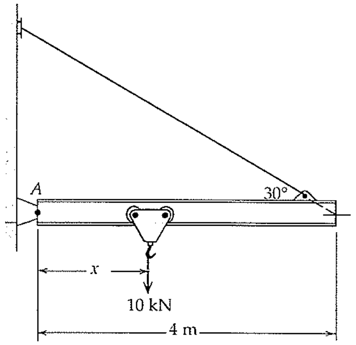


Figura problema 3.121

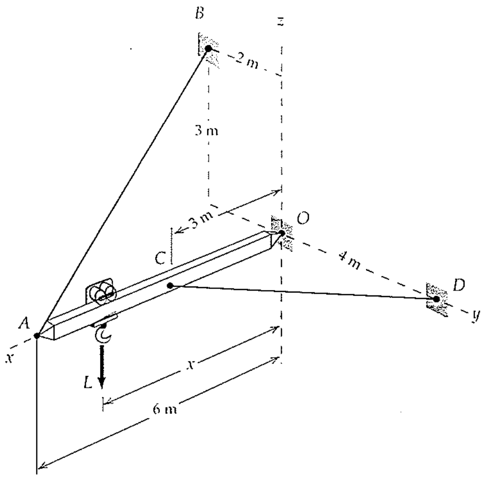


Figura problema 3.123

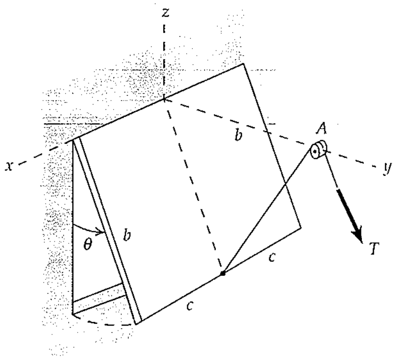


Figura problema 3.122

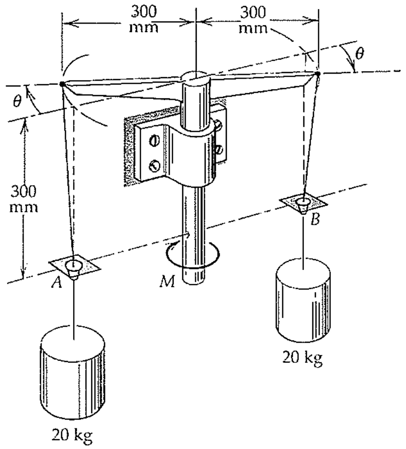


Figura problema 3.124

*3.123 La pluma horizontal está sujeta por los cables *AB* y *CD* y la rótula *O*. Su peso puede despreciarse para determinar la influencia de la posición de la carga vertical *L* sobre la reacción en *O*. Si *R* representa la intensidad de la fuerza total en *O*, determinar por cálculo la relación mínima *R*/*L* y el correspondiente valor de *x*. Seguidamente escribir un programa de ordenador para *R*/*L* y representar gráficamente los resultados para $0 < x < 6$ m como comprobación de los cálculos.

Resp. $(R/L)_{\text{min}} = 0{,}951$ para $x = 0{,}574$ m

*3.124 La posición vertical de los dos cilindros de 20 kg se controla mediante el par *M* aplicado al árbol central. Los cables sujetos a los extremos de los brazos pasan por los pequeños orificios lisos *A* y *B* de una misma superficie inmóvil. Representar gráficamente *M* en función de θ para $0° \le \theta \le 180°$. Determinar el valor máximo de *M* y el correspondiente valor de θ. Para los cálculos, tómese $g = 10$ m/s^2.

*3.125 La viga de acero en doble *T* de 7,8 m tiene una masa de 800 kg y se iza hasta su posición aplicando una fuerza *P* sobre la carretilla a la que está asegurado el extremo inferior *B*. El cable *AC* está amarrado al centro de la viga y es horizontal cuando *B* se encuentra exactamente debajo de *C*. Determinar, en función de *x*, la fuerza *P* necesaria para mantener el equilibrio desde *x* = 0 hasta el valor de *x* en que *A*′ se encuentra exactamente debajo de C. Hallar el valor máximo de P y el correspondiente valor de x.

Resp. $P_{max} = 4{,}79$ kN para $x = 1{,}203$ m

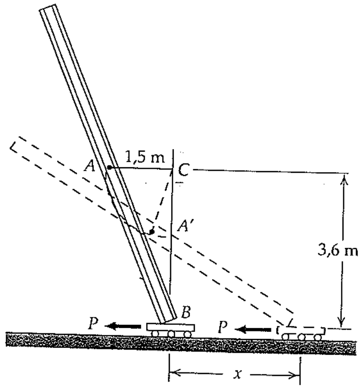


Figura problema 3.125

*3.126 La puerta de la trampilla es un panel cuadrado uniforme de masa m con su canto inferior embisagrado en el plano x-y horizontal. El cable de mando pasa por una polea pequeña fija en A pero libre para rotar acompañando a la dirección del cable. Expresar la tensión T necesaria para el equilibrio en función del ángulo θ utilizando la variable adimensional $T' = T/mg$. Representar gráficamente T' en función de θ para $0° \le \theta \le 90°$ y mostrar que T' tiende a $\frac{1}{2}$ cuando θ tiende a 90°.

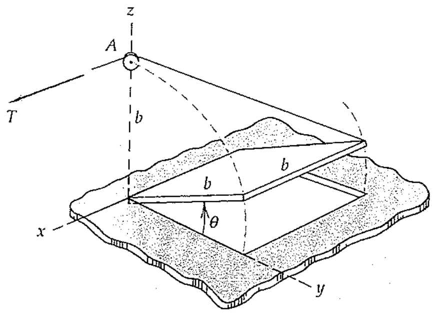
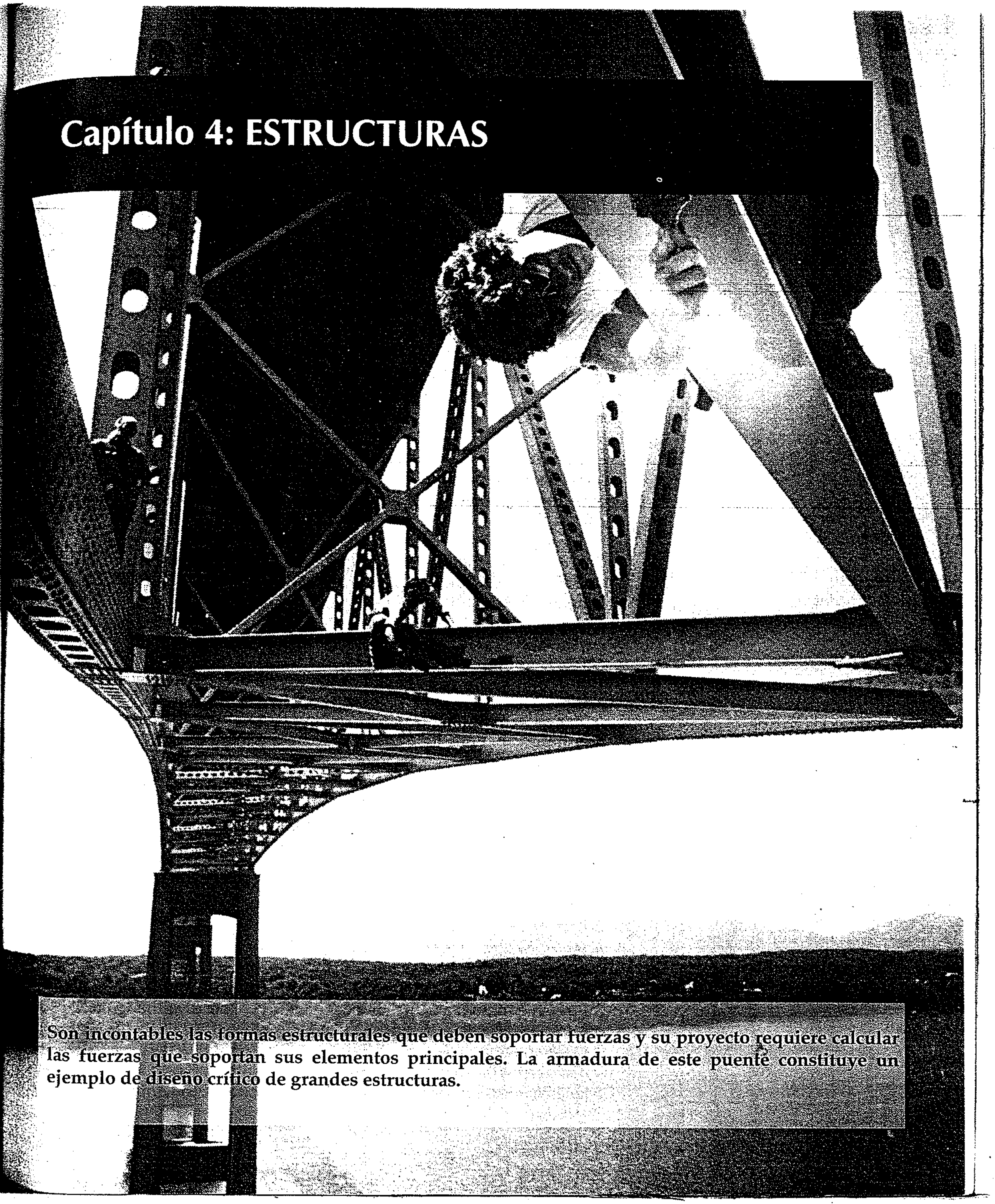


Figura problema 3.126

Capítulo 4: ESTRUCTURAS



Son incontables las formas estructurales que deben soportar fuerzas y su proyecto requiere calcular las fuerzas que soportan sus elementos principales. La armadura de este puente constituye un ejemplo de diseño crítico de grandes estructuras.

4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 centramos nuestra atención en el equilibrio de un solo cuerpo rígido o en un sistema de miembros conectados que, al considerarlo en conjunto, se analizaba como un solo cuerpo rígido. En tales problemas se empezaba dibujando el diagrama de sólido libre de ese cuerpo para evidenciar todas las fuerzas exteriores al cuerpo y luego se aplicaban las ecuaciones de equilibrio para fuerzas y momentos. En el capítulo presente la atención se enfoca a la determinación de las fuerzas interiores en una estructura, o sea, de las fuerzas de acción y reacción entre los elementos y miembros enlazados. Se llama estructura a todo sistema de miembros unidos entre si y construido para soportar con seguridad las cargas a él aplicadas. Para estudiar las fuerzas en una estructura, es necesario desmembrarla y analizar por separado el diagrama de sólido libre de cada miembro o de las combinaciones de miembros al objeto de determinar las fuerzas internas. Este análisis requiere la aplicación cuidadosa de la tercera ley de Newton, que establece que cada acción va acompañada de una reacción igual y de sentido opuesto.

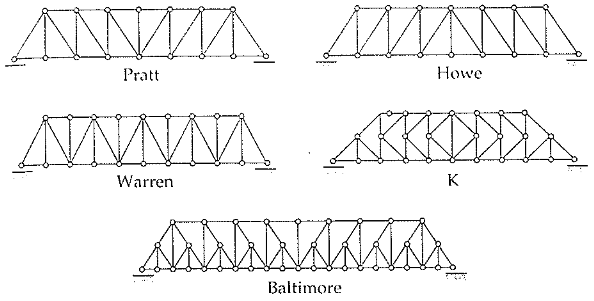
En este capítulo 4 estudiaremos las fuerzas internas que actúan en varios tipos de estructuras, como son armaduras, entramados y máquinas. En este estudio sólo consideraremos estructuras *estáticamente determinadas*, o *isostáticas*, es decir, estructuras que no poseen más ligaduras de las necesarias para mantener una configuración de equilibrio. De esta forma, tal como hemos visto, bastarán las ecuaciones de equilibrio para determinar todas las reacciones desconocidas.

Si el lector domina el procedimiento básico desarrollado en el capítulo 3 para definir sin ambigüedad el cuerpo a considerar, construyendo un diagrama de sólido libre correcto, encontrará pocas dificultades en el análisis de estructuras isostáticas. El análisis de armaduras, entramados y máquinas, y vigas bajo cargas concentradas constituye una aplicación directa de las materias desarrolladas en los dos capítulos precedentes.

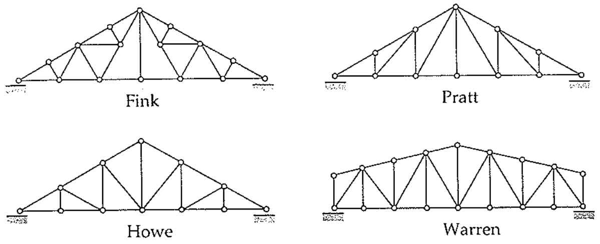
4.2 ARMADURAS PLANAS

Un entramado de miembros unidos por sus extremos de manera que constituyan una estructura rígida recibe el nombre de armadura. Los puentes, los soportes de cubiertas, las grúas y otras estructuras semejantes son ejemplos habituales de armaduras. Los elementos estructurales utilizados son vigas en doble T, vigas en U, ángulos, barras y perfiles especiales que se conectan por sus extremos mediante uniones remachadas o soldadas, o con grandes tornillos o pasadores. Cuando los miembros de la armadura se hallan todos esencialmente en un mismo plano, decimos que se trata de una *armadura plana*. Las armaduras planas, como las utilizadas en los puentes, suelen proyectarse por parejas, poniendo una a cada lado del puente y uniéndolas mediante vigas transversales que soportan la calzada y transmiten las cargas a los miembros de las armaduras. En la figura 4.1 se muestran varios ejemplos de cerchas comúnmente utilizadas que pueden estudiarse como armaduras planas.

El elemento fundamental de una armadura plana es el triángulo. Tres barras unidas por sus extremos mediante pasadores (fig. 4.2*a*) constituyen un conjunto indeformable. Por otra parte, cuatro o más barras articuladas, formando un polígono de otros tantos lados, constituyen un conjunto no rígido. El conjunto no rígido de la figura 4.2*b* puede hacerse indeformable o rígido, añadiendo una barra entre A y D o entre B y C, formando así dos triángulos. Esta estructura es ampliable añadiéndole barras articuladas por sus extremos, tales como DE y CE o AF y DF (fig. 4.2*c*), que están articuladas a dos nudos fijos, con lo que de ese modo la estructura seguirá siendo rígida. El adjetivo "rígida" se emplea en el sentido de "no plegable" y también en el sentido de que la deformación de los miembros provocada por los esfuerzos inducidos en el interior es despreciable.

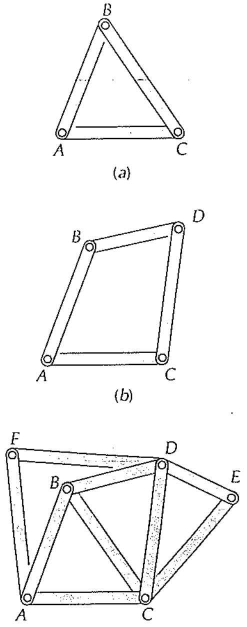


Cerchas empleadas corrientemente en puentes



Cerchas empleadas corrientemente en cubiertas

Figura 4.1



(*a*)

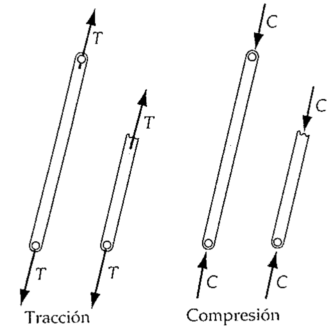
(*b*)

(*c*)

Figura 4.2

Las estructuras construidas según la forma descrita, a partir de un triángulo inicial, reciben el nombre de *armaduras simples*. Cuando hay más miembros de los necesarios para impedir que la estructura pierda su configuración, la armadura es hiperestática. Una estructura hiperestática no puede estudiarse sólo con las ecuaciones de equilibrio. Los miembros o apoyos adicionales innecesarios para conservar la posición de equilibrio se llaman *superabundantes* o *redundantes*.

En el diseño de una armadura interviene la determinación de las fuerzas en los distintos miembros y la elección de las formas y dimensionados adecuados para resistir esas fuerzas. Para analizar las fuerzas en las armaduras simples se establecen varias hipótesis. Primero, se supone que todos los *miembros* son *de dos fuerzas*. Un miembro de dos fuerzas es aquel que se halla en equilibrio bajo la acción de dos únicas fuerzas, tal como se definió en general en el apartado 3.3 y figura 3.4. En las armaduras, cada miembro es un enlace recto que une los



Miembros de dos fuerzas

Figura 4.3

dos puntos de aplicación de las fuerzas. Las dos fuerzas están aplicadas en los extremos del miembro y necesariamente, para que haya equilibrio, deben ser iguales, opuestas y *colineales*. Tal como se muestra en la figura 4.3, el miembro puede trabajar a tracción o a compresión. Cuando representamos el equilibrio de una porción de un miembro de dos fuerzas, la tracción T o la compresión C que actúa en la sección por donde se corte es la misma para todas las secciones. Se supone aquí que el peso del miembro es despreciable frente a la fuerza que soporta. De no ser así o si debe tenerse en cuenta el pequeño peso P del miembro, ese peso P puede sustituirse por dos fuerzas, de valor $P/2$ cada una si el miembro es uniforme, aplicadas en los extremos del miembro. A los efectos, esas fuerzas se tratan como fuerzas exteriores aplicadas en los pasadores de unión. Al tener en cuenta de este modo el peso del miembro, se obtiene el valor correcto de la tracción o compresión medias a lo largo del miembro, pero no dará cuenta del efecto de la flexión del miembro.

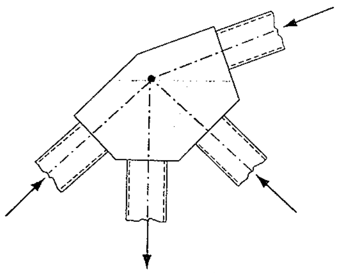


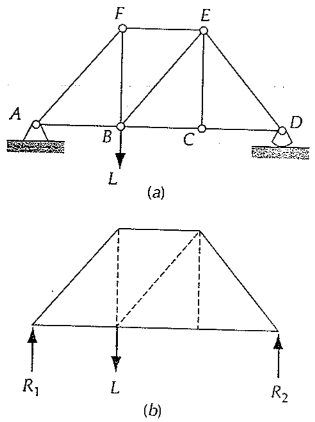
Figura 4.4

Cuando las uniones entre los miembros de una armadura se realizan por roblonado o soldadura, la hipótesis de que las uniones son compensadas suele ser satisfactoria si los ejes geométricos de los miembros concurren todos en un mismo punto tal como se muestra en la figura 4.4.

En el análisis de las armaduras sencillas suponemos además que todas las fuerzas externas están aplicadas en los nudos (las uniones). Esta condición se satisface en la mayoría de las armaduras. En las cerchas de puentes el tablero superior suele descansar sobre vigas transversales apoyadas en los nudos.

En el caso de las armaduras de gran tamaño, la previsión de los efectos de la contracción y dilatación térmicas y de las deformaciones producidas por las cargas acostumbra a realizarse en uno de los apoyos, donde se coloca un rodillo, zapata u otro dispositivo deslizante. Según se explicó en el apartado 3.3, las armaduras y entramados carentes de esta previsión resultan hiperestáticos.

Expondremos dos procedimientos para estudiar las fuerzas que se desarrollan en las armaduras sencillas y, para ello, nos referiremos a la armadura de la figura 4.5. En la figura 4.5*b* se representa el diagrama de sólido libre del conjunto. Las reacciones exteriores suelen determinarse aplicando las ecuaciones de equilibrio al conjunto de la armadura antes de comenzar el análisis del resto de la misma.



(*a*)

(*b*)

Figura 4.5

4.3 MÉTODO DE LOS NUDOS

Este método consiste en imponer la condición de equilibrio a las fuerzas que se ejercen sobre el pasador de cada nudo. Se trata, por tanto, de un caso de equilibrio de fuerzas concurrentes y habrá únicamente dos ecuaciones independientes. Se inicia el procedimiento en cualquier nudo donde haya al menos una carga conocida y no más de dos fuerzas desconocidas. Puede comenzarse por el pasador de la izquierda, cuyo diagrama de sólido libre se representa en la figura 4.6. Designando con letras los nudos, la fuerza que soporta cada miembro se expresará con las dos letras correspondientes a los extremos del miembro. En este caso sencillo, los sentidos correctos de las fuerzas se evidencian por simple inspección. Se incluyen también los diagramas de sólido libre de las porciones AF y AB de los miembros para indicar claramente el mecanismo de acción y reacción. El miembro AB hace contacto en realidad con la parte izquierda del pasador, aunque la fuerza AB se haya dibujado partiendo del lado derecho alejándose del pasador. O sea, si sistemáticamente dibujamos las flechas en el *mismo* lado del pasador donde está el miembro, una tracción (como AB) estará siempre representada por una flecha que *se aleja* del pasador, y una compresión (como AF) estará siempre representada por una flecha que *apunta hacia* el pasador. El módulo de AF se obtiene de la ecuación $\Sigma F_y = 0$ y luego se halla AB con $\Sigma F_x = 0$.

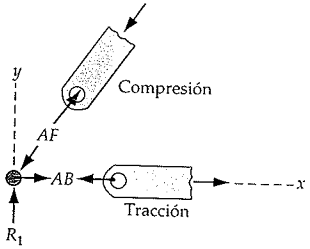


Figura 4.6

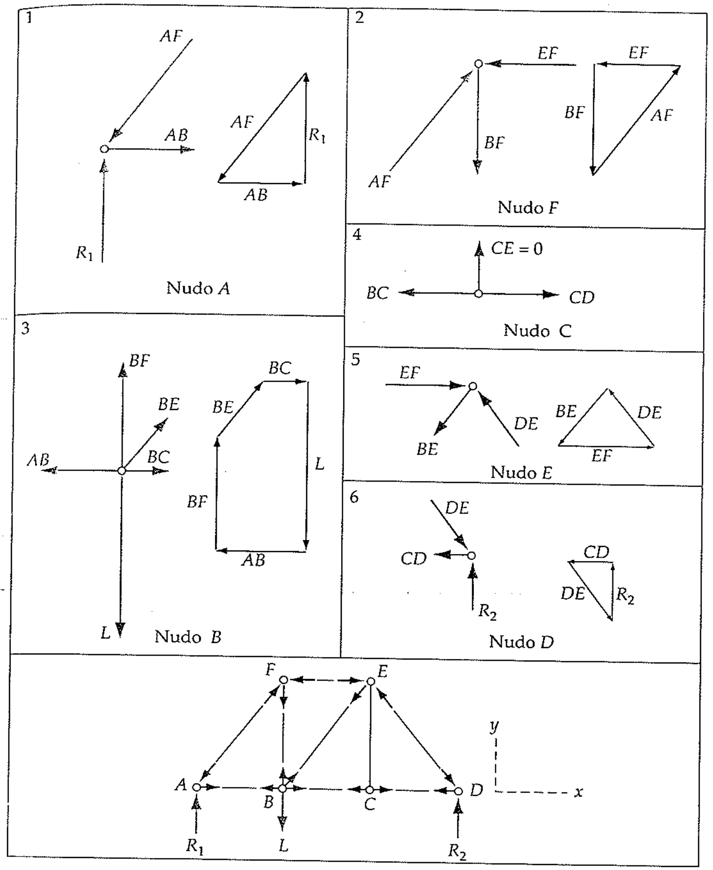
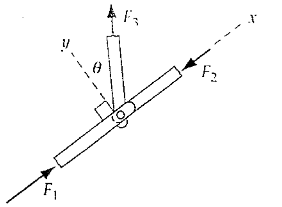


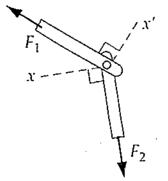
Figura 4.7

A continuación podemos analizar el nudo F que contiene ya sólo dos incógnitas, EF y BF. Después se analizan los nudos B, C, E y D, en este orden. En la figura 4.7 se muestra el diagrama de sólido libre de cada nudo y el polígono de fuerzas que representa gráficamente las dos condiciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Los números indican el orden en que se analizan los nudos. Adviértase que, cuando al final se llega al nudo D, la reacción ya calculada R_2 debe estar en equilibrio con las fuerzas en los miembros CD y ED que se determinaron previamente al analizar los dos nudos contiguos. Este requisito nos proporciona una comprobación de la validez de los cálculos. Adviértase asimismo



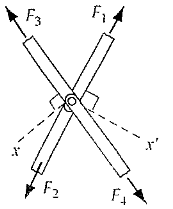
Para que $\Sigma F_y = 0$ ha de ser $F_3 = 0$
Para que $\Sigma F_x = 0$ ha de ser $F_1 = F_2$

(a)



Para que $\Sigma F_x = 0$ ha de ser $F_1 = 0$
Para que $\Sigma F_{x'} = 0$ ha de ser $F_2 = 0$

(b)



Para que $\Sigma F_x = 0$ ha de ser $F_1 = F_2$
Para que $\Sigma F_{x'} = 0$ ha de ser $F_3 = F_4$

(c)

Figura 4.8

que al aislar el nudo C queda de manifiesto en el acto que la fuerza en CE es nula porque debe cumplirse que $\Sigma F_y = 0$. Desde luego, la fuerza en ese miembro no sería nula si en C hubiera una carga vertical.

Conviene muchas veces indicar la tracción T y la compresión C en cada uno de los miembros directamente sobre la armadura original, dibujando flechas que se alejen de los nudos para las tracciones y flechas que apunten al nudo para las compresiones. Esta representación se ilustra en la parte inferior de la figura 4.7.

A veces es imposible asignar de entrada el sentido correcto a uno o a ambas de las fuerzas desconocidas que actúan en un nudo dado. En tales casos pueden asignarse sentidos arbitrarios y si el cálculo nos da algún valor negativo ello indica que el sentido verdadero es el contrario al asignado.

Si una armadura sencilla tiene más ligaduras de las necesarias para asegurar una configuración de equilibrio estable, la armadura es hiperestática exteriormente y los apoyos sobrantes constituyen una superabundancia *exterior*. Si la armadura está constituida por más miembros de los necesarios para evitar su derrumbamiento, la armadura es hiperestática interiormente y los miembros sobrantes constituyen una superabundancia *interior*. Para las armaduras isostáticas exteriormente, puede establecerse una relación entre el número de miembros y el número de nudos necesarios para su estabilidad sin superabundancias. Como el equilibrio de cada nudo está especificado por dos ecuaciones de fuerzas, para una armadura simple de n nudos podrán escribirse $2n$ ecuaciones. Por otra parte, la armadura completa, compuesta de m miembros y con tres incógnitas definiendo las reacciones exteriores, presenta $m + 3$ incógnitas. Entonces, una armadura plana simple, isostática interiormente, cumple la condición $m + 3 = 2n$.

Es esta una condición necesaria para la estabilidad, pero no es suficiente, pues uno o más de los m miembros pueden disponerse de modo que no contribuyan a dotar de una configuración estable al conjunto de la armadura. Si $m + 3 > 2n$, habrá más miembros que ecuaciones independientes y la armadura será hiperestática interiormente. Si $m + 3 < 2n$ faltarán miembros, la armadura será inestable y se derrumbará.

Casos particulares. Consideremos ahora algunos casos particulares que se presentan con frecuencia al estudiar armaduras simples. Cuando dos miembros colineales, como los de la figura 4.8*a*, trabajan a compresión, hay que añadir un tercer miembro para mantener la alineación de aquellos y evitar el pandeo. Se ve de inmediato, sin más que sumar las fuerzas en la dirección y, que la fuerza F_3 actuante en el tercer miembro ha de ser nula y sumando las fuerzas en la dirección x se ve que $F_1 = F_3$. Esta conclusión es cierta cualquiera que sea el ángulo θ y, por supuesto, también si los miembros colineales trabajan a tracción. Si en el nudo estuviera aplicada una fuerza con componente no nula en la dirección y, F_3 ya no sería cero.

Cuando dos miembros colineales concurren en un nudo como en la figura 4.8*b*, si en ese nudo no hay carga, las fuerzas en ambos miembros deben ser nulas, como se deduce sin más que efectuar las dos sumas de fuerzas.

Cuando en un nudo concurren dos parejas de miembros colineales, como en la figura 4.8*c*, las fuerzas en los miembros de cada pareja deben ser iguales y opuestas, lo que se deduce de las sumas de fuerzas que se indican en la figura.

Los recuadros de las armaduras suelen reforzarse con miembros diagonales, llamados riostras o cuarterones, de la forma que se indica en la figura 4.9*a*. Los recuadros de este tipo son hiperestáticos si cada riostra es capaz de trabajar tanto a tracción como a compresión. Si las riostras son flexibles e incapaces de trabajar a compresión, como los cables, únicamente trabajará la riostra sometida a tracción y la otra podrá no ser tenida cuenta. La forma en que un recuadro vaya a deformarse resulta en general evidente de la simetría del sistema de cargas. Si la deformación es como se indica en la figura 4.9*b*, debemos trabajar con la riostra AB y desechar la CD. Cuando no sea posible tomar una decisión por simple inspección, podemos hacer una elección arbitraria y si la fuerza que soporta el miembro retenido resulta positiva (tracción) es que la elección fue correcta. Si la fuerza resulta negativa (compresión), deberá trabajarse con el otro miembro y rehacer todos los cálculos.

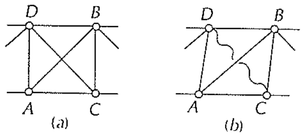


Figura 4.9

La resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por nudo puede evitarse eligiendo atentamente los ejes de referencia. Así, en el caso del nudo esquematizado en la figura 4.10, donde L es conocida y F_1 y F_2 son desconocidas, una suma de fuerzas en la dirección x eliminará la intervención de F_1 y una suma de fuerzas en la dirección x' eliminará la intervención de F_2. Cuando intervengan ángulos de determinación no sencilla, puede que sea más aconsejable resolver el sistema de ecuaciones resultante de proyectar ambas incógnitas sobre el mismo sistema de ejes de referencia.

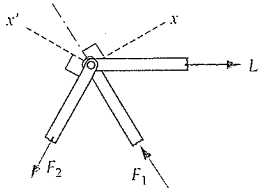
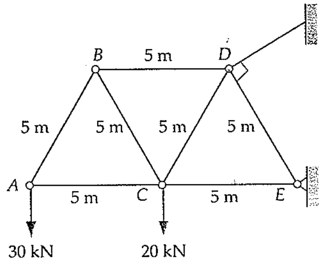


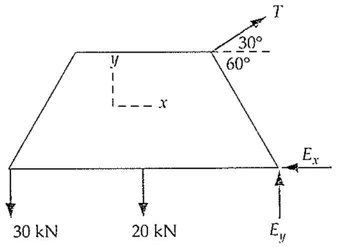
Figura 4.10

PROBLEMA TIPO 4.1

Calcular, por el método de los nudos, la fuerza en los miembros del entramado en voladizo.



Solución. Si no se deseara calcular las reacciones externas en D y E, el análisis de un entramado en voladizo podría iniciarse en el nudo del extremo en que se aplica la carga. Sin embargo, este entramado lo analizaremos por completo, por lo que el primer paso será calcular las fuerzas exteriores en D y E empleando el diagrama de sólido libre del entramado en conjunto. Las ecuaciones de equilibrio dan

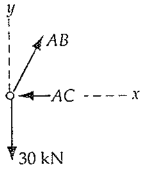


$[\Sigma M_E = 0]$ $\qquad 5T - 20(5) - 30(10) = 0 \qquad T = 80{,}0$ kN

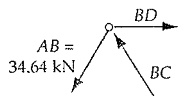
$[\Sigma F_x = 0]$ $\qquad 80{,}0 \cos 30° - E_x = 0 \qquad E_x = 69{,}3$ kN

$[\Sigma F_y = 0]$ $\qquad 80{,}0 \operatorname{sen} 30° + E_y - 20 - 30 = 0 \qquad E_y = 10{,}0$ kN

A continuación, dibujamos los diagramas de sólido libre que muestren las fuerzas actuantes en cada nudo. La exactitud de los sentidos asignados a las fuerzas



Nudo A



Nudo B

① Debemos recalcar que la designación de tracción o compresión se refiere al miembro y no al nudo. Obsérvese que la flecha representante de la fuerza se dibuja del mismo lado del nudo que el miembro que ejerce la fuerza. Así puede distinguirse la tracción (la flecha se aleja del nudo) de la compresión (la flecha apunta al nudo).

se comprueba al considerar cada nudo en el orden asignado. No debe haber dudas acerca de la exactitud del sentido asignado a las fuerzas actuantes en el nudo A. El equilibrio exige

$[\Sigma F_y = 0]$ $\qquad 0{,}866AB - 30 = 0 \qquad AB = 34{,}64 \text{ kN } T$ *Resp.*

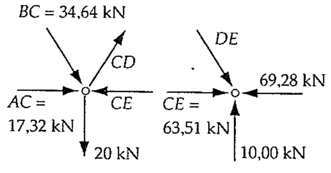
$[\Sigma F_x = 0]$ $\qquad AC - 0{,}5(34{,}64) = 0 \qquad AC = 17{,}32 \text{ kN} C$ *Resp.*

① donde T significa tracción y C compresión.

Como en C actúan más de dos fuerzas desconocidas, el siguiente nudo a analizar debe ser B. La fuerza BC debe tener una componente vertical ascendente, en cuyo caso la fuerza BD debe contrarrestar las componentes hacia la izquierda. Otra vez las fuerzas se obtienen de

$[\Sigma F_y = 0]$ $\qquad 0{,}866CD - 0{,}866(34{,}64) = 0 \qquad BC = 34{,}64 \text{ kN } C$ *Resp.*

$[\Sigma F_x = 0]$ $\qquad BD - 2(0{,}5)(34{,}64) = 0 \qquad BD = 34{,}64 \text{ kN } T$ *Resp.*



Nudo C Nudo E

Ahora en el nudo C hay sólo dos incógnitas que se determinan como antes

$[\Sigma F_y = 0]$ $\qquad 0{,}866CD - 0{,}866(34{,}64) - 20 = 0$

$CD = 57{,}74 \text{ kN } T$ *Resp.*

$[\Sigma F_x = 0]$ $\qquad CE - 17{,}32 - 0{,}5(34{,}64) - 0{,}5(57{,}74) = 0$

$CE = 63{,}51 \text{ kN } C$ *Resp.*

Finalmente, del nudo E resulta

$[\Sigma F_y = 0]$ $\qquad 0{,}866DE = 10{,}00 \qquad DE = 11{,}55 \text{ kN } C$ *Resp.*

y la ecuación $\Sigma F_x = 0$ sirve de comprobación.

PROBLEMAS

(Resolver los problemas siguientes por el método de los nudos. Salvo que se indique otra cosa, se despreciará el peso de los miembros comparado con las fuerzas que soportan.)

Problemas introductorios

4.1 Hallar la fuerza en cada miembro de la armadura cargada.

Resp. $AB = 250 \text{ N } T \qquad AC = 600 \text{ N } T$
$BC = 650 \text{ N } C$

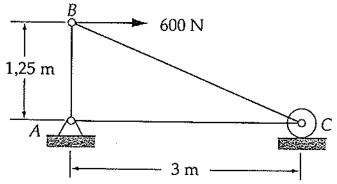


Figura problema 4.1

4.2 Hallar la fuerza en cada miembro de la armadura simple equilátera.

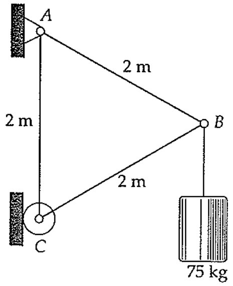


Figura problema 4.2

4.3 Hallar la fuerza en cada miembro de la armadura cargada. Explicar por qué no hace falta saber las longitudes de los miembros

Resp. $AB = 1{,}2 \text{ kN } C \qquad AC = 1{,}039 \text{ kN } T$
$BC = 2{,}08 \text{ kN } C$

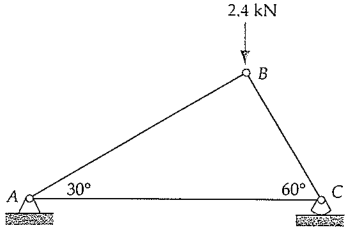


Figura problema 4.3

4.4 Hallar la fuerza en cada miembro de la armadura cargada.

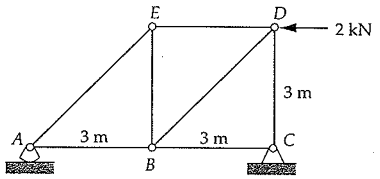


Figura problema 4.4

4.5 Hallar la fuerza en cada miembro de la armadura cargada. ¿Influye la carga de 6 kN en los resultados?

Resp. $AB = 3{,}69 \text{ kN } T \qquad BC = 2{,}31 \text{ kN } C$
$BC = BE = 4{,}62 \text{ kN } C$
$DC = DE = AE = 4{,}62 \text{ kN } T$

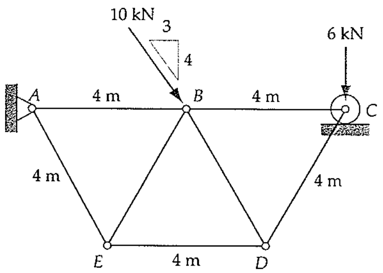


Figura problema 4.5

4.6 Hallar las fuerzas en los miembros BE y BD de la armadura bajo la carga L. Los ángulos interiores son todos de 60° y 120°.

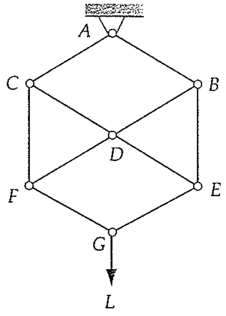


Figura problema 4.6

Problemas representativos

4.7 Calcular las fuerzas en los miembros CG y CF de la armadura representada.

Resp. $CG = 2{,}24 \text{ kN } T \qquad CF = 1 \text{ kN } C$

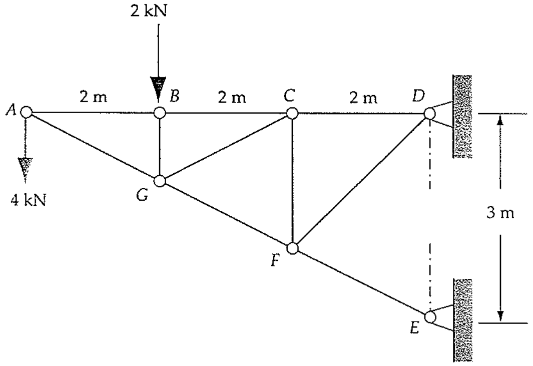


Figura problema 4.7

4.8 Eliminando la fuerza de 2 kN del problema 4.7, identificar por observación directa cuáles son los miembros que no trabajan. Por otra parte, si la fuerza de 2 kN estuviera aplicada en G en vez de en B, ¿habría miembros que no trabajaran?

4.9 Calcular la fuerza en cada miembro de la armadura cargada.

Resp. $AB = BC = CD = 2{,}11$ kN C
$CE = BE = 2{,}11$ kN T
$AE = 2{,}04$ kN T
$DE = 1{,}057$ kN T

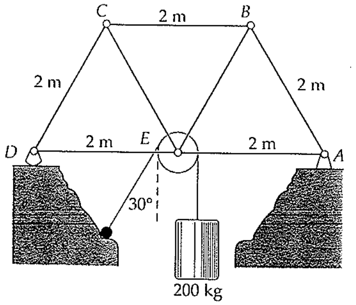

C
2 m
B
2 m
2 m
D
2 m
E
2 m
A
30°
200 kg

Figura problema 4.9

4.10 Cada miembro de la armadura es una barra uniforme de 8 m de 400 kg de masa. Calcular la tracción o compresión media en cada miembro debida a los pesos.

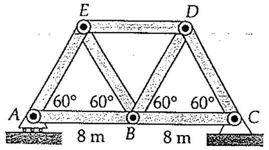

E
D
60°
60°
60°
60°
A
C
8 m
B
8 m

Figura problema 4.10

4.11 El cable EI levanta el puente levadizo. Las cuatro cargas concentradas en los nudos son consecuencia del peso del tablero. Hallar las fuerzas en los miembros EF, DE, DF, CD y FG.

Resp. $EF = 20{,}6$ kN C $\quad DE = 24{,}6$ kN T
$DF = 15{,}3$ kN C
$CD = 6{,}44$ kN T
$FG = 32{,}5$ kN C

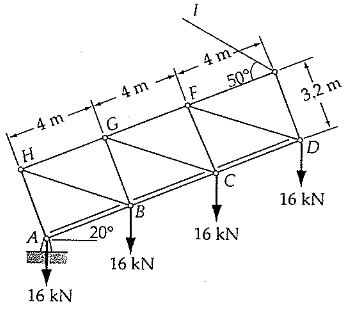

I
4 m
4 m
4 m
50°
3,2 m
E
F
G
H
D
C
B
A
20°
16 kN
16 kN
16 kN
16 kN

Figura problema 4.11

4.12 La armadura está compuesta de triángulos equiláteros de lados a y está sujeta tal como se representa. Hallar las fuerzas en los miembros EF, DE y DF.

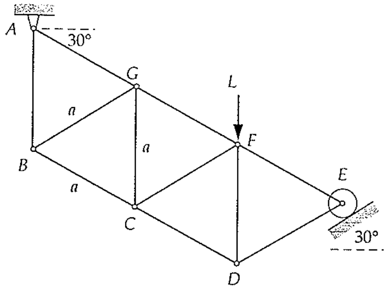

A
30°
G
L
a
a
F
B
a
E
C
30°
D

Figura problema 4.12

4.13 La armadura equiangular está cargada y sujeta tal como se representa. Hallar las fuerzas en todos sus miembros en función de la carga horizontal L.

Resp. $AB = BC = L\ T$ $\quad AF = EF = L\ C$
$DE = CD = L/2\ T$ $\quad BF = DF = BD = 0$

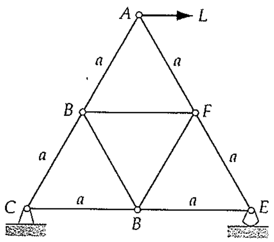

A
L
a
a
B
F
a
a
C
a
a
E
B

Figura problema 4.13

4.14 Calcular las fuerzas en los miembros CF, CG y EF de la armadura cargada.

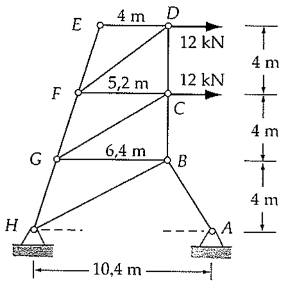

E
4 m
D
12 kN
4 m
F
5,2 m
12 kN
C
4 m
G
6,4 m
B
4 m
H
A
10,4 m

Figura problema 4.14

4.15 Hallar las fuerzas en los miembros BI, CI y HI de la armadura cargada. Todos los ángulos son de 30°, 60° o 90°.

Resp. $BI = 2{,}50$ kN T $\quad CI = 2{,}12$ kN T
$HI = 2{,}69$ kN T

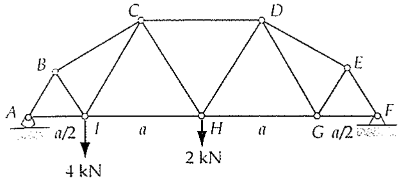

C
D
B
E
A
F
a/2
I
a
H
a
G
a/2
2 kN
4 kN

Figura problema 4.15

4.16 Hallar las fuerzas en los miembros FL, CB y HK de la armadura cargada. Explicar por qué las dos articulaciones fijas de ligadura no son causa de indeterminación estática. Todos los ángulos son de 60° o 120°.

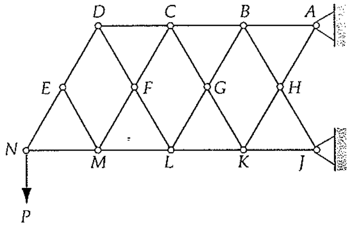
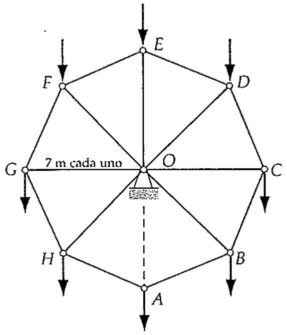

D
C
B
A
E
F
G
H
N
M
L
K
J
P

Figura problema 4.16

4.17 Una pequeña noria de feria está construida con dos armaduras iguales, de las que se representa una. El miembro AO se ha retirado temporalmente para sustituirlo. Si el peso de las barquillas y los miembros estructurales equivalen a una carga de 500 N en cada nudo de la armadura que se muestra, hallar la fuerza en cada miembro de la estructura. Si el miembro AO estuviera en su lugar, ¿podrían repetirse los cálculos?

Resp. $AB = AH = 653$ N T $\quad BO = HO = 293$ N C
$BC = GH = 1036$ N T $\quad CO = GO = 1000$ N C
$CD = FG = 1577$ N T $\quad DO = FO = 1707$ N C
$DE = EF = 1960$ N T $\quad EO = 2000$ N C


E
F
D
G
7 m cada uno
O
C
H
B
A

Una fuerza vertical de 500 N en cada uno

Figura problema 4.17

4.18 Una carga de nieve transmite las fuerzas que se indican a una cercha de cubierta Pratt. Despreciar las reacciones horizontales en todos los apoyos y calcular las fuerzas en los miembros.

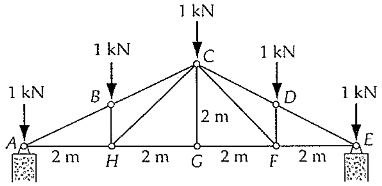

1 kN
1 kN
C
1 kN
1 kN
B
D
1 kN
2 m
A
E
2 m
H
2 m
G
2 m
F
2 m

Figura problema 4.18

4.19 La carga del problema 4.18 se representa aplicada a una cercha de cubierta Howe. Despreciar las reacciones horizontales en los apoyos y calcular las fuerzas en todos los miembros. Comparar los resultados con los del problema 4.18.

Resp. $AB = DE = 3{,}35$ kN C $\quad BC = CD = 2{,}24$ kN C
$AH = EF = 3{,}00$ kN T $\quad BH = DF = 0$
$GH = FG = 3{,}00$ kN T $\quad BG = DG = 1{,}12$ kN C

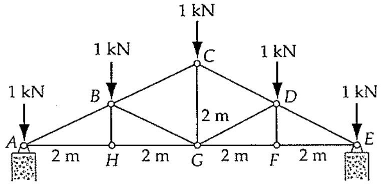

1 kN
1 kN
C
1 kN
1 kN
B
D
1 kN
2 m
A
E
2 m
H
2 m
G
2 m
F
2 m

Figura problema 4.19

4.20 Calcular las fuerzas en todos los miembros de la armadura cargada sujeta por la barra horizontal CG y la articulación A. Todos los elementos son triángulos equiláteros.

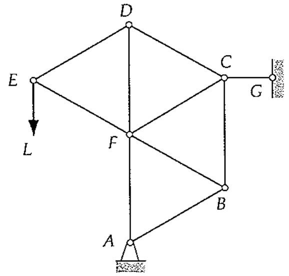


Figura problema 4.20

4.21 La grúa de pórtico móvil se utiliza para levantar un cohete de 500 Mg y prepararlo para el disparo. La estructura primaria de la grúa puede aproximarse a la armadura plana simétrica que se representa y que es hiperestática. Cuando la grúa está colocando una sección de 60 Mg del cohete suspendida de A, las medidas extensiométricas indican una fuerza compresiva de 50 kN en el miembro AB y una tracción de 120 kN en el miembro CD debidas a la carga de 60 Mg. Calcular las fuerzas correspondientes en los miembros BF y EF.

Resp. $BF = 188{,}4$ kN C $EF = 120$ kN T

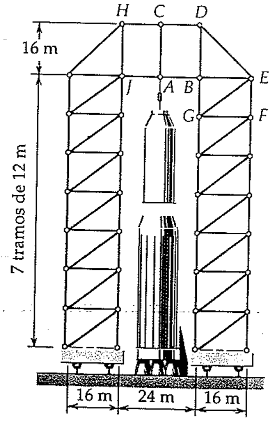


Figura problema 4.21

4.22 La armadura rectangular se compone de cuatro miembros perimétricos y dos cables AC y BD, incapaces de trabajar a compresión. Hallar las fuerzas en todos los miembros.

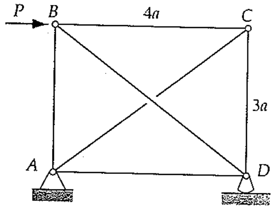


Figura problema 4.22

4.23 Calcular las fuerzas en los miembros AB, BH y BG. Los miembros BF y CG son cables que trabajan sólo a tracción.

Resp. $AB = 2{,}69$ kN C $BH = 5{,}39$ kN C
$BG = 0$

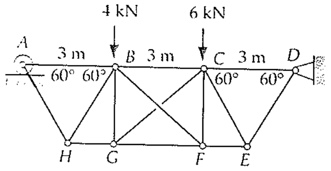


Figura problema 4.23

4.24 Verificar el hecho de que cada una de las armaduras contiene sólo uno o más elementos superabundantes y proponer dos cambios separados, cada uno de los cuales suprima la superabundancia y origine isostaticidad completa. Todos los miembros pueden trabajar a tracción y a compresión.

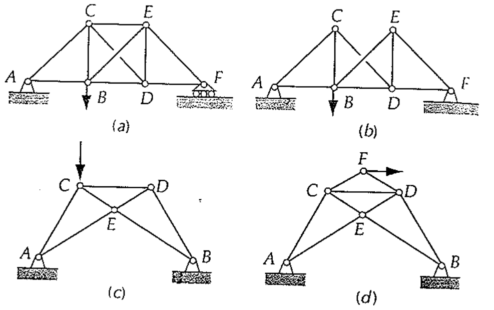


Figura problema 4.24

4.25 Demostrar que la armadura cargada no es hiperestática pese a las articulaciones fijas A y E. Hallar las componentes x e y de las reacciones en A y E. Todos los ángulos son de 45° o 90°.

Resp. $A_x = E_x = L/2$ $E_y = A_y = 3L/2$

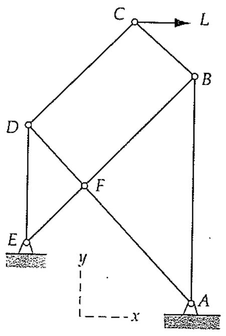


Figura problema 4.25

4.26 Verificar el hecho de que cada una de las armaduras cargadas que se representan es inestable interiormente (no rígida) e indicar al menos dos maneras de asegurar la estabilidad interna (rigidez) de cada armadura por adición de uno o más miembros sin introducir superabundancias.

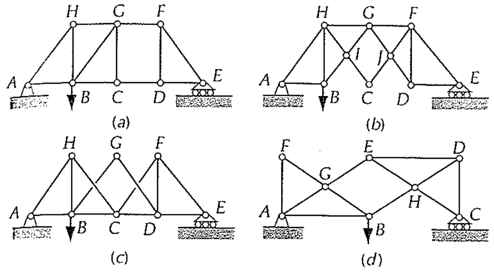


Figura problema 4.26

4.27 En la figura se representa el modelo de una torre de una líneas de transporte. Puede suponerse que los miembros diagonales de los tramos centrales sólo pueden trabajar a tracción. Para las cargas de 1,8 kN aplicadas en el plano vertical, hallar las fuerzas que se generan en los miembros AB, DB y CD.

Resp. $AB = 3{,}89$ kN C $DB = 0$ $CD = 0{,}93$ kN C

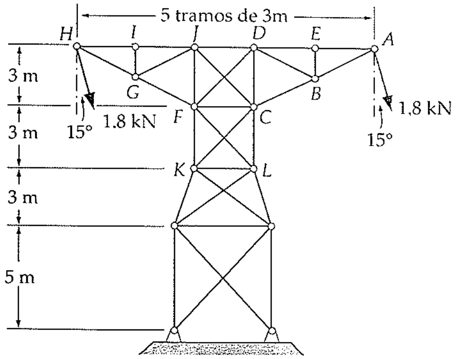


Figura problema 4.27

4.28 Hallar las fuerzas en los miembros EF, KL y GL de la cercha Fink representada.

Resp. $EF = 202$ kN C $KL = 100$ kN T $GL = 50{,}0$ kN T

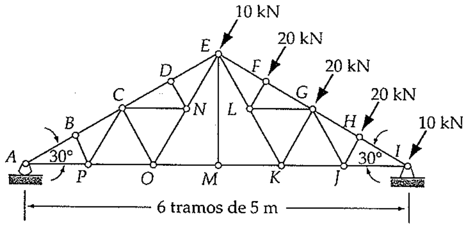


Figura problema 4.28

4.4 MÉTODO DE LAS SECCIONES

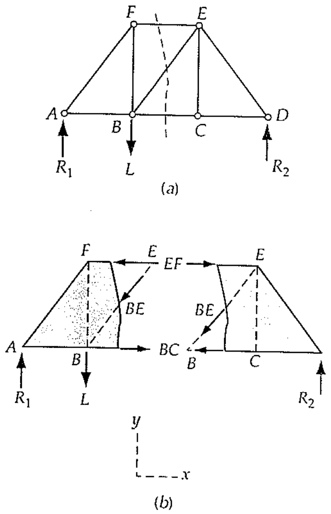
En el método de los nudos, tratado en el apartado anterior, se aprovechan sólo dos de las tres ecuaciones de equilibrio ya que en los procedimientos intervienen únicamente las fuerzas concurrentes en cada nudo. Puede aprovecharse la ecuación de los momentos considerando el equilibrio de una sección de la armadura convenientemente elegida, cuyo diagrama de sólido libre será el de un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas no concurrentes. Este *método de las secciones* ofrece la ventaja de que permite hallar directamente la fuerza en casi cualquier miembro analizando una sección que corte a ese miembro. Por tanto, no es necesario efectuar el cálculo nudo a nudo hasta llegar al nudo en cuestión. Al elegir la sección de la armadura habrá que tener en cuenta que, en general, no pueden cortarse más de tres miembros cuyas fuerzas sean desconocidas, puesto que sólo disponemos de tres ecuaciones de equilibrio independientes.

Ilustraremos ahora el método de las secciones con la armadura de la figura 4.5, que ya se empleó para explicar el método de los nudos. Por comodidad, en la figura 4.11*a* se reproduce la misma armadura. Como antes, en primer lugar se calculan las reacciones exteriores considerando la armadura en su conjunto. Ahora, como ejemplo, calculemos la fuerza en el miembro BE. En la figura 4.11b una sección imaginaria, representada por la línea de trazos, atraviesa la armadura dividiéndola en dos partes. Esa sección corta tres miembros cuyas fuerzas se desconocen inicialmente. Para que la parte de la armadura a cada lado de la sección permanezca en equilibrio, es necesario aplicar a cada uno de los miembros seccionados la fuerza que sobre él ejercía la porción de miembro que se le ha separado. Esas fuerzas, tracciones o compresiones, tendrán siempre las direcciones de los miembros respectivos en el caso de las armaduras sencillas compuestas de miembros de dos fuerzas. La sección izquierda se halla en equilibrio bajo la carga aplicada L, la reacción R_1 en el extremo y las tres fuerzas ejercidas sobre los miembros cortados por la sección derecha que se ha separado. Habitualmente las fuerzas pueden dibujarse con sus sentidos correctos estimando visualmente los requisitos de equilibrio. Así, para equilibrar los momentos respecto al punto B de la sección izquierda, la fuerza EB deberá estar evidentemente dirigida hacia la izquierda, lo cual origina una compresión, ya que actúa hacia el corte del miembro EF. La carga L es mayor que la reacción R_1, por lo que la fuerza BE deberá estar dirigida hacia arriba y hacia la derecha a fin de suministrar la componente hacia arriba necesaria para el equilibrio vertical. La fuerza BE es, pues, una tracción porque apunta alejándose del corte. Teniendo en cuenta los valores aproximados de R_1 y L, el equilibrio de los momentos respecto al punto E exige que BC esté dirigida hacia la derecha. Una ojeada a la armadura nos llevaría a la misma conclusión al ver que el miembro horizontal inferior se alargaría por efecto de la tracción originada por la flexión. La ecuación de los momentos respecto al nudo B elimina tres fuerzas de la relación y EF puede determinarse directamente. La fuerza BE se calcula a partir de la ecuación de equilibrio para la dirección y. Por último, BC puede determinarse equilibrando momentos respecto al punto E. De esta manera se ha determinado cada una de las incógnitas independientemente de las otras dos.

En la misma figura 4.11b la sección derecha de la armadura se halla en equilibrio bajo la acción de R_2 y de las tres mismas fuerzas en los miembros cortados, pero aplicadas en sentidos contrarios a los de la sección izquierda. El sentido correcto de las fuerzas horizontales puede deducirse enseguida del equilibrio de momentos respecto a los puntos B y E.

Es esencial comprender que en el método de las secciones se considera toda una porción de la armadura como si fuera un único cuerpo rígido en equilibrio. Entonces, las fuerzas en los miembros internos de la sección no intervienen en el análisis del conjunto de la sección. Para clarificar el diagrama de sólido libre y definir las fuerzas que figuran en éste, es muy recomendable seccionar la armadura cortando miembros y no nudos. Para los cálculos puede emplearse una u otra de las porciones separadas, pero generalmente la que contenga el menor número de fuerzas facilitará la resolución más sencilla.

Hay casos en que el método de los nudos y el de las secciones pueden combinarse en un procedimiento más simple. Por ejemplo, supongamos que se desea averiguar la fuerza en un miembro situado en el centro de una armadura extensa. Supongamos, además, que no sea posible hacer una sección que pase por ese miembro sin cortar al menos cuatro miembros desconocidos. Entonces, puede que sea posible determinar las fuerzas en miembros vecinos por el método de las secciones y, seguidamente, avanzar hacia el miembro incógnita por el método de los nudos. Estas combinaciones de los dos métodos pueden ser más expeditivas que emplear exclusivamente uno de ellos.



(a)

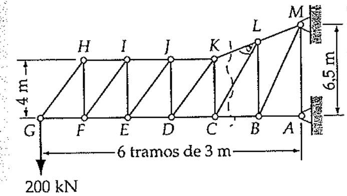
(b)

Figura 4.11

Puede ser muy ventajoso utilizar las ecuaciones de momentos en el método de las secciones. Para ello conviene buscar un centro de momentos, dentro o fuera de la sección, por el que pase el mayor número posible de fuerzas desconocidas. No siempre es posible, de entrada, asignar a una fuerza desconocida el sentido correcto a la vista del diagrama de sólido libre. Se asignará entonces un sentido arbitrario y un resultado positivo lo confirmará, mientras que un resultado negativo indicará que el sentido es el contrario al asignado.

Otra posibilidad que algunos prefieren consiste en asignar arbitrariamente a todas las fuerzas el sentido de tracción como positivo (alejándose de la sección), de tal modo que el signo de las soluciones distinga entre tracciones y compresiones. O sea, el signo más significa entonces tracción y el signo menos compresión. Por otra parte, asignar el sentido correcto a las fuerzas en el diagrama de sólido libre tiene la ventaja de resaltar el efecto real de las fuerzas más directamente y así se hace en esta obra.

PROBLEMA TIPO 4.2

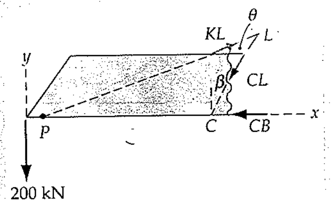


Calcular las fuerzas inducidas en los miembros KL, CL y CB del entramado en voladizo por la carga de 200 kN.

Solución. Aunque, por ser los soportes fijos, las componentes de las reacciones en A y M sean estáticamente indeterminadas, todos los miembros, salvo AM, están estáticamente determinados. Así, podemos tomar una sección que corte los miembros KL, CL y CB y estudiar la parte de la armadura situada a la izquierda de dicha sección como si fuera un cuerpo rígido isostático.

① Se representa el diagrama de sólido libre de la parte de la armadura situada a la izquierda de la sección. Tomando momentos respecto a L, se comprueba de inmediato que CB trabaja efectivamente a compresión, y tomando momentos respecto a C se revela enseguida que KL trabaja a tracción. El sentido de CL no está tan claro hasta que se observa que KL y CB concurren en un punto P a la derecha de G. Al tomar momentos respecto a P, no intervienen KL y CB y resulta que CL es a compresión para contrarrestar el momento respecto a P de la carga de 200 kN. Teniendo presentes estas consideraciones, la solución se hace inmediata, pues vemos ya como puede obtenerse cada una de las tres incógnitas independientemente de las otras dos.

Para tomar momentos respecto a L, necesitamos el brazo de momento $BL = 4 + (6{,}5 - 4)/2 = 5{,}25$ m. Así pues,



① Observemos que el cálculo por el método de los nudos haría necesario trabajar con ocho nudos para obtener las tres fuerzas en cuestión. Por tanto, en este caso el método de las secciones resulta considerablemente ventajoso.

② Podríamos haber empezado igualmente por C o P.

③ También podríamos haber determinado CL sumando las fuerzas en la dirección x o la y.

② $[\Sigma M_L = 0]$ $\quad 200(5)(3) - CB(5{,}25) = 0 \quad CB = 571$ KN C *Resp.*

Ahora tomamos momentos respecto a C, para lo cual necesitamos calcular $\cos\theta$. De los datos geométricos se deduce que $\theta = \text{arctg}\,(5/12)$ y, por tanto, $\cos\theta = 12/13$. En consecuencia,

$[\Sigma M_C = 0]$ $\quad 200(4)(3) - \frac{12}{13}KL = 0 \quad KL = 650$ kNT *Resp.*

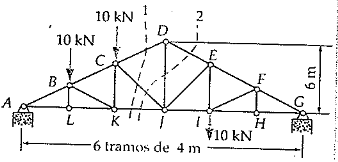
Finalmente, podemos hallar CL tomando momentos respecto a P, cuya distancia a C viene dada por $PC/4 = 6/(6{,}5-4)$ o sea, PC = 9,60 m. También necesitamos β, que está dado por $\beta = \text{arctg}\,(\overline{CB}/\overline{BL}) = \text{arctg}\,(3/5{,}25) = 29{,}7°$ y $\cos\beta = 0{,}868$. Con esto, tenemos

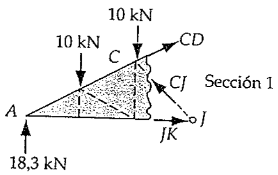
③ $[\Sigma M_P = 0]$ $\quad 200(12 - 9{,}60) - CL(0{,}868)(9{,}60) = 0$

$CL = 57{,}6$ kNC *Resp.*

PROBLEMA TIPO 4.3

Calcular la fuerza en el miembro DJ *de la cercha de cubierta Howe de la figura. Despréciense las componentes horizontales de las reacciones en los apoyos.*





① Asignar sentidos erróneos a una o más fuerzas no es causa de perjuicio en tanto que los cálculos sean coherentes con las hipótesis. Una solución negativa mostrará la necesidad de invertir el sentido de la fuerza.

Solución. No es posible hacer pasar una sección por DJ sin cortar cuatro miembros cuyas fuerzas sean desconocidas. Aun cuando tres de los cuatro miembros cortados por la sección 2 concurren en J y, por tanto, podría utilizarse la ecuación de momentos respecto a J para obtener DE, la fuerza en DJ no puede obtenerse de las dos ecuaciones de equilibrio restantes. Es preciso considerar, en primer lugar, la sección adyacente 1 antes de considerar la sección 2.

Dibujamos el diagrama de sólido libre de la sección 1, que incluye la reacción de 18,3 kN en A, calculada previamente considerando el equilibrio del conjunto de la armadura. Al asignar los sentidos correctos a las fuerzas actuantes en los tres miembros cortados, vemos que el cómputo de los momentos respecto a A elimina los efectos de CD y JK y evidentemente exige que CJ apunte hacia arriba y a la izquierda. El cómputo de los momentos respecto a C elimina el efecto de las tres fuerzas concurrentes en C e indica que JK debe apuntar hacia la derecha para que dé un momento antihorario suficiente. Debe resultar patente que el cordón inferior trabaja a tracción a causa de la tendencia de la cercha a flexionarse hacia abajo. Aunque asimismo debe resultar patente que el cordón superior trabaja a compresión, a efectos ilustrativos la fuerza en el miembro CD la consideraremos arbitrariamente como tracción. ①

Analizando la sección 1, se obtiene CJ de

$[\Sigma M_A = 0]$ $\quad 0{,}707CJ(12) - 10(4) - 10(8) = 0 \quad CJ = 14{,}1$ kN C

En esta ecuación, el momento de CJ se calcula considerando sus componentes horizontal y vertical aplicadas en el punto J. El equilibrio de los momentos respecto a J requiere

$[\Sigma M_J = 0]$ $\quad 0{,}894CD(6) + 18{,}3(12) - 10(4) - 10(8) = 0$

$CD = -18{,}6$ kN

② El momento de CD respecto a J lo hemos calculado aquí considerando sus dos componentes aplicadas en D. El signo menos indica que a CD le asignamos el sentido erróneo.

③ Entonces, $\quad CD = 18{,}6$ kN C

En el diagrama de sólido libre de la sección 2, que ahora contiene el valor conocido de CJ, el cómputo de momentos respecto a G se ve que no contiene las fuerzas DE y JK. Por tanto,

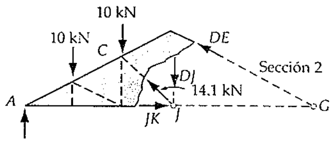
$[\Sigma M_G = 0]$ $\quad 12DJ + 10(16) + 10(20) - 18{,}3(24) - 14{,}1(0{,}707)(12) = 0$

$DJ = 16{,}6$ kN T *Resp.*

Nuevamente el momento de CJ lo hemos determinado considerando sus componentes aplicadas en J. El valor de DJ resulta positivo, lo que significa que la hipótesis de tracción es correcta.

Otro planteo posible del problema sería emplear la sección 1 para determinar CD y luego aplicar el método de los nudos a D para determinar DJ.

② Si así se desea, puede invertirse el sentido de CD en el diagrama de sólido libre y cambiarse su signo en las operaciones de cálculo, o bien dejarlo como está con una nota que indique cuál es el sentido correcto.



③ Obsérvese que una sección que corte los miembros CD, DJ y DE cortaría sólo tres miembros incógnita. No obstante, como esos tres miembros concurren en D, la ecuación de los momentos respecto a D no proporcionaría información alguna. Las dos ecuaciones restantes de las fuerzas no bastarían para despejar las tres incógnitas.

PROBLEMAS

(Resolver los problemas siguientes por el método de las secciones. Despréciese el peso de los miembros en comparación con las fuerzas que soportan.)

Problemas introductorios

4.29 Calcular las fuerzas en los miembros BC, CF y EF

Resp. $BC = 2{,}13$ kN C $\quad CF = 0{,}300$ kN T

$EF = 1{,}875$ kN T

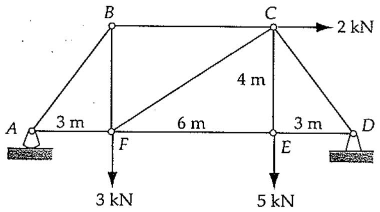


Figura problema 4.29

4.30 Hallar las fuerzas en los miembros CG y GH.

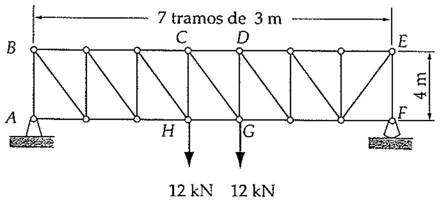


Figura problema 4.30

4.31 Hallar las fuerzas en los miembros GH y CG de la armadura cargada y apoyada como se representa. ¿Afecta a los cálculos la hiperestaticidad de los apoyos?

Resp. $CG = 70{,}7$ kN T $\quad GH = 100$ kN T $\quad$ No

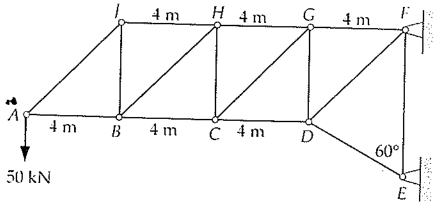

I
4 m
H
4 m
G
4 m
F
A
4 m
B
4 m
C
4 m
D
60°
E
50 kN

Figura problema 4.31

4.32 Hallar las fuerzas en los miembros *BC*, *BE* y *BF*. Los triángulos son equiláteros.

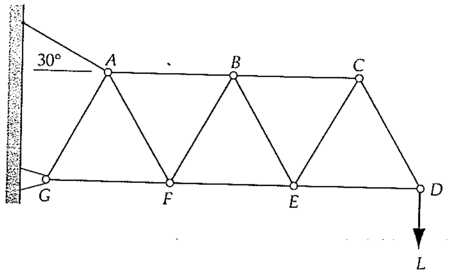

30°
A
B
C
G
F
E
D
L

Figura problema 4.32

4.33 Calcular las fuerzas en los miembros *BC*, *BE* y *EF*. Obtener cada fuerza de una sola ecuación de equilibrio que contenga la fuerza en cuestión como única incógnita.

Resp. BC = 21 kN *T*
BE = 8,41 kN *T*
EF = 29,5 kN *C*

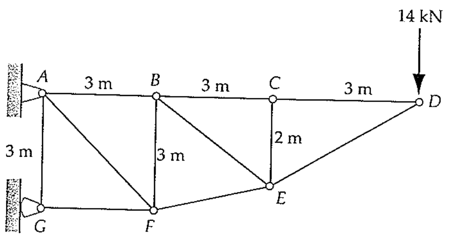

14 kN
A
3 m
B
3 m
C
3 m
D
3 m
3 m
2 m
E
G
F

Figura problema 4.33

4.34 La cercha de cubierta asimétrica es del tipo empleado cuando se desea un ángulo de incidencia casi normal de la luz solar sobre la cara sur *AB* a efectos de aprovechar la energía solar. Hallar las fuerzas en los miembros *CD*, *CF* y *EF*. No se tomarán en cuenta las reacciones horizontales en los apoyos.

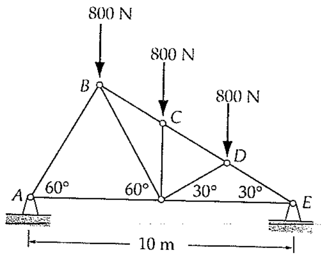

800 N
800 N
800 N
B
C
D
A
60°
60°
30°
30°
E
10 m

Figura problema 4.34

Problemas representativos

4.35. Se repite aquí la armadura del problema 4.14. Hallar la fuerza en el miembro *CG* empleando una ecuación de equilibrio que contenga esa fuerza como única incógnita.

Resp. *CG* = 25,0 kN *T*

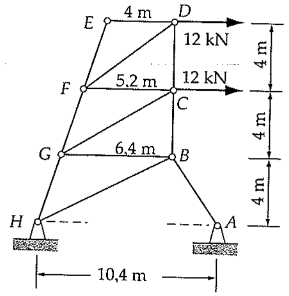

E
4 m
D
12 kN
4 m
F
5,2 m
12 kN
C
4 m
G
6,4 m
B
4 m
H
A
10,4 m

Figura problema 4.35

4.36 Hallar la fuerza en el miembro *DG* de la cercha cargada.

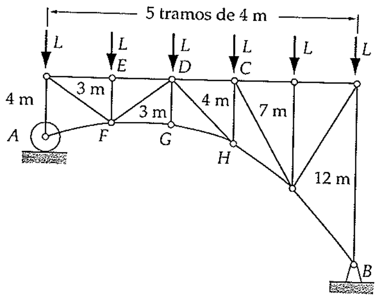

5 tramos de 4 m
L
L
L
L
L
L
E
D
C
4 m
3 m
3 m
4 m
7 m
A
F
G
H
12 m
B

Figura problema 4.36

4.37 Hallar las fuerzas en los miembros *BC* y *CG* de la armadura del problema 4.12 que aquí se representa otra vez.

Resp. BC = *L*/3 *T* *CG* = *L*/3 *T*

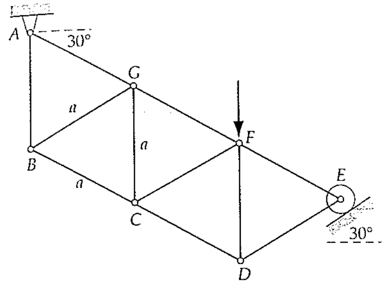

A
30°
G
a
a
F
B
a
C
E
30°
D

Figura problema 4.37

4.38 Hallar las fuerzas en los miembros *DE* y *DL*.

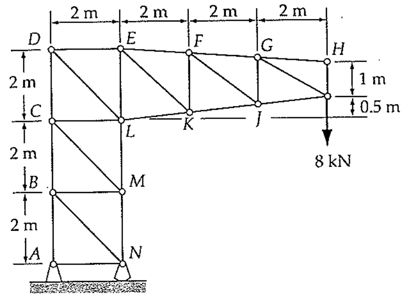

2 m
2 m
2 m
2 m
D
E
F
G
H
2 m
1 m
C
L
K
J
0.5 m
8 kN
2 m
B
M
2 m
A
N

Figura problema 4.38

4.39 Hallar las fuerzas en los miembros *BC* y *CI*.

Resp. BC = 62,5 kN *C*
CI = 34,5 kN *C*

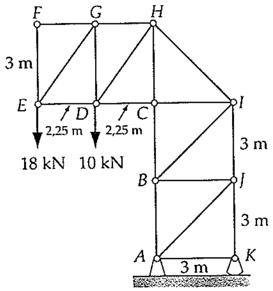

F
G
H
3 m
E
D
C
I
2,25 m
2,25 m
18 kN
10 kN
3 m
B
J
3 m
A
3 m
K

Figura problema 4.39

4.40 Se representa otra vez la armadura del problema 4.20. Calcular las fuerzas en los miembros *AF*, *BF* y *BC*. Tras hallar la fuerza en la barra *CG*, despejar cada una de las tres fuerzas de una ecuación de equilibrio que contenga la fuerza en cuestión como única incógnita.

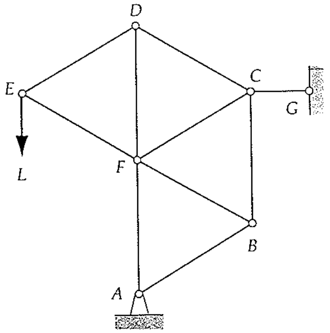


Figura problema 4.40

4.41 Hallar las fuerzas en los miembros *BC*, *BE* y *EF* de la armadura de grúa cargada.

Resp. BC = 181,6 kN *T*
BE = 2,02 kN *T*
EF = 8,27 kN *C*

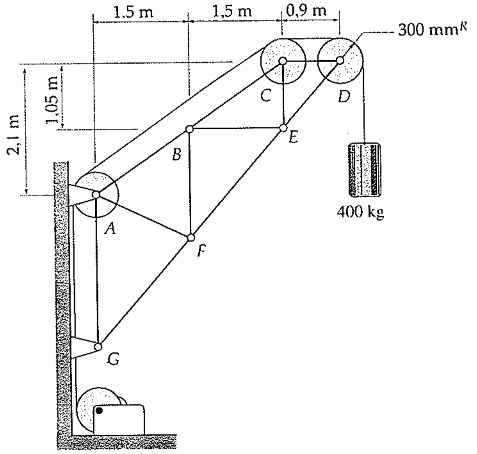

1.5 m
1.5 m
0,9 m
300 mm^R
1,05 m
2,1 m
C
D
B
E
A
F
G
400 kg

Figura problema 4.41

4.42 La armadura simple de la figura sirve para representar una grúa. Calcular las fuerzas en los miembros *DE*, *DG* y *HG* inducidas por el tractor de 1631 kg de masa.

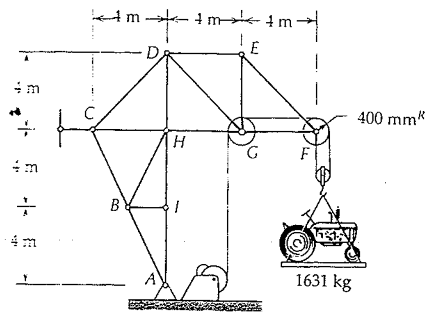

4 m
4 m
4 m
4 m
4 m
4 m
D
E
C
H
G
F
400 mm²
B
I
A
1631 kg

Figura problema 4.42

4.43 La armadura que sujeta un cartel está calculada para soportar una presión del viento horizontal de 4 kN. Si la resultante de esa carga pasa por el punto *C*, calcular las fuerzas en los miembros *BG* y *BF*.

Resp. $BG = 2\sqrt{5}$ kN *C*, $BF = 4$ kN *T*

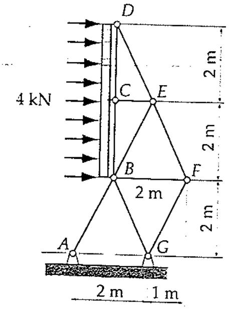

D
4 kN
C
E
B
F
A
G
2 m
2 m
2 m
2 m
2 m
1 m

Figura problema 4.43

4.44 Hallar la fuerza en el miembro *BF*.

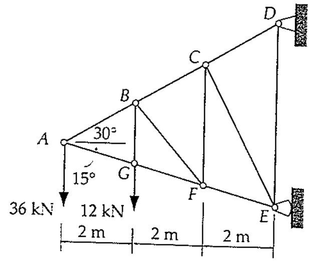

D
C
B
A
30°
15°
G
F
E
36 kN
12 kN
2 m
2 m
2 m

Figura problema 4.44

4.45 La armadura representada está formada por triángulos rectángulos isósceles. Los miembros que se cruzan en los dos tramos del centro son varillas delgadas incapaces de trabajar a compresión. Conservar las dos varillas que trabajen a tracción y calcular los valores de esas tracciones. Hallar también la fuerza en el miembro *MN*.

Resp. $FN = GM = 84{,}8$ kN *T*
$MN = 20$ kN *T*

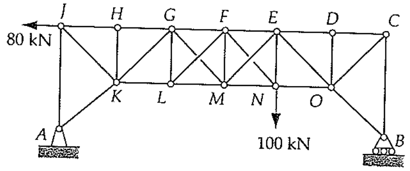

J
H
G
F
E
D
C
80 kN
K
L
M
N
O
A
100 kN
B

Figura problema 4.45

4.46 Los miembros *CJ* y *CF* de la armadura cargada se cruzan, pero sin conectarse con los miembros *BI* y *DG*. Calcular las fuerzas en los miembros *BC*, *CJ*, *CI* y *HI*.

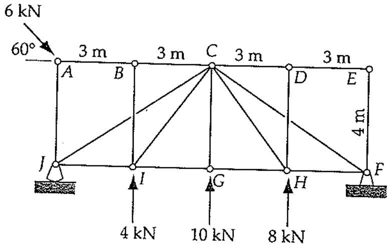

6 kN
60°
3 m
3 m
C
3 m
3 m
A
B
D
E
4 m
J
I
G
H
F
4 kN
10 kN
8 kN

Figura problema 4.46

4.47 Hallar la fuerza en el miembro *DE* de la armadura. Téngase en cuenta que los miembros curvos son miembros de dos fuerzas.

Resp. $DE = LC$

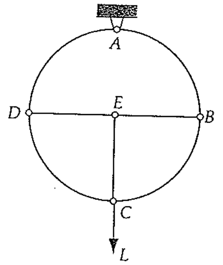


Figura problema 4.47

4.48 Hallar las fuerzas en los miembros *DE*, *EI*, *FI* y *HI* de la cercha de cubierta en arco.

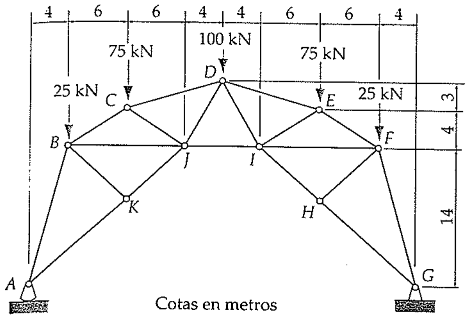

4
6
6
4
4
6
6
4
100 kN
75 kN
75 kN
D
25 kN
C
E
25 kN
3
B
F
4
J
I
K
H
14
A
G
Cotas en metros

Figura problema 4.48

4.49 Determinar la fuerza en el miembro *JQ* de la cercha Baltimore cuyos ángulos son todos de 30°, 60°, 90° y 120°.

Resp. $JQ = 57{,}7$ kN *C*

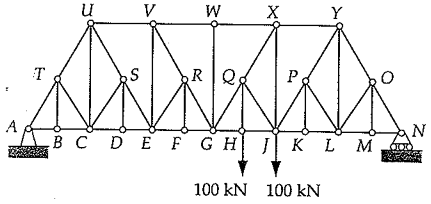

U
V
W
X
Y
T
S
R
Q
P
O
A
B
C
D
E
F
G
H
J
K
L
M
N
100 kN
100 kN

Figura problema 4.49

4.50 Hallar la fuerza en el miembro *DK* de la armadura para rótulos elevados.

Resp. $DK = 5$ kN *T*

4.51 En la grúa puente de la figura todos los miembros cruzados son tirantes delgados incapaces de trabajar a compresión. Hallar las fuerzas en los miembros *DF* y *EF* y determinar la reacción horizontal que la armadura soporta en *A*. Demostrar que si $CF = 0$, también $DE = 0$.

Resp. $DF = 768$ kN *C* $EF = 364$ kN *C*

4.52 Hallar la fuerza en el miembro *DG* de la armadura compuesta. Los nudos se encuentran todos en radios espaciados a 15°, tal como se indica, y los miembros curvos actúan como miembros de dos fuerzas. $\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OB} = R$.

Resp. $DG = 0{,}569L$ *C*

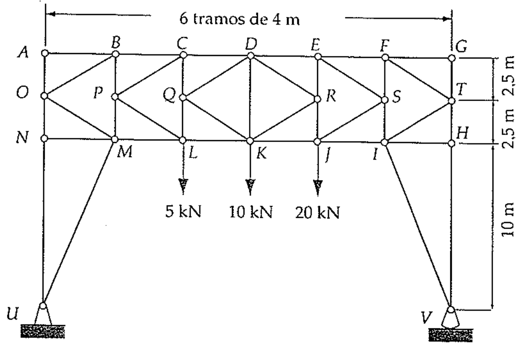

6 tramos de 4 m
A
B
C
D
E
F
G
O
P
Q
R
S
T
2,5 m
N
M
L
K
J
I
H
2,5 m
5 kN
10 kN
20 kN
10 m
U
V

Figura problema 4.50

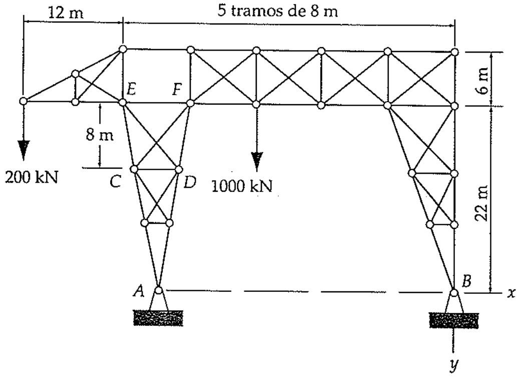

12 m
5 tramos de 8 m
6 m
E
F
8 m
200 kN
C
D
1000 kN
22 m
A
B
x
y

Figura problema 4.51

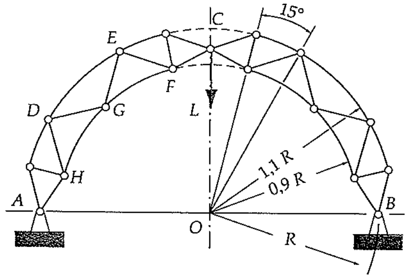

C
15°
E
F
D
G
L
1,1 R
0,9 R
H
A
B
O
R

Figura problema 4.52

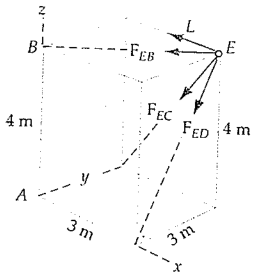
4.5 ARMADURAS ESPACIALES

Las armadura espacial es la contrapartida tridimensional de la armadura plana descrita en los tres apartados anteriores. Una armadura espacial ideal se compone de barras rígidas conectadas por sus extremos mediante rótulas. Hemos visto que la unidad básica indeformable de armadura plana es el triángulo de barras articuladas por sus extremos. Por su parte, la estructura espacial requiere seis barras unidas por sus extremos que constituyan las aristas de un tetraedro que es la unidad básica no deformable. En la figura 4.12*a*, las dos barras *AD* y *BD* unidas en *D* requieren de un tercer soporte *CD* para que el triángulo *ABD* no gire en torno a *AB*. En la figura 4.12*b*, la base de apoyo ha sido

cesivamente nudos contiguos en los que no actúen más de tres fuerzas desconocidas.

El procedimiento paso a paso anterior pretende hacer mínimo el número de ecuaciones a resolver cuando hay que determinar la fuerza en todos los miembros de una armadura espacial. Por ello, es el procedimiento más recomenda- No obstante, existe la posibilidad de escribir sistemáticamente

① *Sugerencia*: Dibujar el diagrama del sólido libre de la armadura completa y comprobar que las fuerzas exteriores que actúan sobre la armadura son $A_x = L\mathrm{i}$, $A_y = L\mathrm{j}$, $A_z = (4L/3)\mathrm{k}$, $B_y = 0$, $D_y = -L\mathrm{j}$, $D_z = -(4L/3)\mathrm{k}$.



② Con esta hipótesis, una fuerza negativa indicará que es una compresión.

Solución. Empezamos observando que la armadura está correctamente ligada mediante seis vínculos adecuadamente dispuestos, que son los tres en *A* y las tres barras 1, 2 y 3. Además, como $m = 9$ miembros y $n = 5$ nudos, se cumple la condición $3n = m + 6$ para que la armadura sea rígida.

Las reacciones en *A*, *B* y *D* pueden calcularse fácilmente como primer paso, aunque sus valores los hallaremos determinando sucesivamente las fuerzas actuantes en cada nudo. ①

Hemos de comenzar por un nudo en el que actúe al menos una fuerza conocida y no más de tres desconocidas, que en este caso es el *E*. Se representa el diagrama del sólido libre de *E* indicando todas las fuerzas como si fueran tracciones, es decir, positivas (alejándose del nudo). Las expresiones vectoriales de ② las tres fuerzas desconocidas son

$$\mathbf{F}_{EB} = \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}), \qquad \mathbf{F}_{EC} = \frac{F_{EC}}{5}(-3\mathbf{i}-4\mathbf{k}), \qquad \mathbf{F}_{ED} = \frac{F_{ED}}{5}(-3\mathbf{j}-4\mathbf{k})$$

El equilibrio del nudo *E* requiere

$$[\Sigma \mathbf{F} = 0] \qquad \mathbf{L} + \mathbf{F}_{EB} + \mathbf{F}_{EC} + \mathbf{F}_{ED} = 0 \qquad \text{o sea}$$

$$-L\mathbf{i} + \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}) + \frac{F_{EC}}{5}(-3\mathbf{i}-4\mathbf{k}) + \frac{F_{ED}}{5}(-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

Reagrupando términos tenemos

$$\left(-L - \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} - \frac{3F_{EC}}{5}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} - \frac{3F_{ED}}{5}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{4F_{EC}}{5} - \frac{4F_{ED}}{5}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

e igualando a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** resulta el sistema de ecuaciones

$$\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} + \frac{3F_{EC}}{5} = -L \qquad \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} + \frac{3F_{ED}}{5} = 0 \qquad F_{EC} + F_{ED} = 0$$

que, resuelto, da

$$F_{EB} = -L/\sqrt{2} \qquad F_{EC} = -5L/6 \qquad F_{ED} = 5L/6 \qquad \textit{Resp.}$$

Así pues, F_{EB} y F_{EC} son compresiones y F_{ED} es una tracción.

A menos que antes se hayan calculado las reacciones, a continuación deberá analizarse el nudo *C*, donde concurren la fuerza conocida F_{EC} y las tres desconocidas F_{CB}, F_{CA} y F_{CD}, siguiendo el mismo procedimiento que para el nudo *E*. A continuación se analizan de la misma forma los nudos *B*, *D* y *A* por este orden, con lo que se limita a tres el número de incógnitas en cada nudo. Las reacciones calculadas con estas operaciones deben desde luego coincidir con las que pueden determinarse analizando la armadura como conjunto.

PROBLEMAS

(En los problemas siguientes, usar el signo más para tracción y el signo menos para compresión.)

4.53 Hallar las fuerzas en los miembros *AB*, *BC* y *AD*.
Resp. $AB = AD = -2{,}64$ kN
$AC = -2{,}46$ kN

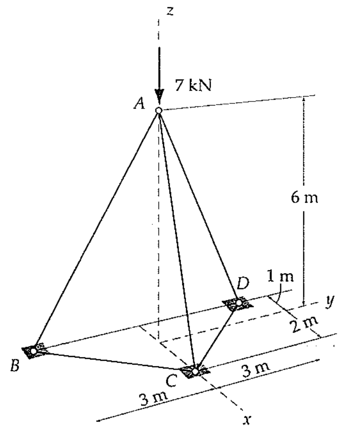


Figura problema 4.53

4.54 La base de un caballete para automóviles forma un triángulo equilátero de 250 mm de lado centrado bajo el collar *A*. Asimilando esta estructura a una armadura espacial con nudos de rótula, hallar las fuerzas en los miembros *BC*, *BD* y *CD*. Despréciense las componentes horizontales de las reacciones bajos los pies *B*, *C* y *D*.

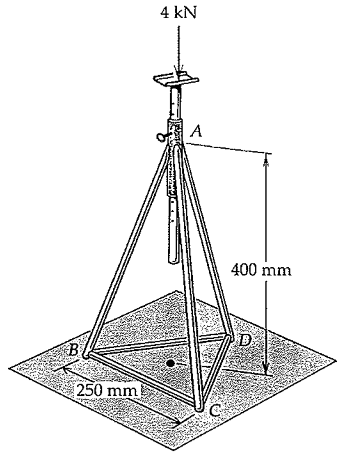


Figura problema 4.54

4.55 La armadura espacial tetraédrica se apoya sobre rótulas en sus puntos base *A* y *B* y tiene impedido el giro alrededor de *AB* por la barra vertical *CD*. Tras consignar las componentes verticales de las reacciones bajo la armadura simétrica en *A* y *B*, dibujar el diagrama de sólido libre de la configuración triangular de barras *BDE* y hallar la componente *x* de la fuerza que ejercen los cimientos sobre la armadura en *B*.
Resp. $B_x = P$.

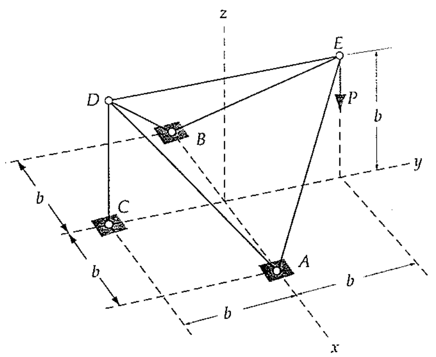


Figura problema 4.55

4.56 La armadura espacial prismática tiene una base horizontal *ADE* y una cara superior paralela *BCF* cuyas formas son triángulos equiláteros iguales conectados por tres brazos verticales iguales y enlazados por tres miembros diagonales de la forma que se indica. Demostrar que esta armadura presenta una configuración estable.

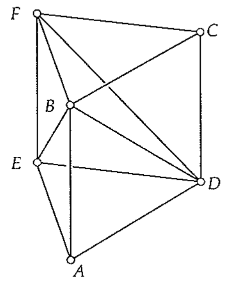


Figura problema 4.56

4.57 La armadura espacial rectangular de 16 m de altura está erigida sobre una base cuadrada horizontal de 12 m de lado. A los puntos *E* y *G* de la estructura se amarran tirantes de la forma que se indica y se tensan hasta una tracción de 9 kN. Calcular la fuerza *F* en cada uno de los miembros diagonales.

Resp. $F = -3.72$ kN

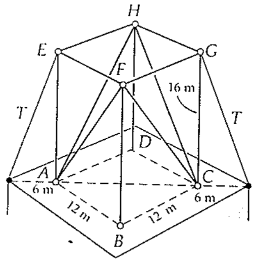


Figura problema 4.57

4.58 La armadura espacial tetraédrica tiene una base horizontal triangular isósceles y los brazos *AD*, *BD* y *CD* soportan la masa *m* que cuelga de *D*. Cada vértice de la base pende de un alambre vertical sujeto en puntos más elevados. Calcular las fuerzas que se desarrollan en los miembros *AC* y *AB*.

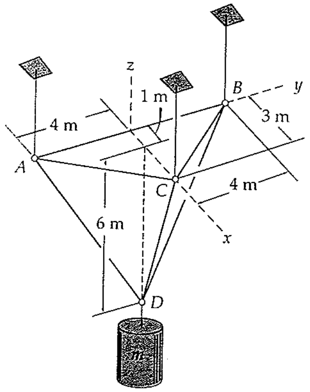


Figura problema 4.58

4.59 Hallar la fuerza en el miembro *BD* de la pirámide regular de base cuadrada.

Resp. $DB = -2{,}00L$

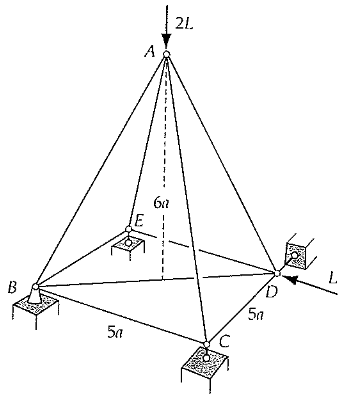


Figura problema 4.59

4.60 La armadura espacial de la figura está sujeta a los soportes de rótula *A*, *B* y *E* y está cargada por la fuerza *L* de componentes *x* e *y* iguales y componente z nula. Demostrar que el número de miembros basta para asegurar la estabilidad interna y que su ubicación es correcta para ello. Hallar después las fuerzas en los miembros *CD*, *BC* y *CE*.

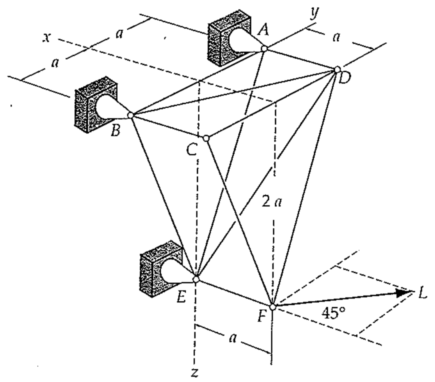


Figura problema 4.60

4.61 Para la armadura espacial de la figura comprobar la suficiencia de los apoyos y también si el número y disposición de los miembros asegura la isostaticidad, tanto interna como externa. Por inspección hallar las fuerzas en los miembros *DC*, *CB* y *CF*. Calcular la fuerza en el miembro *AF* y la componente *x* de la reacción en *D*.

Resp. $F_{AF} = \dfrac{\sqrt{13}}{3\sqrt{2}}P \qquad D_x = \dfrac{P}{3\sqrt{2}}$

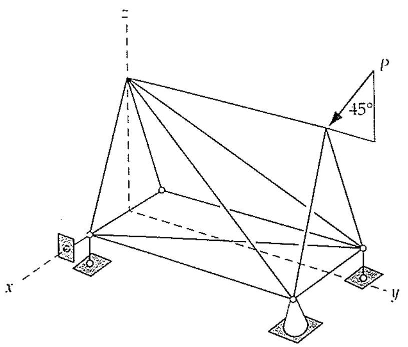


Figura problema 4.61

4.62 Se construye una armadura espacial en forma de cubo con los seis miembros diagonales que se indican. Verificar que es interiormente estable. Si se somete a las fuerzas compresivas *P* aplicadas en *F* y *D* según la diagonal *FD*, hallar la fuerza en los miembros *EF* y *EG*.

Resp. $F_{FE} = -\dfrac{P}{\sqrt{3}} \qquad F_{EG} = \dfrac{P}{\sqrt{6}}$

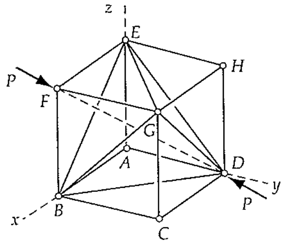


Figura problema 4.62

4.63 La pluma de gran longitud de una grúa de construcción, de la que se representa una porción, es un ejemplo de estructura periódica o estructura compuesta de conjuntos iguales repetidos. Hallar las fuerzas en los miembros *FJ* y *GJ* por el método de los nudos.

Resp. $FJ = 0 \qquad GJ = -70{,}8$ kN

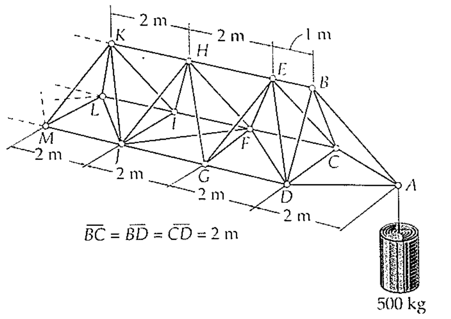


Figura problema 4.63

4.64 Una armadura espacial se compone de dos pirámides de bases cuadradas iguales en el plano horizontal *x*-*y* que comparten el lado *DG*. Está cargada por la fuerza vertical descendente *L* en el vértice *A* y se mantiene en equilibrio merced a las reacciones verticales en las esquinas. Los miembros, salvo los dos diagonales de la base, tienen todos la misma longitud *b*. Aprovechando la existencia de dos planos de simetría verticales, hallar las fuerzas en *AB* y *DA*. (Adviértase que la barra *AB* impide que las pirámides roten en torno a *DG*.)

Resp. $AB = -\dfrac{\sqrt{2}L}{4} \qquad DA = -\dfrac{\sqrt{2}L}{8}$

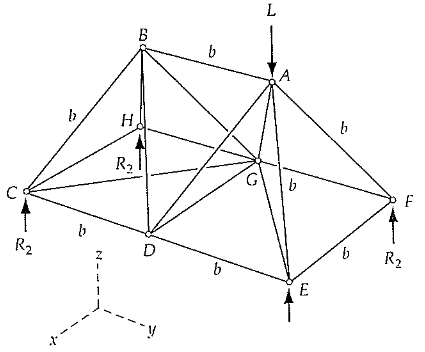
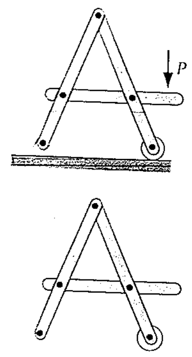


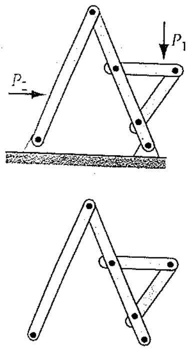
Figura problema 4.64

4.6 ENTRAMADOS Y MÁQUINAS

Una estructura recibe el nombre de *entramado* o *máquina* cuando al menos uno de sus miembros es un *miembro multifuerza*. Por miembro multifuerza se entiende aquel miembro sobre el que actúan tres o más fuerzas, o bien dos fuerzas



Conjunto rígido por sí mismo
(a)



Conjunto no rígido por sí mismo
(b)

Figura 4.13

y un par de fuerzas o más. Los entramados son estructuras diseñadas para soportar cargas y generalmente son de posición fija. Las máquinas son estructuras que contienen partes móviles y se diseñan para transmitir fuerzas y pares de fuerzas, alterando o no sus valores entre el órgano de entrada y el de salida.

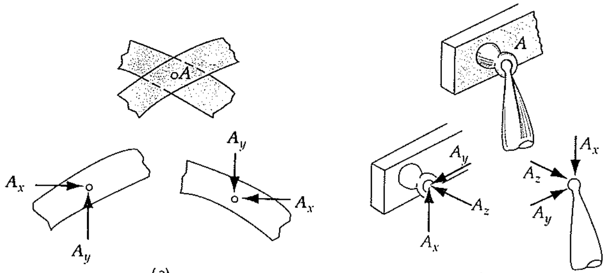
Como los entramados y las máquinas contienen miembros multifuerza, dichas fuerzas *no* estarán dirigidas en general según los miembros; por ello no es posible estudiar estas estructuras mediante los métodos desarrollados en los apartados 4.3, 4.4 y 4.5 para las armaduras sencillas compuestas de miembros de dos fuerzas en los cuales las fuerzas actuaban en las direcciones de los miembros.

En el capítulo anterior se estudió e ilustró el equilibrio de cuerpos sobre los que actúan varias fuerzas, si bien se concentró la atención en el equilibrio de *un* cuerpo rígido solo. En el presente apartado concentraremos nuestra atención en el equilibrio de cuerpos rígidos *interconectados* que contengan miembros multifuerza. Aun cuando la mayoría de dichos cuerpos pueden analizarse como sistemas bidimensionales, existen numerosos ejemplos de entramados y máquinas tridimensionales.

Las fuerzas actuantes sobre cada miembro de un sistema de cuerpos interconectados se hallan aislando cada miembro con su diagrama de sólido libre y aplicando las ya conocidas ecuaciones de equilibrio. Debe observarse cuidadosamente el *principio de acción y reacción* al representar las fuerzas de interacción en cada diagrama de sólido libre separado. Si la estructura contiene más miembros o apoyos de los necesarios para que no se derrumbe, el problema será, como en el caso de las armaduras, hiperestático y las ecuaciones de equilibrio, si bien necesarias, no bastarán para resolverlo. Aunque entramados y máquinas son hiperestáticos, en este apartado sólo consideraremos los de tipo isostático.

Si el entramado o máquina constituye una unidad rígida por si misma, como el bastidor en *A* de la figura 4.13*a*, se inicia mejor el análisis estableciendo todas las fuerzas exteriores a la estructura considerada como un solo cuerpo rígido. Se desmiembra entonces la estructura y se considera el equilibrio de cada una de sus partes. Las ecuaciones del equilibrio de cada una de esas partes estarán relacionadas por los términos que contengan a las fuerzas de interacción. Si la estructura no es rígida por si misma, sino que su rigidez depende de los apoyos exteriores, como en el caso de la figura 4.13*b*, no podrá efectuarse por completo el cálculo de las reacciones exteriores hasta que se desmiembre la estructura y cada parte se estudie por separado.

En la mayoría de los casos se encontrará que el análisis de los entramados y las máquinas se facilita mucho representando las fuerzas en función de sus componentes rectangulares. Ocurre así, en particular, cuando se dan las dimensiones de las partes según direcciones perpendiculares entre sí. La ventaja de esta representación es que simplifica notablemente el cálculo de los brazos de momento. En algunos problemas tridimensionales, particularmente cuando se calculan momentos respecto a ejes que no son paralelos a los de coordenadas, resulta ventajosa la notación vectorial.

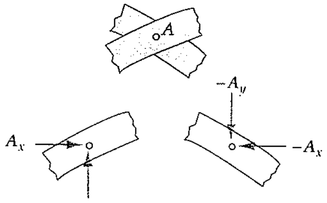


(a) (b)

Figura 4.14

Al dibujar los diagramas para sólido libre, no siempre es posible asignar de antemano el sentido adecuado a todas las fuerzas o a sus componentes y se hace necesario asignarles un sentido arbitrario. En este caso, es *absolutamente necesario* que cada fuerza se represente en todos los diagramas de los cuerpos interactuantes siempre *coherentemente* con el sentido arbitrario que se le haya asignado. Así, en la figura 4.14*a* lo coherente es que las componentes de las fuerzas se representen con sentidos *opuestos* en los dos diagramas de sólido libre. En una conexión de rótula entre miembros de un entramado espacial, el principio de acción y reacción debe aplicarse a las tres componentes tal como se indica en la figura 4.14*b*. Los sentidos asignados pueden mostrarse incorrectos cuando el cálculo desvele los signos algebraicos. Por ejemplo, si A_x resultase negativa, es que realmente actúa en el sentido contrario al que se le asignó originalmente. De acuerdo con esto, tendríamos que invertir el sentido de la fuerza en *ambos* miembros y también el signo de sus términos en las ecuaciones. También podríamos dejar la representación tal como en principio la hicimos, dejando implícito el sentido de la fuerza en su signo negativo. Si decidimos emplear la notación vectorial al rotular las fuerzas, deberemos cuidar de atribuir a las acciones el signo positivo y el signo negativo a las reacciones.

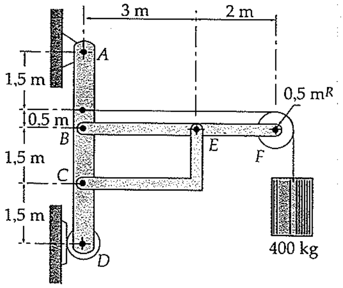
Por último, surgen ocasionalmente situaciones en que es necesario resolver un sistema de dos o más ecuaciones para separar las incógnitas. Sin embargo, en la mayoría de los casos se podrá evitar la resolución de sistemas de ecuaciones eligiendo convenientemente el miembro o grupo de miembros del diagrama de sólido libre y tomando adecuadamente los centros de momentos que eliminen términos molestos en las ecuaciones. En los problemas tipo siguientes se ilustra el método de resolución descrito en los párrafos anteriores.



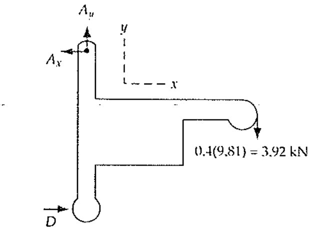
Notación vectorial
Figura 4.15

PROBLEMA TIPO 4.5

El entramado soporta la carga de 400 kg del modo indicado. Despreciar los pesos de los miembros frente a las fuerzas inducidas por la carga y calcular las componentes vertical y horizontal de todas las fuerzas que se ejercen sobre cada miembro.



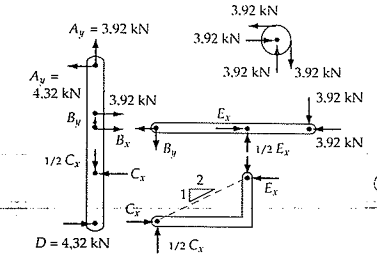
① Se ve que el entramado pertenece a la categoría ilustrada en la figura 4.13a.



Solución. En primer lugar se observa que los tres miembros portantes que cons-① tituyen el entramado forman un conjunto rígido que puede analizarse como un solo cuerpo. También se observa que la disposición de los apoyos exteriores hace isostático al entramado.

Mediante el diagrama de sólido libre del conjunto se determinan las reacciones, Así

$[\Sigma M_A = 0]$	$5{,}5(0{,}4)(9{,}81) - 5D = 0$	$D = 4{,}32\text{ kN}$
$[\Sigma F_x = 0]$	$A_x - 4{,}32 = 0$	$A_x = 4{,}32\text{ kN}$
$[\Sigma F_y = 0]$	$A_y - 3{,}92 = 0$	$A_y = 3{,}92\text{ kN}$



A continuación, desmembramos el entramado y dibujamos el diagrama de sólido libre de cada miembro. Los diagramas se han dispuesto aproximadamente en sus posiciones relativas para que sea fácil seguir la pista a las fuerzas de interacción comunes. En el diagrama de *AD* se han introducido las reacciones recién obtenidas. Otras fuerzas conocidas son las de 3,92 kN que el eje de la polea ejerce sobre el miembro *BF* y que se obtienen del diagrama de sólido libre de la polea. También se representa la tracción de 3,92 kN del cable aplicada en el punto de amarre de *AD*.

② Seguidamente, sobre los diagramas se indican las componentes de todas las fuerzas desconocidas. Se observa aquí que *CE* es un miembro de dos fuerzas. Las componentes de las fuerzas en *CE* son iguales y opuestas y se han representado sobre *BF* en *E* y sobre *AD* en *C*. A primera vista no puede conocerse el sentido positivo de las componentes en *B*, por lo que se podrá asignar arbitrariamente y lo mantendremos de manera sistemática.

La resolución podemos proseguirla con el miembro *BF* empleando una ecuación de momentos respecto a *B* o *E* y dos ecuaciones de fuerzas. O sea,

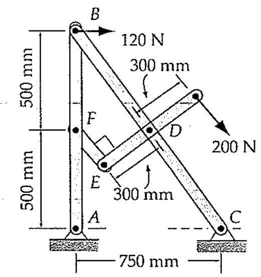
$[\Sigma M_B = 0]$	$3{,}92(5) - \frac{1}{2}E_x(3) = 0$	$E_x = 13{,}08\text{ kN}$	*Resp.*
$[\Sigma F_y = 0]$	$B_y + 3{,}92 - 13{,}08/2 = 0$	$B_y = 2{,}62\text{ kN}$	*Resp.*
$[\Sigma F_x = 0]$	$B_x + 3{,}92 - 13{,}08 = 0$	$B_x = 9{,}15\text{ kN}$	*Resp.*

② Sin esta observación, la resolución del problema sería mucho más larga, pues las tres ecuaciones de equilibrio del miembro *BF* contendrían cuatro incógnitas: B_x, B_y, E_x y E_y. Obsérvese particularmente que es la dirección de la recta que une los dos puntos de aplicación de la fuerza, y no la forma del miembro, lo que determina la dirección de la fuerzas que actúan en un miembro de dos fuerzas.

Si las incógnitas resultan ser positivas es que los sentidos asignados en los diagramas de sólido libre fueron los correctos. El valor $C_x = E_x = 13{,}08$ kN, obtenido por observación del diagrama de sólido libre de *CE*, se introduce ahora en el diagrama de *AD*, junto con los valores de B_x y B_y recién determinados. A efectos de comprobación, ahora podemos aplicar las ecuaciones de equilibrio al miembro *AD*, puesto que ya conocemos todas las fuerzas que actúan sobre ese miembro. Las ecuaciones dan

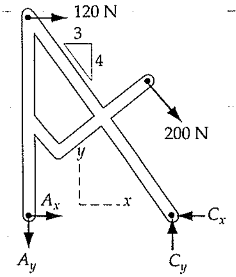
$[\Sigma M_C = 0]$	$4{,}32(3{,}5) + 4{,}32(1{,}5) - 3{,}92(2) - 9{,}15(1{,}5) = 0$
$[\Sigma F_x = 0]$	$4{,}32 - 13{,}08 + 9{,}15 + 3{,}92 + 4{,}32 = 0$
$[\Sigma F_y = 0]$	$-13{,}08/2 + 2{,}62 + 3{,}92 = 0$

PROBLEMA TIPO 4.6



Despreciar el peso del entramado y calcular las fuerzas que actúan en todos sus miembros.

① Este entramado pertenece a la categoría representada en la figura 4.13*b*.

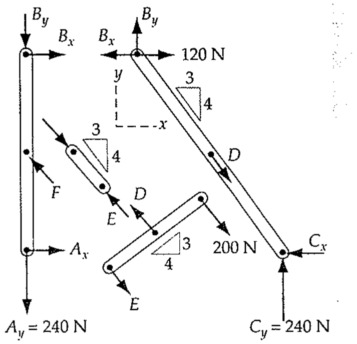


Solución. Empezamos observando que el entramado no es un conjunto rígido cuando se separa de sus apoyos, puesto que *BDEF* es un cuadrilátero deformable y no un triángulo rígido. En consecuencia no pueden determinarse por completo las reacciones exteriores hasta estudiar cada miembro por separado. Sin embargo, utilizando el diagrama de sólido libre del entramado completo podemos determinar las componentes verticales de las reacciones en *A* y *C*. Así,

② Los sentidos de A_x y C_x son evidentes inicialmente y pueden ser tomados arbitrariamente y después corregidos en caso necesario.

$[\Sigma M_c = 0]$	$200(0{,}3) + 120(0{,}1) - 0{,}750A_y = 0$	$A_y = 240\text{ N}$	*Resp.*
$[\Sigma F_y = 0]$	$C_y - 200(4/5) - 240 = 0$	$C_y = 400\text{ N}$	*Resp.*

A continuación, desmembramos el entramado y dibujamos el diagrama de sólido libre de cada parte. Como *EF* es un miembro de dos fuerzas, se reconocerán las direcciones de las fuerzas en *E* de *ED* y en *F* de *AB*. Podemos suponer que ③ la fuerza de 120 N se aplica al pasador como parte de BC. No debe existir dificultad para asignar los sentidos correctos a las fuerzas *E*, *F*, *D* y B_x. El sentido de B_y, sin embargo, no puede asignarse por inspección y por tanto se representa arbitrariamente dirigido hacia abajo en *AB* y hacia arriba en *BC*.



Miembro ED. Las dos incógnitas se resuelven fácilmente de

$[\Sigma M_D = 0]$	$200(0{,}3) - 0{,}3E = 0$	$E = 200\text{ N}$	*Resp.*
$[\Sigma F = 0]$	$D - 200 - 200 = 0$	$D = 400\text{ N}$	*Resp.*

Miembro EF. Evidentemente, *F* es igual y opuesta a *E* de módulo 200 N.

Miembro AB. Como *F* ya es conocida, despejamos B_x, A_x y B_y en

③ La fuerza de 120 N también podríamos haberla aplicado al pasador como parte de *BA*, con el consiguiente cambio en la reacción B_x.

$[\Sigma M_A = 0]$	$200(3/5) - B_x(1{,}0) = 0$	$B_x = 60\text{ N}$	*Resp.*
$[\Sigma F_x = 0]$	$A_x + 60 - 200(3/5) = 0$	$A_x = 60\text{ N}$	*Resp.*
$[\Sigma F_y = 0]$	$200(4/5) - 240 - B_y = 0$	$B_y = -80\text{ N}$	*Resp.*

El signo menos muestra que el sentido asignado a B_y no era el correcto.

④ También podríamos haber regresado al diagrama de sólido libre del entramado completo y hallar C_x.

④ *Miembro BC.* Los valores obtenidos para B_x, B_y y D se trasladan a BC y la incógnita restante C_x se determina de

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad 120 + 400(3/5) - 60 - C_x = 0 \qquad C_x = 300 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

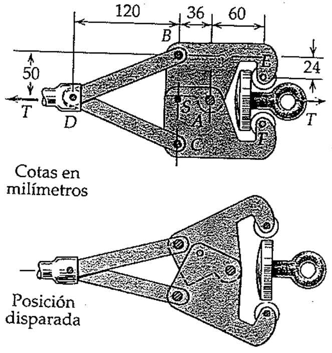
Como comprobación, podemos aplicar las otras dos ecuaciones de equilibrio. O sea,

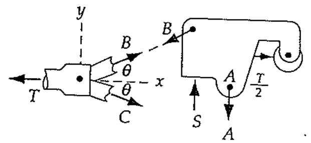
$$[\Sigma M_y = 0] \qquad 400 + (-80) - 400(4/5) = 0$$

$$[\Sigma M_c = 0] \qquad 120 - 60(1{,}0) + (-80)(0{,}75) = 0$$

PROBLEMA TIPO 4.7

La máquina representada es un dispositivo de protección que libera la carga cuando ésta sobrepasa un cierto valor prefijado T. Un pasador de seguridad de metal dulce se aloja en un orificio situado en la mitad inferior y sobre él actúa la mitad superior de forma que, cuando la fuerza que soporta es superior a su resistencia, se rompe. Entonces, tal como se representa en la segunda figura, las dos mitades giran en torno de A, bajo la acción de las tracciones ejercidas por BD y CD y los rodillos liberan el cáncamo. Determinar el esfuerzo T máximo admisible si el pasador S se rompe por cizalla cuando la fuerza total que actúa sobre él es de 800 N. Calcular también la fuerza correspondiente sobre el pasador A.





① Es siempre útil reconocer la simetría. En este caso, su existencia nos dice que las fuerzas actuantes en ambas mitades se comportan como imágenes especulares la una de la otra respecto al eje x. Por tanto, no es posible que exista una fuerza activa aplicada a un miembro en la dirección x positiva y que la reacción correspondiente tenga la dirección x negativa. En consecuencia, las fuerzas S y A carecen de componentes x

Solución. Dada la simetría, estudiaremos únicamente uno de los dos miembros articulados. Para ello, tomamos la mitad superior, representándose el diagrama de sólido libre correspondiente a ésta junto con el del enlace D. A causa de la simetría, la fuerzas en S y A carecen de componentes x. Los miembros de dos fuerzas BD y CD ejercen fuerzas de igual módulo $B = C$ sobre el enlace D. El equilibrio de éste nos da ①

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad B\cos\theta + C\cos\theta - T = 0 \qquad 2B\cos\theta = T$$

$$B = T/(2\cos\theta)$$

Mediante el diagrama de sólido libre de la mitad superior expresamos la nulidad de la suma de momentos respecto al punto A. Sustituyendo $S = 800$ N y T por su expresión calculada antes tenemos

② $$[\Sigma M_A = 0] \qquad \frac{T}{2\cos\theta}(\cos\theta)(50) + \frac{T}{2\cos\theta}(\text{sen }\theta)(36) - 36(800) - \frac{T}{2}(26) = 0$$

Sabiendo que sen $\theta/\cos\theta = \text{tg }\theta = 5/12$ y despejando T, resulta

$$T\left(25 + \frac{5(36)}{2(12)} - 13\right) = 28\,800$$

$$T = 1477 \text{ N} \qquad T = 1{,}477 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Por último, para la dirección y tenemos

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad S - B\text{ sen }\theta - A = 0$$

$$800 - \frac{1477}{2(12/13)}\,\frac{5}{13} - A = 0 \qquad A = 492 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

② Téngase cuidado para no olvidar el momento de la componente y de B. Obsérvese que se ha operado tomando como unidades el newton y el milímetro.

PROBLEMAS

(Salvo indicación expresa de lo contrario, en los problemas siguientes se despreciarán las masas de los miembros.)

Problemas introductorios

4.65 Hallar la intensidad de la reacción en el pasador B, (*a*) ignorando el hecho de que BD es un miembro de dos fuerzas y (*b*) teniendo en cuenta que lo es.
Resp. $B = 1250$ N

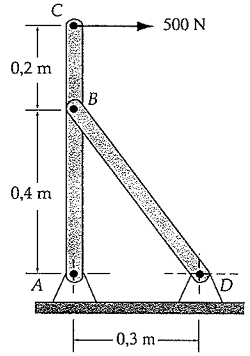


Figura problema 4.65

4.66 En el entramado sencillo sometido a la fuerza de 750 N, hallar las intensidades de las reacciones en los pasadores A y C.

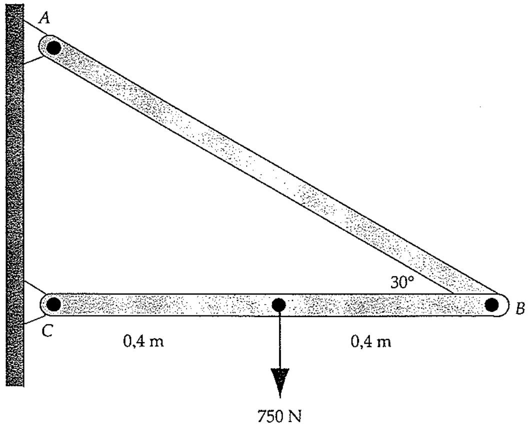


Figura problema 4.66

4.67 Hallar la intensidad de la reacción en el pasador C.
Resp. $C = 236$ N

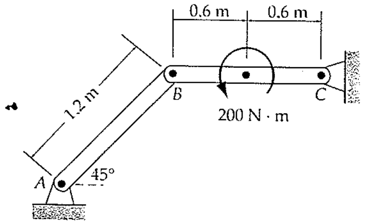


Figura problema 4.67

4.68 En el entramado sometido a la fuerza de 900 N, hallar la intensidad de la reacción en el pasador A.

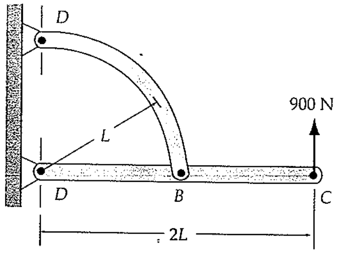


Figura problema 4.68

4.69 En el problema 4.68 se sustituye la fuerza de 900 N por un par de momento 900 N · m de sentido horario aplicado en el punto C. Calcular la intensidad de la reacción en el pasador A. ¿Qué valor de L hace que sean iguales el resultado de este problema y el del problema 4.68?

Resp. $A = 1273/L$ $\quad L = 0{,}632$ m

4.70 Apretando con una fuerza de 80 N en los brazos de los alicates, hallar la fuerza F que cada mandíbula aplica a la barra redonda. Calcular, además, la fuerza que soporta el pasador A.

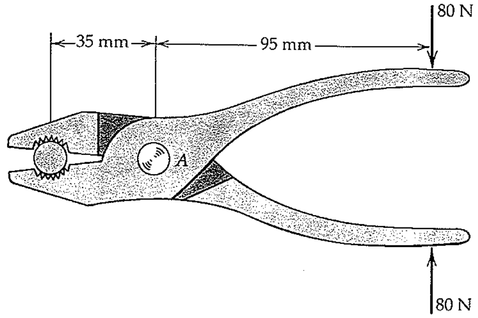


Figura problema 4.70

4.71 El gato hidraúlico para automóviles está sometido a una fuerza descendente de 4000 N. Dibujar el diagrama de sólido libre de BCD y calcular la carga que soporta el rodillo C. Obsérvese que el rodillo B no toca la columna vertical.

Resp. $C = 6470$ N

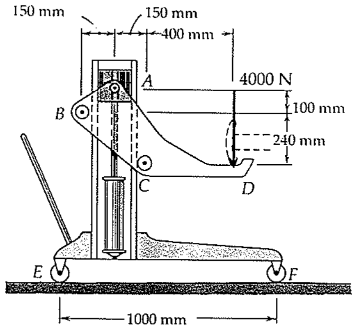


Figura problema 4.71

4.72 La herramienta de la figura se emplea para clavar puntillas en trabajos de enmarcado. Si en las empuñaduras se ejerce una fuerza de apriete de 40 N, hallar la fuerza F ejercida sobre la puntilla D.

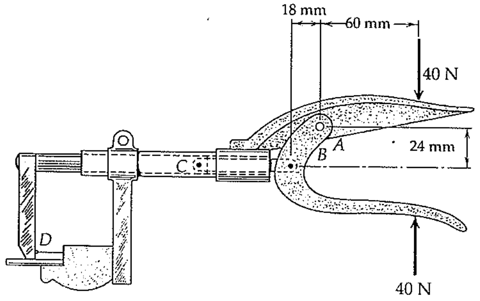


Figura problema 4.72

4.73 Las dos barras uniformes se sujetan en un plano vertical, tal como se muestra. Si las masas de AC y BD son de 60 y 30 kg, respectivamente, con centros de masa en el punto medio de cada barra, calcular la fuerza que soporta el pasador A.

Resp. $A = 607$ N

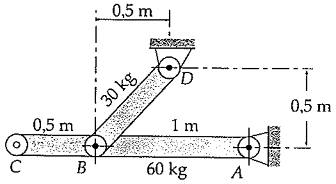


Figura problema 4.73

4.74 Un soporte plegable para maletas está construido con dos conjuntos iguales al representado, dos elementos de conexión (cuyos extremos se muestran) sobre los que se coloca la maleta y dos correas que limitan el ángulo de apertura del soporte. Si sobre éste se deposita simétricamente una maleta de 50 kg, hallar la tensión T en cada correa. Supóngase que el soporte descansa sobre un suelo muy liso, por lo que pueden despreciarse las fuerzas de rozamiento.

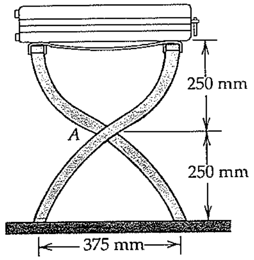


Figura problema 4.74

Problemas representativos

4.75 En los alicates de articulación movible calcular la fuerza que soporta el pasador A cuando el apriete es de 100 N.

Resp. $A = 525$ N

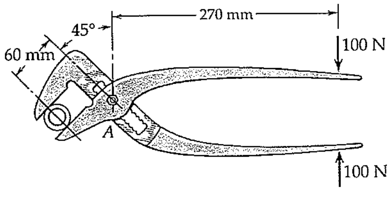


Figura problema 4.75

4.76 La "contratenaza de rescate" es una herramienta que emplea el personal de los equipos de socorro para apalancar y separar restos de accidentes y facilitar así la liberación de las víctimas. Si tras el émbolo P de superficie 13 000 mm^2 se desarrolla una presión de 3,5 MPa, hallar la fuerza vertical R que ejercen las puntas de las mandíbulas en la posición representada contra los restos. Obsérvese que en esta posición la biela AB y su gemela están las dos horizontales.

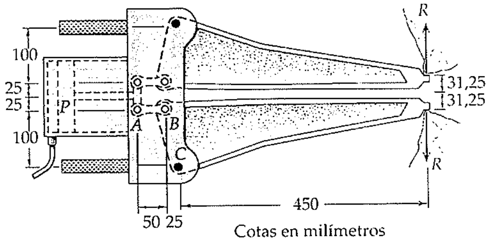


Figura problema 4.76

4.77 Las tijeras de doble palanca que se muestran en la figura suelen emplearse en lugar de las corrientes de hojalatero cuando se requieren grandes fuerzas de corte. Si se aplica una fuerza de compresión de 150 N, ¿cuál es la fuerza de corte P en un lugar del filo de la hoja situado a una distancia de 30 mm del pasador A?

Resp. $P = 1467$ N

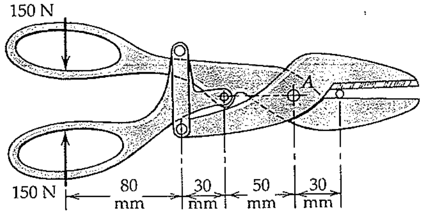


Figura problema 4.77

4.78 En el entramado cargado, hallar la fuerza en el pasador C.

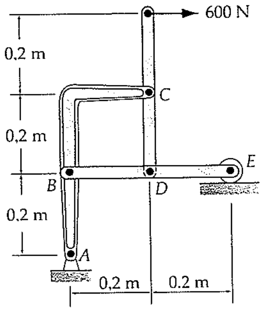


Figura problema 4.78

4.79 Para la posición a 45° de la palanca de la bomba con la fuerza P aplicada perpendicularmente a ella, determinar gráficamente el ángulo θ entre la palanca y la barra compensadora AB, la cual permite que la fuerza se transmita al émbolo según el eje vertical de éste.

Resp. $\theta = 59{,}0°$

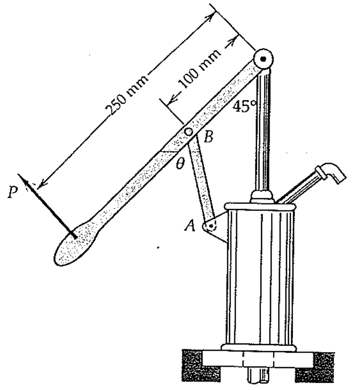


Figura problema **4.79**

4.80 En la figura se esquematiza un cortador manual utilizado para cortar pernos y espárragos de pequeño tamaño. Determinar la fuerza Q desarrollada por cada mandíbula cuando el apriete manual aplicado es $P = 150$ N.

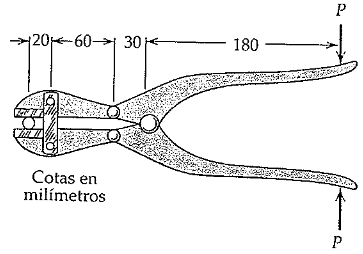


Figura problema **4.80**

4.81 En la pinza de resorte de la figura, hay un resorte helicoidal arrollado en torno al pasador A cuyos extremos aprietan contra las superficies internas de los dos brazos al objeto de proporcionar la fuerza de apriete deseada. En la posición representada, para aflojar la pinza se necesita una fuerza de intensidad $P = 25$ N. Hallar la fuerza compresiva en B si $P = 0$.

Resp. $B = 68{,}8$ N

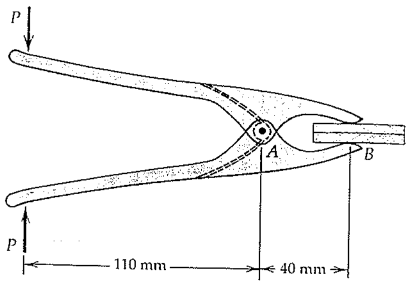
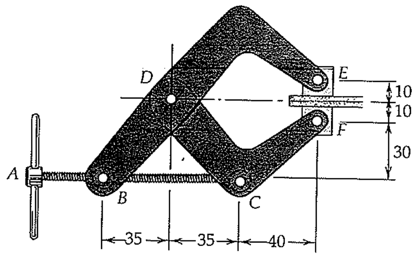


Figura problema **4.81**

4.82 La mordaza se ajusta de modo que ejerza una pareja de fuerzas compresivas de 200 N sobre los tableros atrapados entre sus mandíbulas articuladas. Hallar la fuerza que sufre el árbol roscado BC y el módulo de la reacción en el pasador D.



Cotas en milímetros

Figura problema **4.82**

4.83 A las empuñaduras de la pequeña ojeteadora se aplican sendas fuerzas de 80 N. El bloque A se desliza, con un rozamiento despreciable por una ranura mecanizada en la parte inferior de la herramienta. Despreciando la pequeña fuerza que pueda ejercer el resorte liviano de retorno AE, hallar la fuerza P aplicada al ojete.

Resp. $P = 217$ N

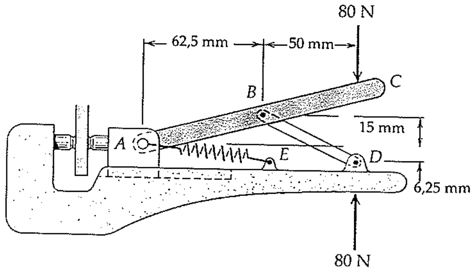


Figura problema **4.83**

4.84 La fuerza P mantiene en la posición representada al entramado cargado por resorte. Para esa posición, hallar las expresiones de la tensión T del resorte y de la fuerza que soporta el pasador B.

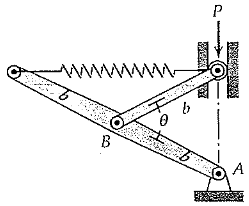


Figura problema **4.84**

4.85 Una llave dinamométrica limitadora está diseñada con un pasador de seguridad B que se rompe cuando la fuerza que actúa sobre el mismo sobrepasa su resistencia y limita así el par que puede ser aplicado por la llave. Si la resistencia a la cizalla doble del pasador es 900 N (es decir, $V/2 = 450$ N), calcular el momento del par limitador M. ¿Cuál sería el efecto sobre M al aumentar b, permaneciendo inalteradas las demás condiciones?

Resp. $M = 75$ N · m

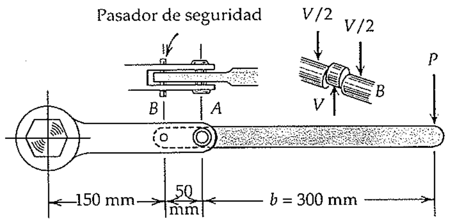


Figura problema **4.85**

4.86 En la figura se muestra una bomba manual de alta presión que se emplea para elevar la presión del aceite en un circuito hidráulico. Cuando la palanca está en equilibrio con $\theta = 15°$ bajo la acción de una fuerza $P = 120$ N, hallar la presión p del aceite que actúa bajo el émbolo de 46 mm de diámetro. (Encima del émbolo, la presión es la atmosférica.)

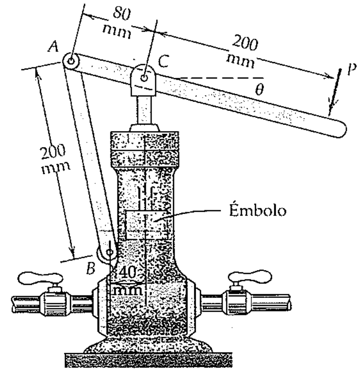


Figura problema **4.86**

4.87 Para el sacabocados de la figura, hallar la fuerza punzante Q que corresponde a una fuerza de presión manual P.

Resp. $Q = P\,(b/a)$

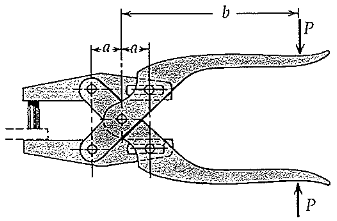


Figura problema **4.87**

4.88 El pasador B conecta los dos miembros del entramado en forma de triángulo rectángulo isósceles. Hallar las expresiones de las fuerzas que soportan los pasadores A y C a causa del par aplicado al pasador B si (*a*) el pasador B está soldado a AB pero gira libremente en BC y (*b*) si el pasador B está soldado a BC pero gira libremente en AB.

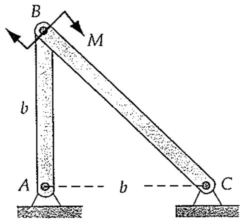


Figura problema **4.88**

4.89 La llave de caja especial cuya cabeza *B* puede girar en torno al punto *C* del mango *A*, puede acomodarse a una serie de medidas de cabezas de perno hexagonales. Para el tamaño nominal representado en donde el centro *O* del perno y del pasador *C* están alineados con el mango, calcular el módulo de la fuerza soportada por el pasador *C* si *P* = 160 N. Supóngase lisa la superficie de la cabeza del perno.

Resp. *C* = 1367 N

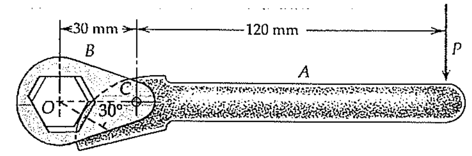


Figura problema 4.89

4.90 Hallar la fuerza de sujeción desarrollada en *E* en función de la fuerza *P* aplicada al mango de la mordaza articulada.

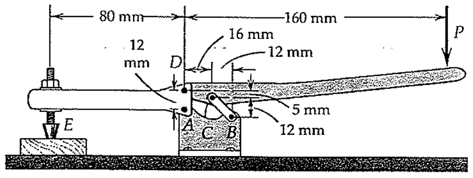


Figura problema 4.90

4.91 En la figura se representa un extractor de ruedas mientras separa una polea trapezoidal *P* de su eje de ajuste *S* apretado y enroscando el tornillo central. Si la polea empieza a desprenderse del eje cuando la compresión en el tornillo llega a 1.2 kN, calcular la intensidad de la fuerza que soporta cada mandíbula en *A*. Los tornillos de ajuste *D* soportan fuerzas horizontales y mantienen los brazos laterales paralelos al tornillo central.

Resp. *A* = 0.626 kN

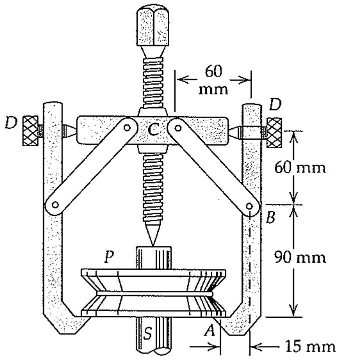


Figura problema 4.91

4.92 En la posición particular representada de la grúa para troncos, las plumas *AF* y *EG* son perpendiculares entre sí y *AF* es perpendicular a *AB*. Si la grúa está manejando un tronco de 2,4 Mg, calcular la fuerza soportada por los pasadores en *A* y *D* en esta posición a causa del peso del tronco.

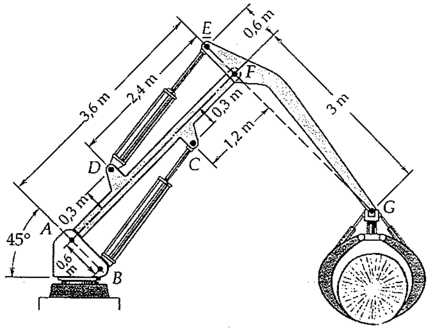


Figura problema 4.92

4.93 Se representa un mecanismo de elevación para trasladar bidones de acero de 135 kg. Calcular el módulo de la fuerza que se ejerce en los puntos *E* y *F* del bidón.

Resp. *E* = 5,19 kN

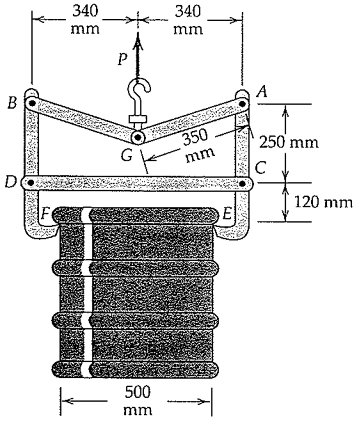


Figura problema 4.93

4.94 Las tenazas articuladas de la figura se emplean en numerosas aplicaciones. Para la posición de los brazos dada por $\alpha = 10°$ y una fuerza de apriete *P* = 150 N, calcular la correspondiente fuerza de agarre *C*.

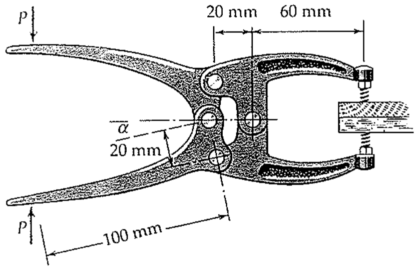


Figura problema 4.94

4.95 En el elevador de automóviles de la figura los vehículos suben a la plataforma y después se alzan las ruedas traseras. Si la carga debida a éstas es de 6 kN, hallar la fuerza en el cilindro hidraúlico *AB*. Despréciese el peso de la plataforma. El miembro *BCD* es una palanca acodada a 90° articulada en *C* a la rampa.

Resp. *AB* = 15,87 kN

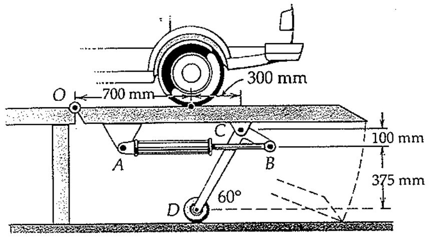


Figura problema 4.95

4.96 La mandíbula *D* de la prensa se desliza con rozamiento despreciable a lo largo de la columna vertical fija. Calcular la fuerza de compresión *R* que ejerce sobre el cilindro *E* y la fuerza que soporta el pasador *A* al aplicar una fuerza *F* = 200 N a la empuñadura de la palanca cuando el ángulo θ es 75°.

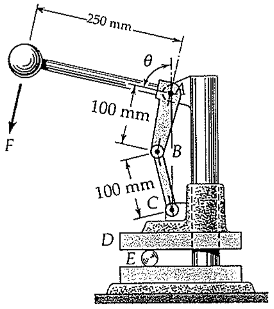


Figura problema 4.96

4.97 El ángulo de elevación θ del brazo superior de la grúa con una cesta lo controlan los dos cilindros hidraúlicos instalados en el extremo superior de la pluma inferior del mecanismo. La biela de cada cilindro está unida a la cadena que engrana con la rueda dentada *A*, tal como se muestra en la vista ampliada. La rueda dentada está soldada al extremo del brazo superior. Hallar la intensidad *R* de la fuerza total que soporta el pasador de la articulación *B* y la presión del aceite *p* en el cilindro de arriba para mantener el brazo en la posición $\theta = 30°$. En el cilindro de abajo, con el brazo en la posición $\beta = 60°$, se mantiene una presión constante de 80 kPa. La superficie efectiva del émbolo sometida a presión hidraúlica es de $7{,}85 \times 10^{-3}$ m^2. El centro de masa de la pluma superior de 120 kg está en el centro y la masa combinada del hombre y la cesta es de 110 kg.

Resp. *R* = 68,2 kN
p = 8360 kPa.

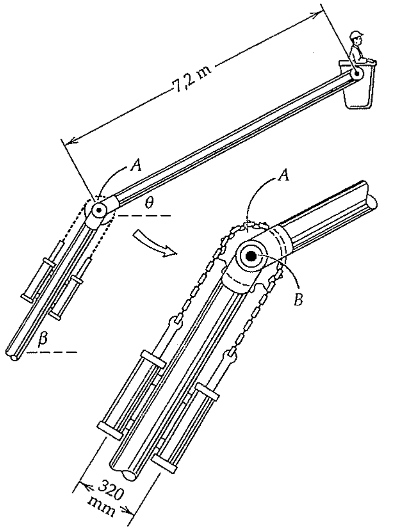
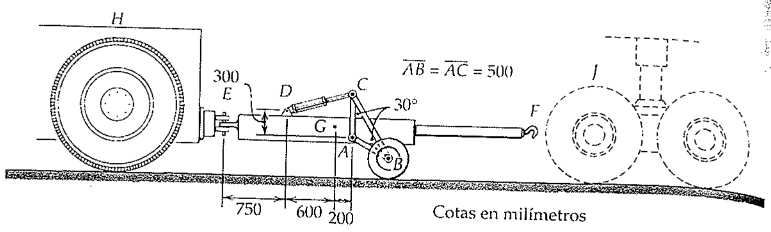


Figura problema 4.97

4.98 En la figura se representa una suspensión de doble eje para camiones pequeños. La masa del bastidor central *F* es de 40 kg y la masa de cada rueda con la barra a ella unida es de 35 kg, estando el centro de masa a 680 mm de la vertical central. Para una carga *L* = 12 kN transmitida al bastidor *F*, calcular la fuerza cortante total en el pasador *A*.



Cotas en milímetros

Figura problema 4.100

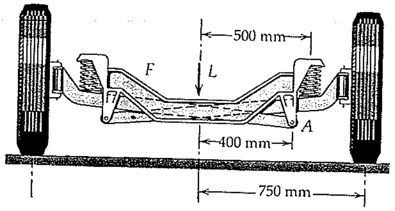


Figura problema 4.98

4.99 El tren de aterrizaje se compone de un cuerpo de bomba D cargado hidraúlicamente y por resorte y las dos barras articuladas OB y CB. Si el tren de aterrizaje se mueve a lo largo de la pista a velocidad constante, soportando la rueda una carga constante estabilizada de 24 kN, calcular la fuerza total soportada en el pasador A.

Resp. A = 44,7 kN

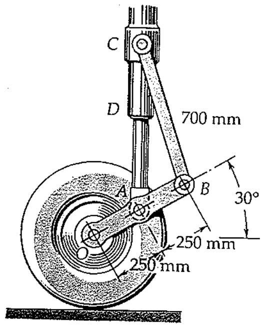
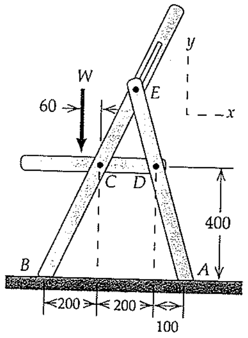


Figura problema 4.99

4.100 En la figura se representa la barra de remolque ajustable que enlaza el tractor H con el tren de aterrizaje J de un avión de gran tamaño. Para ajustar la altura del gancho F, situado en el extremo de la barra, se utiliza el cilindro hidraúlico CD que es activado por una pequeña bomba hidraúlica manual (no representada). Para la posición indicada del sistema articulado ABC, calcular la fuerza P proporcionada por el cilindro a la articulación C para situar en posición la barra de remolque. El aparejo tiene una masa total de 50 kg con centro de masa en G y es soportado por el tractor enganchado en E.

4.101 En la figura se representa una silla plegable común con el pasador E trabado en posición. Si la mitad del peso de una persona de 70 kg lo soporta el costado visto de la estructura de la silla, hallar las componentes x e y de todas las fuerzas que actúan sobre el miembro BCE. Supóngase que la silla descansa sobre un suelo liso, por lo que pueden despreciarse las fuerzas horizontales de rozamiento en A y B.

Resp. B_y = 247 N C_x = 85,8 N C_y = −446 N
E_x = −85,8 N E_y = 199,1 N



Cotas en milímetros

Figura problema 4.101

4.102 Hallar la fuerza cortante Q aplicada a la barra si a la empuñadura se aplica una fuerza de 400 N cuando θ = 30°. Para una fuerza aplicada dada, ¿qué valor de θ da la mayor fuerza cortante?

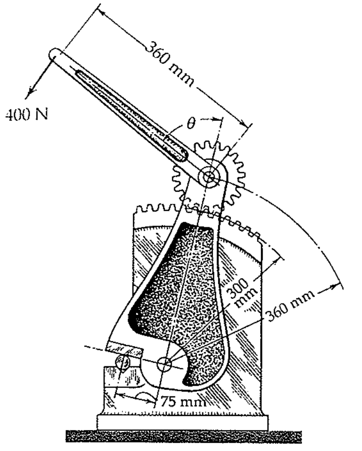
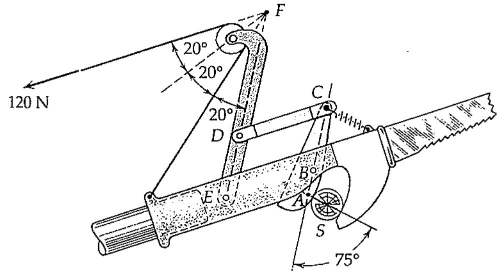


Figura problema 4.102

4.103 En la figura se representa el mecanismo de poda de una sierra de pértiga cortando una rama S. Para la posición concreta de la figura, el cordel de accionamiento es paralelo a la pértiga y soporta una tensión de 120 N. Hallar la fuerza cortante P que la cuchilla aplica a la rama y la fuerza total que soporta el pasador E. La fuerza que ejerce el resorte liviano de retorno C es pequeña y puede despreciarse.

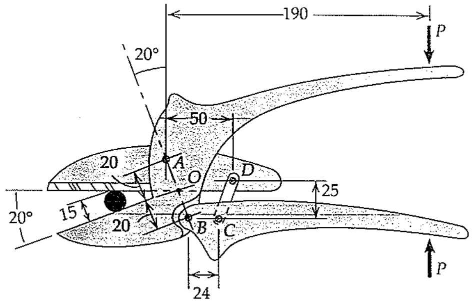
Resp. P = 1351 N, E = 300 N



$\overline{AB}$ = 25 mm, $\overline{BC} = \overline{ED}$ = 75 mm, $\overline{EB} = \overline{DC}$ = 112,5 mm, $\overline{DF}$ = 150 mm

Figura problema 4.103

4.104 Para las tijeras de poda representadas hallar la fuerza Q aplicada a la rama circular de 15 mm de diámetro por una fuerza de apriete P = 200 N. *Sugerencia*: Dibujar primero un diagrama para sólido libre de la rama aislada.



Cotas en milímetros

Figura problema 4.104

4.105 Los diseñadores de mecanismos para lámparas, como el de la figura, acostumbran a contar con el rozamiento como ayuda para mantener el equilibrio estable. En este problema se supondrá que en el punto C hay rozamiento suficiente para impedir toda rotación en el mismo, pero se despreciarán los rozamientos en las demás articulaciones. Si la masa del posicionador de la lámpara es de 0,6 kg con centro de masa en G, hallar qué fuerza F_s debe ejercer el resorte para que la posición representada sea de equilibrio.

Resp. F_s = 45,2 N

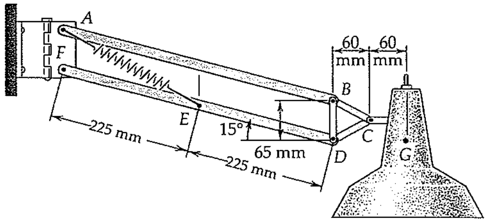


Figura problema 4.105

4.106 La cuchara trasera se gobierna mediante los tres cilindros hidraúlicos y, en la posición indicada, puede aplicar una fuerza horizontal P = 10 kN. Despreciar las masas de los miembros y calcular las intensidades de las fuerzas en los pasadores A y E.

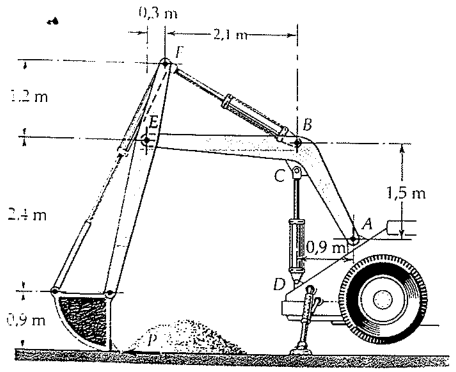
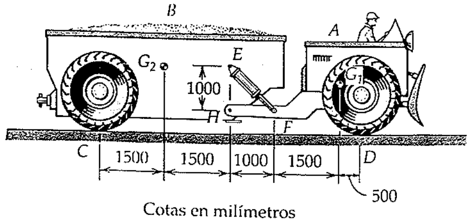


Figura problema **4.106**

4.107 La unidad motriz del tractor para chatarra posee una masa de 4 Mg y su centro de masa está en G_1. La masa del remolque completamente lleno es de 24 Mg y su centro de masa está en G_2. El remolque se sitúa en posición merced a dos cilindros hidraúlicos EF, uno a cada lado de la máquina. Calcular la fuerza de compresión F que sufre cada cilindro y el módulo de la fuerza actuante sobre cada articulación H, una a cada lado. Supóngase que las ruedas giran libremente, por lo que no existen componentes de fuerza horizontales bajo las ruedas.
Resp. $F = 131{,}8$ kN
$H = 113{,}9$ kN



Cotas en milímetros

Figura problema **4.107**

4.108 Las dos mandíbulas agudas del extractor de clavos ejercen sendas fuerzas extractoras iguales y paralelas al clavo, sin que éste tienda a doblarse para la configuración representada. Hallar la fuerza extractora total T sobre el clavo, la fuerza normal que cada mandíbula ejerce sobre el mismo y el módulo de la reacción en el pasador A. En B la superficie es lo bastante rugosa para impedir el deslizamiento.

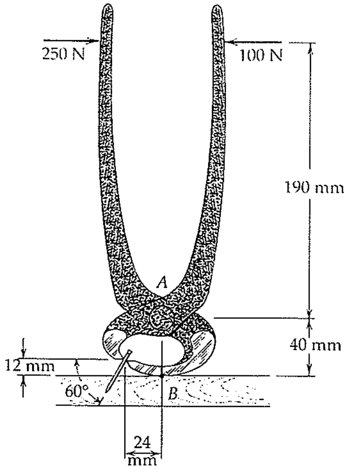


Figura problema **4.108**

4.109 En la posición representada con $\theta = 30°$ la grúa de barco soporta una carga de 4 Mg. El tambor de izado B es accionado por un motor eléctrico de alto par. Calcular la compresión añadida P en el cilindro hidraúlico y el módulo R de la fuerza adicional que soporta el pasador en O, debidas ambas al efecto de la carga de 4 Mg.
Resp. $P = 211$ kN
$R = 173{,}7$ kN

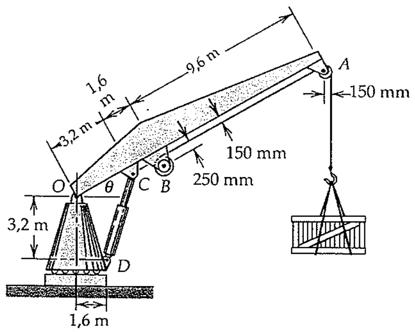
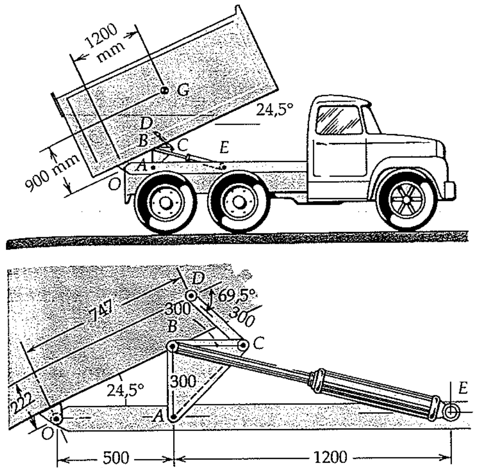


Figura problema **4.109**

4.110 En la vista a mayor escala se representa el mecanismo de elevación del camión volquete. Hallar la fuerza de compresión P en el cilindro hidraúlico BE y el módulo de la fuerza que soporta el pasador A en la posición representada, en que BA es normal a OAE y la biela DC es normal a AC. La masa del camión con su carga es de 9 Mg y su centro de masa está en G. En la figura se indican las cotas correspondientes.
Resp. $P = 119{,}0$ kN $A = 64{,}5$ kN



Cotas en milímetros

Detalle del mecanismo de elevación

Figura problema **4.110**

4.111 En el entramado espacial de la figura hallar la fuerza que actúa sobre el miembro ABC en el punto A. Todas las conexiones pueden tratarse como rótulas.
Resp. $A = 4{,}25$ kN

4.112 El entramado de la figura descansa sobre una superficie horizontal lisa y las conexiones en D, E, F, G y H actúan como rótulas. Hallar la fuerza total que actúa sobre la conexión D bajo la carga de 5 kN aplicada en F.

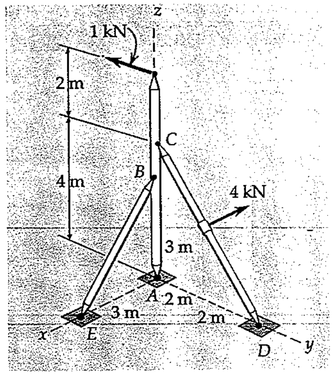


Figura problema **4.111**

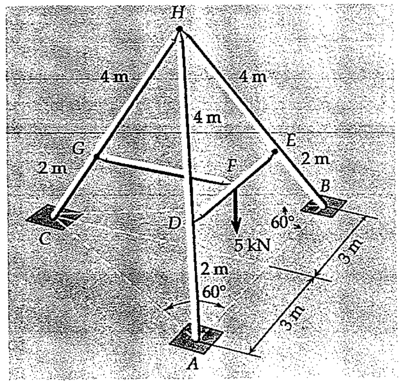


Figura problema **4.112**

4.7 REPASO Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo 4 hemos aplicado las condiciones de equilibrio a dos clases de problemas: (*a*) armaduras simples y (*b*) entramados y máquinas. En esencia, no hubo necesidad de nuevas teorías, puesto que nos hemos limitado a diagramas de sólido libre y a aplicar las ya conocidas ecuaciones de equilibrio. No obstante, las estructuras con las que hemos tratado a lo largo de esta capítulo nos han proporcionado la oportunidad de desarrollar aún más nuestra familiarización con la sistemática de los procedimientos generales para la resolución de los problemas de Mecánica.

En los puntos que siguen se repasan las características fundamentales del análisis de las dos clases de estructuras mencionadas.

(a) Armaduras simples

1. Las armaduras simples se componen de miembros de dos fuerzas unidos entre sí por sus extremos y capaces de soportar tracciones y compresiones. Todas las fuerzas interiores, por consiguiente, tienen siempre las direcciones de los miembros correspondientes.
2. Las armaduras simples se construyen a partir de la estructura rígida (que no se derrumba) más elemental, constituida por el triángulo en el caso de armaduras planas y por el tetraedro en el caso de armaduras espaciales. La ampliación a armaduras mayores se consigue añadiendo a éstas nuevos miembros, dos cada vez a las armaduras planas y tres a las armaduras espaciales, los cuales se unen a nudos ya existentes por sus extremos para constituir un nuevo nudo.
3. Se supone que los nudos de las armaduras planas son articulaciones planas y que los nudos de las armaduras espaciales simples son articulaciones de rótula. Así pues, a través de los nudos pueden transmitirse fuerzas pero no momentos.
4. Las cargas se aplican exclusivamente en los nudos.
5. Las armaduras son externamente isostáticas cuando el número de ligaduras exteriores no sobrepasa al necesario para mantener una posición de equilibrio.
6. Las armaduras son internamente isostáticas cuando están constituidas de la forma descrita en (2), con lo que el número de miembros interiores no es superior al necesario para impedir el derrumbamiento.
7. En el *método de los nudos* se aplican en cada nudo las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas. Los cálculos deben comenzar en un nudo al que concurra como mínimo una fuerza conocida y no más de dos fuerzas desconocidas, si la armadura es plana, y no más de tres fuerzas desconocidas si la armadura es espacial.
8. En el *método de las secciones* se emplea un diagrama de sólido libre de toda una sección de la armadura que contenga dos o más nudos y en general intervendrá el equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes. La ecuación del equilibrio de los momentos es particularmente valiosa cuando se sigue el método de las secciones. En general, en una armadura plana no podrán determinarse las fuerzas que actúen en una sección que corte más de tres miembros cuyas fuerzas sean desconocidas, puesto que sólo se dispone de tres ecuaciones independientes.
9. Los vectores que representan las fuerzas actuantes sobre un nudo o una sección se dibujan del mismo lado del nudo o de la sección que los miembros que transmiten las fuerzas correspondientes. Con este convenio, una tracción está representada por un vector cuya punta de flecha se aleja del nudo o sección y una compresión por un vector cuya punta de flecha apunta hacia el nudo o sección.
10. Cuando los dos miembros diagonales que aseguran un recuadro sean miembros flexibles incapaces de trabajar a compresión, sólo se tiene en cuenta el que trabaja a tracción y así el recuadro permanece isostático.
11. Cuando dos miembros con un nudo común son colineales y se añade al nudo un tercer miembro cuya dirección sea diferente, la fuerza en este tercer miembro ha de ser nula, salvo que se aplique al nudo una fuerza exterior que posea componente en la dirección del tercer nudo.

(b) Entramados y máquinas

1. Los entramados y las máquinas son estructuras que contienen uno o más miembros multifuerza. Un miembro multifuerza es aquel sobre el que actúan tres o más fuerzas, o bien dos o más fuerzas y uno o más pares.
2. Los entramados son estructuras diseñadas para soportar cargas generalmente bajo condiciones estáticas. Las máquinas son estructuras que transforman unas fuerzas y momentos de entrada en fuerzas y momentos de salida y generalmente en ellas intervienen una o más partes móviles. Algunas estructuras pueden clasificarse dentro de ambas categorías.
3. Sólo se tratan en este texto entramados y máquinas externa e internamente isostáticos.
4. Si en su conjunto un entramado o una máquina constituye una estructura rígida (que no se derrumba cuando se eliminan sus apoyos exteriores, se comienzan entonces los cálculos determinando las reacciones sobre el conjunto completo. Si en su conjunto un entramado o una máquina constituye una estructura no rígida (que se derrumba) cuando se eliminan sus apoyos exteriores, no se pueden determinar entonces las reacciones exteriores hasta que se desmiembra la estructura.
5. Las fuerzas que actúan en las conexiones interiores de entramados y máquinas se calculan desmembrando la estructura y construyendo un diagrama de sólido libre por separado para cada parte. Debe observarse *estrictamente* el principio de acción y reacción; de lo contrario se obtendrán resultados erróneos.
6. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos se aplican a los miembros según se precisa para calcular las incógnitas buscadas.

PROBLEMAS DE REPASO

4.113 Los miembros *AC* y *BD* de la armadura simple se cruzan sin tocarse. Comprobar que la armadura es internamente isostática y estable y hallar la fuerza en el miembro *AC*.
Resp. *AC* = 3,33 kN *T*

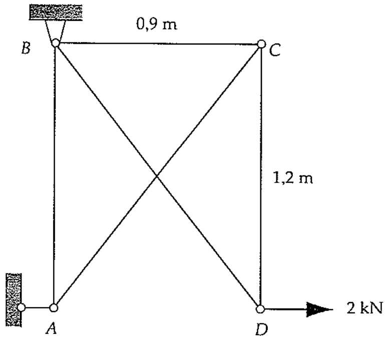


Figura problema **4.113**

4.114 En la armadura cargada con las fuerzas de 40 y 60 kN calcular las fuerzas en los miembros *BH*, *HI* y *BC*.

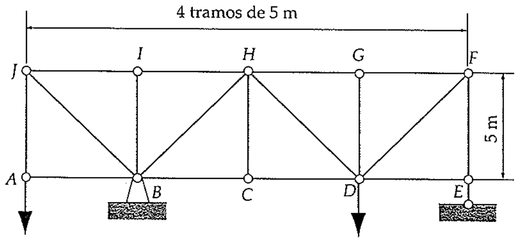


Figura problema **4.114**

4.115 Hallar la fuerza en el miembro *AC* en función de la masa *m* que soporta la armadura. Los ángulos interiores agudos son todos de 30° o 60°.
Resp. *AC* = mg/3 C

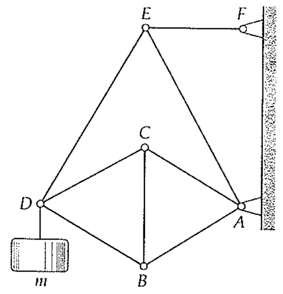


Figura problema 4.115

4.116 Sabiendo que el pasador central A soporta la mitad de la carga vertical representada, hallar la fuerza en el miembro BF.

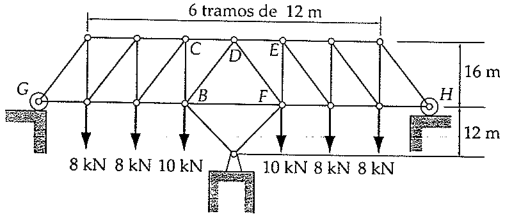


Figura problema 4.116

4.117 Empleando el diagrama de sólido libre del miembro rígido ABC, calcular la fuerza en el miembro BG.
Resp. BG = 8 kN C

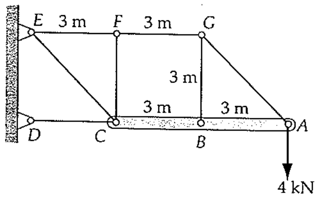


Figura problema 4.117

4.118 Calcular la fuerza en el pasador A bajo la acción de la fuerza de 500 N y el par de 300 N · m.

4.119 Hallar las fuerzas en los miembros AB, BI y CI de la armadura simple. Téngase en cuenta que los miembros curvos son todos de dos fuerzas.
Resp. AB = 2,26L T BI = L T CI = 0,458L T

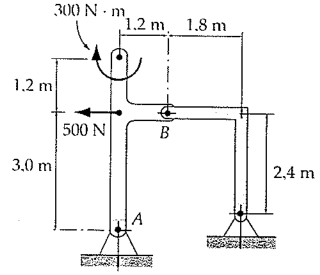


Figura problema 4.118

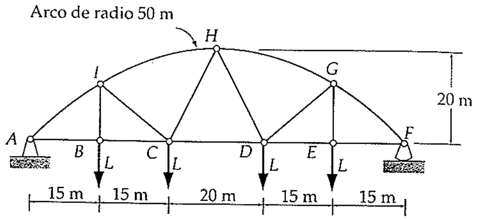


Figura problema 4.119

4.120 La estructura del problema 4.119 se modifica de modo que los cuatro miembros curvos se sustituyen por los dos miembros AIH y HGF. Los instrumentos de medida indican que los miembros CH y DH trabajan ambos a una tracción de 0,5L. Hallar la fuerza en los miembros AB, BI y CI. ¿Sería resoluble este problema sin la información acerca de CH?

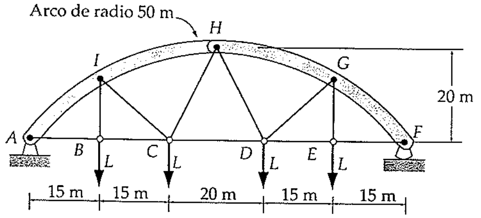


Figura problema 4.120

4.121 El tren de aterrizaje delantero se eleva aplicando un par de momento M a la barra BC mediante el árbol en B. Si el brazo y la rueda AO tienen una masa combinada de 50 kg con centro de gravedad en G, hallar el valor necesario de M para elevar la rueda cuando D esté directamente debajo de B, posición para la cual el ángulo θ vale 30°.
Resp. M = 153,3 N · m (AH)

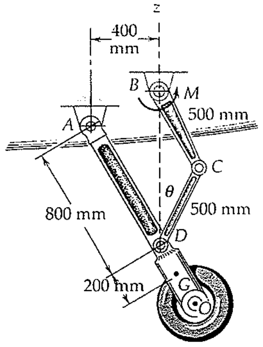


Figura problema 4.121

4.122 El cilindro neumático tiene en F un eje de oscilación y sirve para accionar la palanca AB de la mordaza de articulación rápida que inmoviliza la pieza en posición mientras la misma es mecanizada. Para un presión de aire de 400 kPa por encima de la presión atmosférica contra el émbolo de 50 mm de diámetro, hallar la fuerza de sujeción en G para la posición α = 10°. En esa posición, el vástago del émbolo es perpendicular a AB.

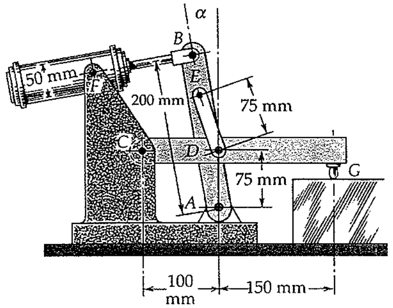


Figura problema 4.122

4.123 Se diseña una llave antimomento para ser utilizada por un tripulante de una nave espacial en la cual no dispone de ninguna plataforma estable contra la que apoyarse cuando aprieta un tornillo. El pasador A se ajusta en un orificio adyacente practicado en la estructura que contiene el tornillo que se quiere apretar. Mediante oscilaciones sucesivas de launidad engranaje-mango, el vaso gira en un sentido por acción de un mecanismo de trinquete. La reacción contra el pasador A proporciona la característica "antimomento" de la herramienta. Para una fuerza compresiva de P = 150 N, determinar el momento M transmitido al tornillo y la reacción exterior R contra el pasador A normal a la recta AB. (Un lado de la herramienta se emplea para apretar tornillos y el opuesto para aflojarlos.)

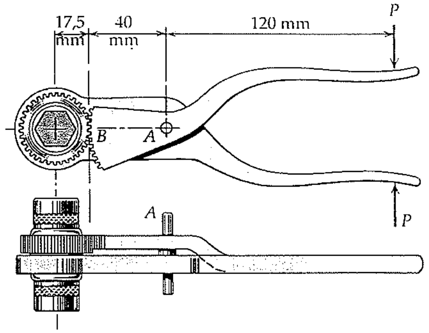


Figura problema 4.123

Resp. M = 7,88 N · m R = 137,0 N

4.124 El hombre y la bicicleta pesan juntos 900 N. Para la posición de los pedales presentada, hallar la fuerza F normal a la calzada que debe ejercerse sobre el pedal A para mantener una velocidad constante cuesta arriba. No se tendrán en cuenta los efectos del pie izquierdo del hombre y se ignorarán todos los rozamientos, salvo el existente en la superficie de contacto entre el neumático posterior y la calzada, donde no hay deslizamiento.

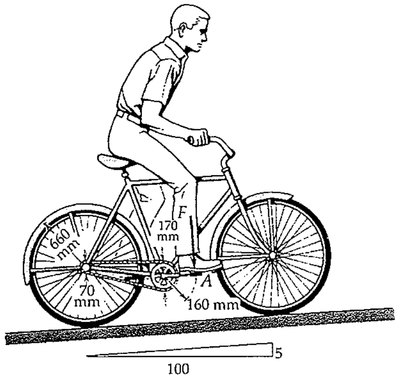


Figura problema 4.124

4.125 En la figura se representan los elementos de una destoconadora cuya masa total (salvo la del cilindro hidráulico DF y el brazo CE) es de 300 kg con centro en G. Se omite el mecanismo de articulación en torno a un eje vertical y las ruedas B giran libremente. En la posición teórica representada, el miembro CE está horizontal y los dientes de la sierra circular están a ras con el suelo. Si el módulo de la fuerza **F** ejercida por

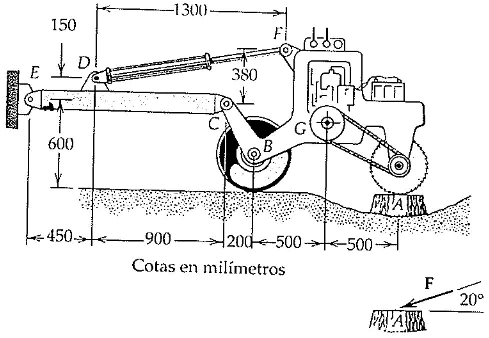


Figura problema 4.125

el disco de la sierra sobre el tocón es de 400 N, determinar la fuerza P en el cilindro hidráulico y el módulo de la fuerza que soporta el pasador C. La máquina debe tratarse como problema bidimensional.

Resp. $P = 3170$ N $C = 2750$ N

4.126 Hallar la fuerza de punción P en función de las fuerzas F aplicadas a las empuñaduras de la remachadora.

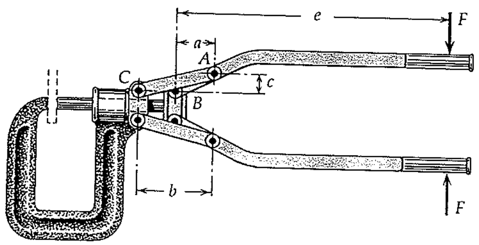


Figura problema 4.126

4.127 La pala mecánica tiene una capacidad de 4 m³ y transporta barro de densidad 2,6 Mg/m³. En la posición representada en la figura, en la cual el brazo EB está horizontal, hallar la fuerza compresiva en el vástago JL del émbolo del cilindro hidráulico y la fuerza cortante total que soporta el pasador situado en A. La máquina es simétrica respecto a un plano vertical central longitudinal y tiene dos juegos de conexiones iguales, uno de los cuales es el representado.

Resp. $L = 52{,}0$ kN $A = 247$ kN

4.128 Para soportar la carga de 2 Mg se requiere una fuerza P en el manubrio del torno. Hallar la fuerza F_A que soporta el pasador A cuando el manubrio está en la posición $\theta = 45°$.

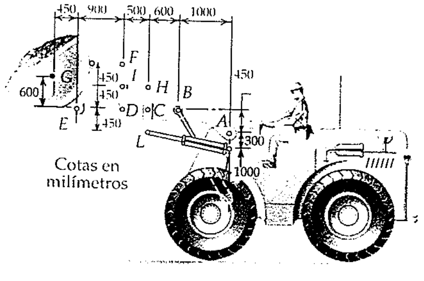


Figura problema 4.127

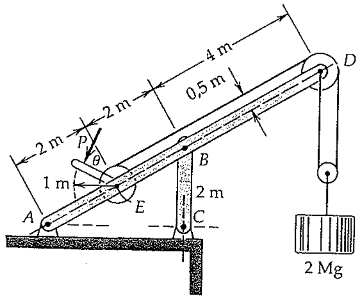


Figura problema 4.128

4.129 Cada una de las patas de aterrizaje de una astronave es una armadura espacial simétrica respecto al plano vertical x-z que se indica. Para una fuerza de aterrizaje $F = 2.2$ kN, calcular la fuerza correspondiente en el miembro BE. Es permisible la hipótesis de equilibrio estático de la armadura si su masa es muy pequeña. Supónganse cargas iguales en los miembros situados simétricamente.

Resp. $F_{BE} = 1{,}620$ kN

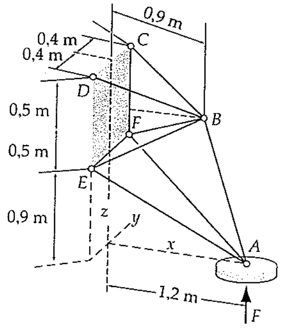


Figura problema 4.129

PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

***4.130** Para una fuerza dada P que se ejerza en el mango de la mordaza articulada la fuerza de sujeción C aumenta hasta valores muy altos a medida que el ángulo θ disminuye. Para $P = 120$ N determinar la relación entre C y θ y representarla como función de θ para $2° \leq \theta \leq 30°$. Se supondrá que el eje se desliza libremente en la guía.

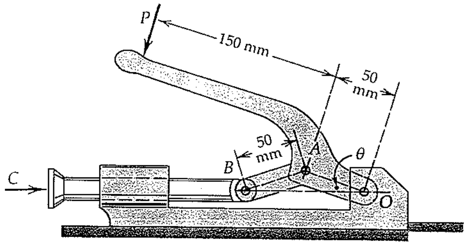


Figura problema 4.130

***4.131** El camión con la grúa montada en su plataforma se emplea en el reparto de paquetes de ladrillos. Para la posición indicada del carro C en la pluma, hallar y representar gráficamente la fuerza F en el cilindro hidráulico AB en función del ángulo de elevación θ para $0 \leq \theta \leq 75°$. Encontrar el valor máximo de F y el correspondiente ángulo θ. Se despreciará el peso de la pluma comparado con los 12 kN de la carga de ladrillos.

Resp. $F_{\max} = 103{,}3$ kN para $\theta = 39{,}8°$

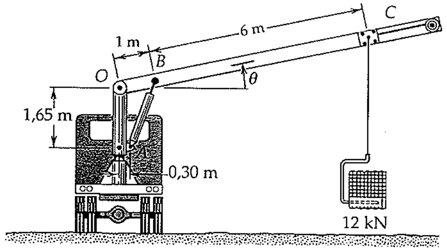


Figura problema 4.131

***4.132** Los miembros estructurales soportan la carga de 3 kN que puede estar aplicada bajo cualquier ángulo θ prácticamente desde $-90°$ hasta $+90°$. El pasador A debe ser adecuado para soportar la máxima carga que le llegue. Representar gráficamente la fuerza F_A en A en función de θ y determinar su valor máximo y el valor de θ correspondiente.

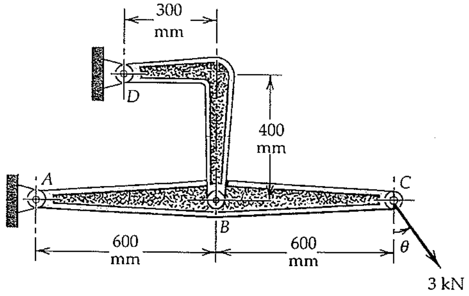


Figura problema 4.132

***4.133** Para la bomba manual del problema 4.86, que vuelve a representarse aquí, obtener una gráfica de la presión p del aceite en kilopascals en función de θ para $-20° \leq \theta \leq +15°$ y encontrar la presión mínima y el valor de θ correspondiente. La fuerza P tiene una intensidad constante de 120 N.

Resp. $P_{\min} = 248$ kPa para $\theta = -15{,}17°$

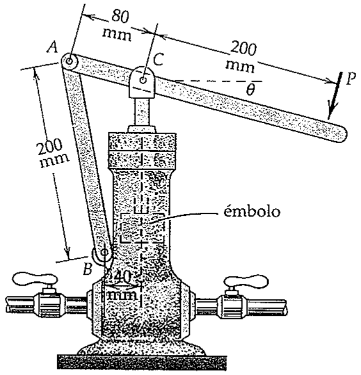


Figura problema 4.133

***4.134** El tipo de grúa naval que se representa se emplea para trabajar tanto en muelles como en el mar. Hallar y representar gráficamente la fuerza en el miembro BC en función del ángulo

θ de la pluma para 0° $\leq \theta \leq$ 80°. Despréciense los radios de todas las poleas y el peso de la pluma.

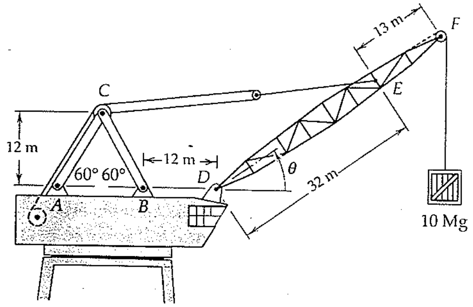


Figura problema 4.134

*4.135 Vuelve a representarse aquí, con las mandíbulas abiertas, la "contratenaza de rescate" del problema 4.76. La presión P detrás del émbolo de superficie 13 000 mm^2 se mantiene a 3.5 MPa. Calcular y representar la fuerza R en función de θ para $0° \leq \theta \leq 45°$, siendo R la fuerza vertical actuante sobre el material accidentado del modo que se muestra. Hallar el valor máximo de R y el ángulo correspondiente entre las mandíbulas. Las cotas y la geometría asociada a la posición $\theta = 0$ constan en la figura del problema 4.76. Adviértase que la biela AB y su gemela están las dos horizontales cuando $\theta = 0$, pero no permanecen horizontales al abrirse las mandíbulas.

Resp. $R_{max} = 5{,}98$ kN para $\theta = 45°$

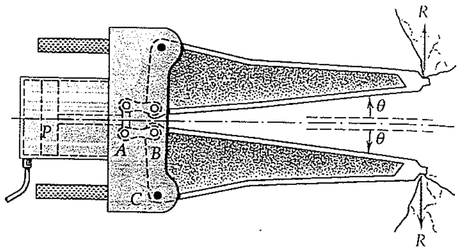
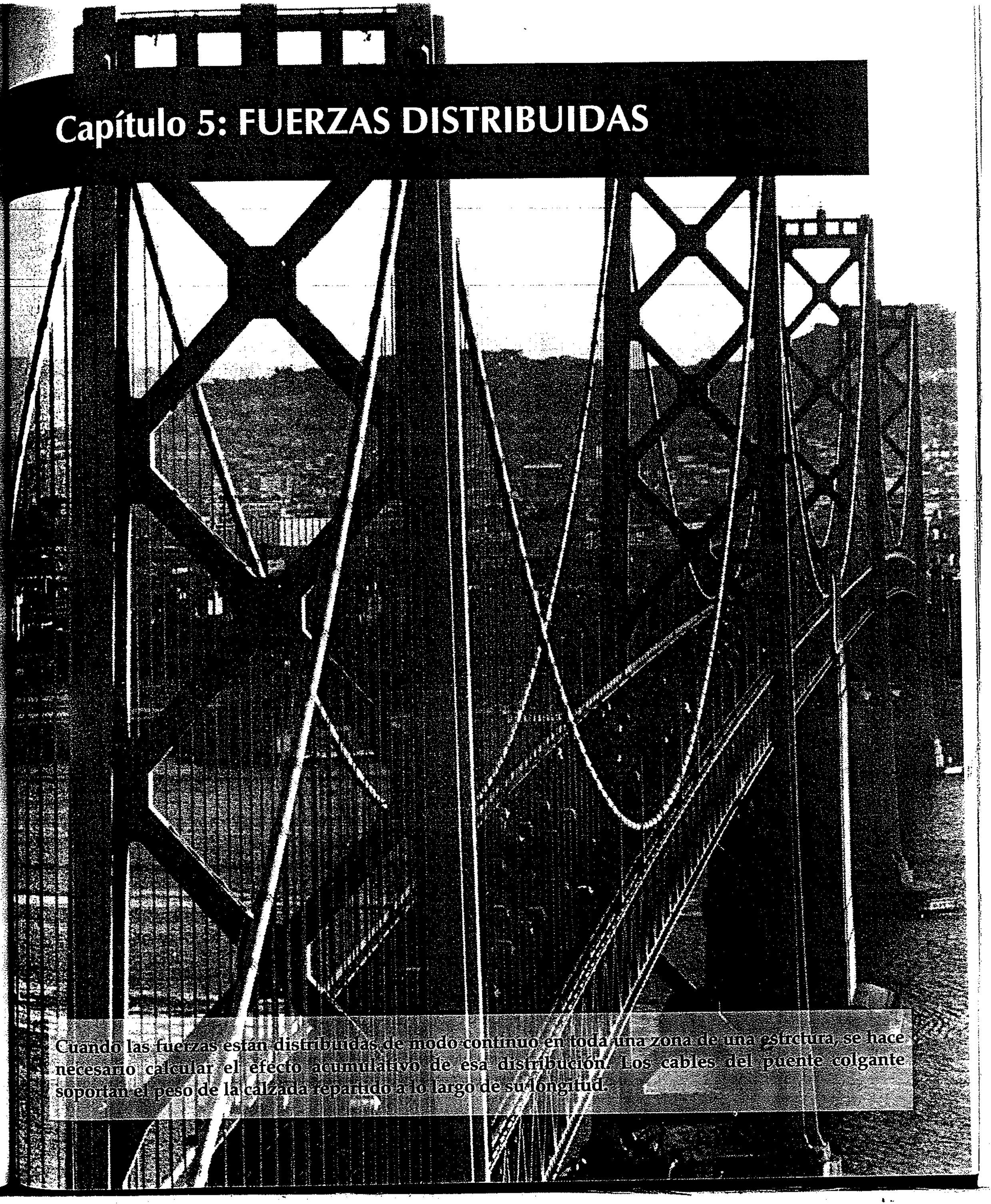


Figura problema 4.135



Capítulo 5: FUERZAS DISTRIBUIDAS

Cuando las fuerzas están distribuidas de modo continuo en toda una zona de una estructura, se hace necesario calcular el efecto acumulativo de esa distribución. Los cables del puente colgante soportan el peso de la calzada repartido a lo largo de su longitud.

5.1 INTRODUCCIÓN

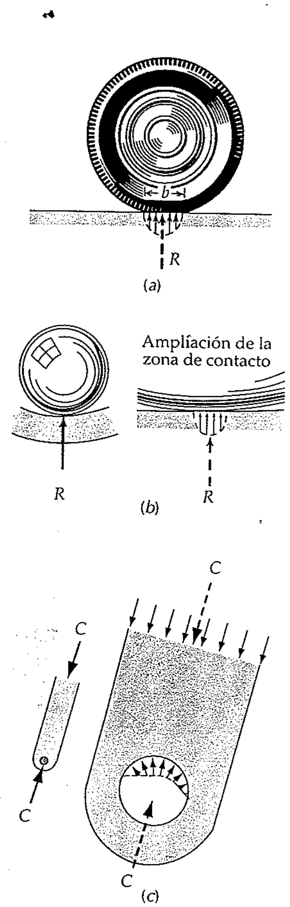


Figura 5.1

En los capítulos anteriores se han tratado las fuerzas como si estuvieran concentradas a lo largo de sus rectas soporte y en sus puntos de aplicación, y esta hipótesis nos ha proporcionado un modelo razonable de las fuerzas con las cuales hemos tratado. No obstante, en la realidad no existen fuerzas "concentradas" en sentido exacto, puesto que toda fuerza exterior aplicada mecánicamente a un cuerpo está distribuida a través de una superficie de contacto tan pequeña como se quiera, pero finita. La fuerza que la calzada ejerce sobre un neumático de automóvil, por ejemplo, se aplica a éste a través de toda la superficie de contacto (fig. 5.1*a*) y ésta puede ser apreciable si el neumático está flojo. Cuando la anchura *b* de la zona de contacto sea despreciable comparada con las otras dimensiones pertinentes, como puede ser la distancia entre ruedas, no planteará dudas la sustitución de las fuerzas reales distribuidas por su resultante *R* al estudiar las fuerzas que actúan sobre el automóvil como conjunto. Incluso la superficie de contacto entre una bola de acero templado y su pista dentro de un rodamiento de bolas cargado (fig. 5.1*b*) se aplicará a través de una superficie de contacto finita, cuyas dimensiones serán por supuesto pequeñísimas. Las fuerzas aplicadas a un miembro de dos fuerzas de una armadura (fig. 5.1*c*) se distribuyen por una superficie real de contacto del pasador contra su alojamiento e internamente a través de la sección transversal de una forma más o menos como la representada. En éstos y otros ejemplos parecidos, no dudamos en considerar las fuerzas como si estuvieran concentradas cuando analizamos sus efectos externos sobre cuerpos como un todo.

Si, por otra parte, nos interesa encontrar la distribución de las fuerzas *internas* en el material del cuerpo próximo a la zona de contacto donde los esfuerzos y las deformaciones internos pueden ser apreciables, ya no trataremos las cargas como si estuvieran concentradas, sino que habremos de tener en cuenta su distribución real. Para esta clase de problemas se necesita el conocimiento de las propiedades del material y su tratamiento pertenece al campo de la Mecánica de los Sólidos y a las Teorías de la Elasticidad y Plasticidad.

Cuando se aplican fuerzas a una región de dimensiones no despreciables con relación a otras que intervienen en el problema, se deberá tener en cuenta la manera que en la realidad cada fuerza está distribuida, sumando los efectos de la fuerza en cuestión sobre toda la región. Este proceso se lleva a cabo mediante integración matemática, a cuyo objeto es preciso conocer la intensidad de la fuerza en cada punto. Este tipo de problemas pueden pertenecer a tres categorías.

Distribución lineal. Cuando una fuerza está distribuida a lo largo de una línea, como en el caso de una carga vertical soportada por un cable (fig.5.2*a*), la intensidad *p* de la carga se expresa en términos de una fuerza por unidad de longitud, newtons por metro (N/m).

Distribución superficial. Cuando una fuerza está distribuida sobre una superficie, como ocurre con la presión del agua en la cara interna de una presa (fig. 5.2*b*), la intensidad se expresa en términos de una fuerza por unidad de superficie. En el caso de las fuerzas producidas por fluidos esta intensidad se conoce como *presión*, y como *esfuerzo* en el caso de las fuerzas distribuidas internas que actúan en el seno de los sólidos. La unidad fundamental SI para medir presiones o esfuerzos es el newton por metro cuadrado, llamado *pascal* (Pa); sin embargo, en la mayoría de los casos esta unidad resulta excesivamente pequeña, por lo que para medir presiones de fluidos se emplea corrientemente el kilopascal (kPa), o 10^3 Pa, y para medir esfuerzos el megapascal, o 10^6 Pa.

Distribución cúbica. Una fuerza distribuida a través del volumen ocupado por un cuerpo se conoce como *fuerza másica*. La fuerza másica más corriente es la atracción gravitatoria que actúa sobre todos los elementos de masa de un cuerpo. La determinación de las reacciones de los soportes de una estructura pesada en voladizo, como la representada en la figura 5.2*c*, por ejemplo, precisaría tener en cuenta como se distribuyen las fuerzas gravitatorias en el interior de las estructura. La intensidad de la fuerza gravitatoria es el *peso específico* ρg, donde ρ es la densidad (masa por unidad de volumen) y g la aceleración de la gravedad. La unidad SI de peso específico será $(\text{kg/m}^3)(\text{m/s}^2) = \text{N/m}^3$.

La fuerza másica debida a la atracción gravitatoria de la Tierra (peso) es generalmente la fuerza distribuida que con mayor frecuencia se encuentra. La sección A de este capítulo trata de la determinación de un punto que posee cada cuerpo por el que pasa la resultante de las fuerzas gravitatorias y de las propiedades geométricas asociadas de líneas, superficies y volúmenes. En la sección B se trata de los importantes problemas particulares de las fuerzas distribuidas que actúan sobre y en el interior de vigas y cables flexibles y de las ejercidas por los fluidos contra las superficies en contacto con ellos.

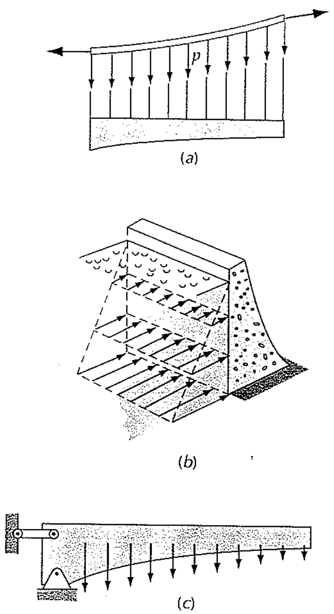


Figura 5.2

SECCIÓN A. CENTROS DE MASA Y CENTROIDES

5.2 CENTRO DE MASA

Consideremos un cuerpo tridimensional de tamaño, forma y masa *m* cualesquiera. Si se le suspende, tal como se indica en la figura 5.3, de un punto cualquiera *A* con una cuerda, se hallará en equilibrio bajo la acción de la tensión de la cuerda y la resultante de las fuerzas másicas o de gravedad que actúan sobre sus partículas. Es evidente que esa resultante tendrá como recta soporte la recta definida por la cuerda y se supondrá que puede señalarse su posición, por ejemplo, perforando en el cuerpo un orificio de tamaño despreciable a lo largo de su recta soporte. Se repite este experimento suspendiendo el cuerpo por otros puntos como el *B* y el *C*, y en todos los casos se marca la recta soporte de la resultante. Para todos los fines prácticos esas rectas soporte concurrirán en un punto al que se da el nombre de *centro de gravedad* del cuerpo. No obstante, un análisis preciso tendría en cuenta el hecho de que las direcciones de las fuerzas de gravedad correspondientes a las distintas partículas que constituyen el cuerpo son ligeramente diferentes a causa del hecho de que convergen hacia el centro de atracción de la Tierra. Además, como las partículas se hallan a distintas distancias de la Tierra, la intensidad del campo de fuerzas de la Tierra no se mantiene exactamente constante en todos los puntos del cuerpo. Estas consideraciones llevan a la conclusión de que las rectas soporte de las resultantes de la fuerza de gravedad, en los experimentos antes mencionados, no serán exactamente concurrentes y por ello no existirá, en el sentido exacto, un centro de gravedad. Esta condición carece de importancia práctica mientras tratemos con cuerpos de dimensiones pequeñas frente a las de la Tierra. Por tanto, supondremos un campo uniforme de fuerzas paralelas debido a

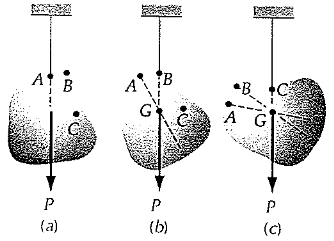
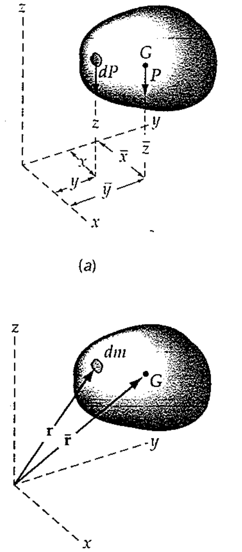


Figura 5.3

la atracción gravitatoria terrestre y esta condición da como resultado el concepto de un centro de gravedad único.

Para determinar matemáticamente la ubicación del centro de gravedad de un cuerpo (fig. 5.4*a*), aplicamos el *principio de los momentos* (apdo. 2.6) al sistema de fuerzas paralelas gravitatorias al objeto de situar su resultante. El momento de la fuerza gravitatoria resultante *P* respecto a cualquier eje es igual a la suma de los momentos respecto al mismo eje de las fuerzas gravitatorias *dP* que actúan en todas las partículas consideradas como elementos infinitesimales del cuerpo. La resultante de las fuerzas gravitatorias que actúan en todos los elementos es el peso *P* del cuerpo y que es la suma $P = \int dP$. Si aplicamos el principio de los momentos respecto al eje *y*, por ejemplo, el momento respecto a este eje del peso elemental es $x dP$, y la suma de esos momentos para todos los elementos del cuerpo es $\int x dP$. Esta suma debe ser igual a $P\,\bar{x}$, el momento de la suma. Por tanto, $\bar{x}\,P = \int x dP$. Empleando expresiones similares para las otras dos componentes, las coordenadas del centro de gravedad *G* podemos expresarlas como

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dP}{P} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dP}{P} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dP}{P} \qquad (5.1a)$$



(*a*)

(*b*)

Figura 5.4

Para imaginar los momentos de las fuerzas gravitatorias que generan la tercera de estas ecuaciones, puede reorientarse el cuerpo y los ejes solidariamente con él, de tal modo que el eje *z* quede horizontal. Es importante tener siempre presente que los numeradores de estas expresiones representan cada uno la *suma de los momentos*, mientras que el producto de *P* por la coordenada correspondiente de *G* representa el *momento de la suma*. Estas expresiones se aplican repetidamente en toda la Mecánica.

Sustituyendo $P = mg$ y $dP = g\,dm$, las expresiones de las coordenadas del centro de gravedad quedan

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{m} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{m} \qquad (5.1b)$$

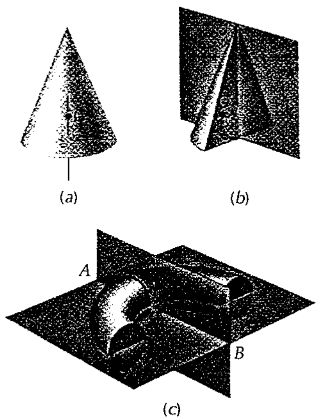
Las ecuaciones 5.1 pueden expresarse en forma vectorial con ayuda de la figura 5.4, donde la masa elemental y la posición de *G* están localizadas por sus vectores de posición respectivos $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$. Así, las ecuaciones 5.1 son las componentes de la ecuación vectorial única

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r}\,dm}{m} \qquad (5.2)$$

La densidad ρ de un cuerpo es su masa por unidad de volumen. Así pues, la masa de un elemento diferencial de volumen *dV* será $dm = \rho dV$. En el caso de que ρ no sea constante en todo el cuerpo pero pueda expresarse como función de las coordenadas de sus puntos, será necesario tener en cuenta dicha variación en el cálculo de los numeradores y denominadores de las ecuaciones 5.1*b*. Estas expresiones se escribirán entonces en la forma

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad (5.3)$$

En las ecuaciones 5.1*b*, 5.2 y 5.3 no hay referencia alguna a efectos gravitatorios, pues en ellas no aparece *g*. Por tanto, tales expresiones definen un punto único del cuerpo cuya posición depende exclusivamente de cómo está distribuida la masa. Ese punto recibe el nombre de *centro de masa* y, evidentemente, coincide con el centro de gravedad, en tanto que el campo gravitatorio pueda considerarse uniforme y paralelo. Carece de sentido hablar de centro de gravedad de un cuerpo que esté fuera del campo gravitatorio terrestre, pues sobre él no actúan fuerzas de gravedad. En cambio, seguiría teniendo su centro de masa único. De aquí en adelante, en la mayor parte de las veces nos referiremos al centro de masa más que al centro de gravedad. Asimismo, el centro de masa posee una importancia particular en el cálculo de la respuesta dinámica de un cuerpo a un sistema de fuerzas no nulo. Esta clase de problemas se estudia largamente en el tomo 2 (*Dinámica*).



(*a*) (*b*)

(*c*)

Figura 5.5

En la mayoría de los problemas se podrá simplificar el cálculo de la posición del centro de masa eligiendo de modo inteligente los ejes de referencia. En general los ejes deben situarse de manera que simplifiquen las ecuaciones de los contornos. Así, para los cuerpos de contorno circular resultarán muy útiles las coordenadas polares. Las consideraciones acerca de la simetría puede que proporcionen indicaciones importantes. Siempre que un cuerpo posea una recta o un plano de simetría, con esa recta o plano debe hacerse coincidir un eje o un plano coordenado. En esa recta o plano se encontrará siempre el centro de masa, puesto que siempre se anularán entre si los momentos debidos a elementos situados simétricamente y el cuerpo puede considerarse compuesto de parejas de tales elementos. Así, el centro de masa *G* del cono circular homogéneo de la figura 5.5*a* se encontrará en algún punto de su eje de revolución, que también lo es de simetría. El centro de masa del semicono circular de la figura 5.5*b* estará en su plano de simetría. El centro de masa del medio anillo de la figura 5.5*c* debe hallarse a la vez en ambos planos de simetría y, por tanto, estará en la recta *AB*. La observación de las simetrías, cuando existen, facilita siempre la determinación de la posición de *G*.

5.3 CENTROIDES DE LÍNEAS, SUPERFICIES Y VOLÚMENES

Siempre que la densidad ρ de un cuerpo tenga el mismo valor en todos los puntos, la misma figurará como factor constante en los numeradores y denominadores de las ecuaciones 5.3 y, por tanto, desaparecerá. Las expresiones definen entonces una propiedad del cuerpo puramente geométrica, sin referencia alguna a sus propiedades físicas. Cuando el cálculo se refiera únicamente a una forma geométrica se utilizará el término *centroide*. Cuando se hable de un cuerpo físico real, hablaremos de *centro de masa*. Si la densidad es la misma en todos los puntos, las posiciones del centroide y del centro de masa coinciden, mientras que si la densidad varía de unos puntos a otros, aquellos no coincidirán, en general.

Los cálculos relacionados con los centroides caen dentro de tres categorías claramente definidas según que la forma del cuerpo en cuestión pueda ser representada por una línea, una superficie o un volumen.

(a) Líneas. En el caso de una varilla delgada o un alambre de longitud *L*, sección recta de área *A* y densidad ρ (fig. 5.6), el cuerpo puede aproximarse a un segmento de línea y $dm = \rho A\,dL$. Si ρ y *A* son constantes a lo largo de la varilla,

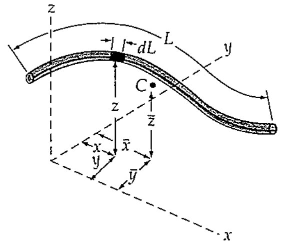


Figura 5.6

las coordenadas del centro de masa coincidirán con las del centroide C del segmento de línea, las cuales, según las expresiones 5.1, podrán escribirse

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dL}{L} \tag{5.4}$$

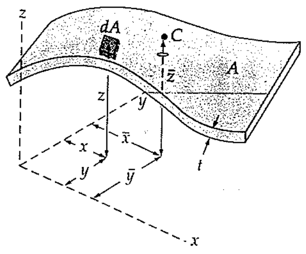


Figura 5.7

Obsérvese que, en general, el centroide no será un punto de la línea. Si la varilla se encuentra en un solo plano, que podemos considerar como plano x-y, sólo se precisará de dos coordenadas en el cálculo.

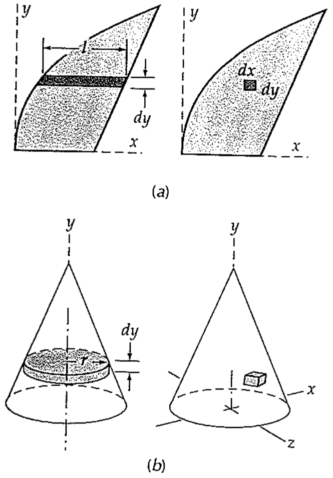
(b) Superficies. Cuando un cuerpo de densidad ρ tiene un espesor t pequeño pero uniforme, puede asimilarse a una superficie de área A (fig. 5.7). La masa de un elemento será $dm = \rho t\,dA$. Aquí también, si ρ y t son constantes en toda la superficie, las coordenadas del centro de masa del cuerpo son asimismo las del centroide C de la superficie y, según las expresiones 5.1*b*, esas coordenadas pueden escribirse

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dA}{A} \tag{5.5}$$

En la ecuación 5.5 los numeradores reciben el nombre de *momentos estáticos de primer orden*. Si la superficie es curva, como la del fragmento de cáscara de la figura 5.7, intervendrán las tres coordenadas. En general, el centroide C tampoco será un punto de ella. Si la superficie es plana, contenida, por ejemplo, en el plano x-y, las incógnitas serán sólo las coordenadas de C en ese plano.

(c) Volúmenes. Para un cuerpo cualquiera de volumen V y densidad ρ, el elemento tiene una masa $dm = \rho\,dV$. Si la densidad ρ es constante en todo el volumen desaparece y las coordenadas del centro de masa lo son también del centroide C del cuerpo. Estas, según 5.3 o 5.1*b*, resultan

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dV}{V} \tag{5.6}$$



(a)

(b)

Figura 5.8

(d) Elección de elementos infinitesimales para la integración. Suele ser el caso de que la mayor dificultad de una teoría no reside en sus conceptos sino en los procedimientos para aplicarla. Con relación a centros de masa y centroides, el concepto del principio de los momentos es bastante sencillo; las dificultades se encuentran básicamente en la elección del elemento diferencial y en el planteo de las integrales. Hay cinco pautas que requieren especial atención.

(1) Orden del elemento. Siempre que sea posible se tomará un elemento diferencial de primer orden preferiblemente a otros elementos de mayor orden, de forma que sólo sea necesaria una integración para cubrir la figura completa. Así, en la figura 5.8*a*, con una franja horizontal de superficie de primer orden $dA = l\,dy$ se necesitará únicamente una integración respecto a y para cubrir toda la figura, mientras que con el elemento de segundo orden $dx\,dy$ se necesitarán dos integraciones para cubrir la figura, una primera respecto a x y a continuación otra respecto a y. Como ejemplo adicional tenemos el cono macizo de la figura 5.8*b*, en el que es mejor tomar un elemento de primer orden en forma de rebanada circular de volumen $dV = \pi r^2\,dy$, que hace necesaria sólo una integración, a un elemento de tercer orden $dx\,dy\,dz$ con el que deberían realizarse tres engorrosas integraciones.

(2) Continuidad. Siempre que sea posible se elegirá un elemento que permita que la integración sobre la figura pueda realizarse en una sola operación sin discontinuidades. Así, la franja horizontal de la figura 5.8*a* es preferible a la franja vertical de la figura 5.9 que, si se emplea, haría necesarias dos integraciones a causa de la discontinuidad que aparecería en la expresión de la altura de la franja en $x = x_1$.

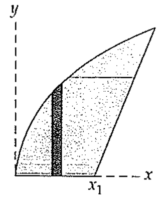


Figura 5.9

(3) Descartar los términos de orden superior. Los términos de mayor orden pueden omitirse siempre en comparación con los de menor orden (véase apdo. 1.7). Así, la superficie de la franja vertical de anchura infinitesimal de la figura 5.10 viene dada por $dA = y\,dx$ y se descarta la superficie triangular de segundo orden $\frac{1}{2}\,dx\,dy$. Por supuesto, en el límite desaparece el error.

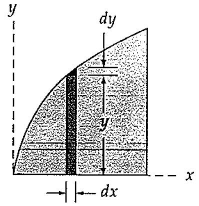
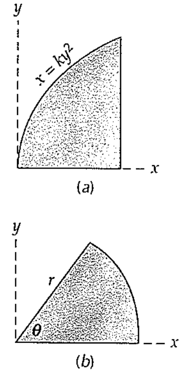


Figura 5.10

(4) Elección de las coordenadas. Como regla general debe elegirse el sistema de coordenadas que mejor se adapte al contorno de la figura. Así, las coordenadas cartesianas son las que describen con mayor facilidad el contorno de la superficie representada en la figura 5.11*a*, mientras que el contorno del sector circular de la figura 5.11*b* se adapta mejor a las coordenadas polares.

(5) Centroide de cada elemento. Cuando se adopte un elemento diferencial de primero o de segundo orden, es fundamental utilizar la *coordenada del centroide del elemento* como brazo de momento al escribir el momento de cada elemento diferencial. Así, el momento de la superficie elemental dA de la franja horizontal de la figura 5.12*a* respecto al eje y es $x_c\,dA$, donde x_c es la coordenada x del centroide C del elemento. Obsérvese que x_c no es una coordenada que describa los contornos del elemento. En el caso de este elemento, el brazo de momento del centroide y_c en la dirección y coincide en el límite con las coordenadas y de los contornos.

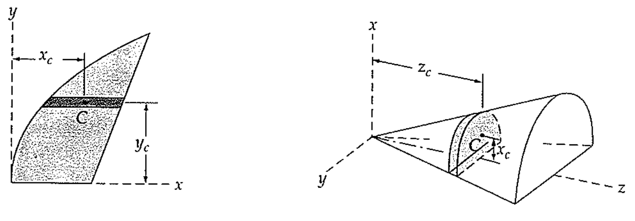
Consideremos, como segundo ejemplo, el semicono macizo de la figura 5.12*b* en el que se toma como elemento de volumen la rebanada semicircular de espesor diferencial indicada. En la dirección x, el brazo de momento del elemento es la distancia x_c al centro de la superficie del elemento y no la coordenada x del contorno del elemento. Por otra parte, en la dirección z el brazo de momento del centroide del elemento z_c coincide con la coordenada z del elemento.



(a)

(b)

Figura 5.11



(a)

(b)

Figura 5.12

A la vista de estos ejemplos, las expresiones 5.5 y 5.6 las escribimos de nuevo como sigue

$$\bar{x} = \frac{\int x_c \, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_c \, dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z_c \, dA}{A} \tag{5.5a}$$

y

$$\bar{x} = \frac{\int x_c \, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_c \, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z_c \, dV}{V} \tag{5.6a}$$

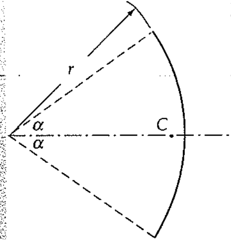
Es *esencial* entender que el subíndice *c* sirve para recordarnos que los brazos del momento que figuran en los numeradores de las expresiones integrales de los momentos son *siempre* las coordenadas de los *centroides* de los elementos que en cada caso se hayan elegido.

En este punto, será muy conveniente que el lector se asegure de que entiende claramente el principio de los momentos introducido en el apartado 2.4. Es fundamental que su significado físico se reconozca en su aplicación al sistema de fuerzas paralelas de la figura 5.4*a*. Entendiendo claramente la equivalencia entre el momento de la fuerza resultante (peso) P y la suma (integral) de los momentos de los pesos elementales dP, será mucho más improbable que se cometan errores en los planteos matemáticos. Conociendo bien el principio de los momentos nos aseguraremos plenamente de que empleamos la expresión correcta del brazo de momento x_c, y_c o z_c del centroide del elemento diferencial que hayamos tomado. Además, teniendo presente la imagen física del principio de los momentos, las ecuaciones 5.4, 5.5 y 5.6, que son relaciones geométricas, se reconocerán también como representativas de cuerpos materiales homogéneos y en las que la densidad ρ ha desaparecido. Si la densidad del cuerpo en cuestión no es constante sino que varía de un punto a otro del cuerpo en función de las coordenadas, ya no desaparecerá en los numeradores y denominadores de las expresiones del centro de masa. En tales casos, tendremos que emplear las expresiones 5.3 tal como expusimos antes.

Los problemas tipo 5.1 a 5.5 que siguen se eligieron cuidadosamente para ilustrar la aplicación de las expresiones 5.4, 5.5 y 5.6 a la determinación de la posición del centroide de segmentos de línea (varillas delgadas), superficies (placas delgadas) y volúmenes (cuerpos macizos homogéneos). En estos cinco problemas tipo se ilustran detalladamente las cinco consideraciones que se hicieron en el punto *(d)*. Estas consideraciones son esenciales para plantear las integrales definidas, no sólo para calcular centroides sino para otros problemas donde intervengan integraciones. Por esta causa, los problemas tipo deben dominarse a fondo.

En la sección C.10 del apéndice C se presenta una tabla de integrales entre las que se encuentran las necesarias en éste y en los capítulos que siguen. En las tablas D.3 y D.4 del apéndice D se resumen las coordenadas centroidales de las figuras geométricas más corrientes.

PROBLEMA TIPO 5.1



Centroide de un arco de circunferencia. Localizar el centroide de un arco de circunferencia como el representado.

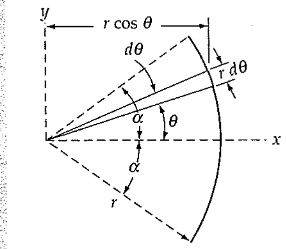
Solución. Tomando como eje x el eje de simetría del arco será $\bar{y} = 0$. Un elemento diferencial de arco tiene la longitud $dL = r\,d\theta$, expresada en coordenadas polares, y la coordenada x del elemento es $r \cos \theta$. ①

Aplicando la primera de las expresiones 5.4 y sustituyendo $L = 2\alpha r$ resulta

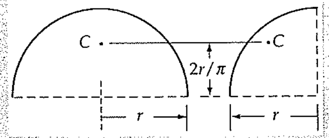
$$\left[L\bar{x} = \int x_c \; dL\right] \qquad (2\alpha r)\bar{x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \alpha) r \; d\theta$$

$$2\alpha r\bar{x} = 2r^2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \qquad \textit{Resp.}$$

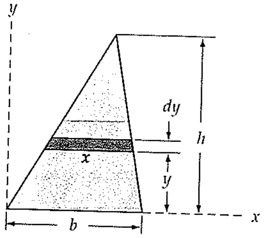


Para un arco semicircular es $2\alpha = \pi$, que da $\bar{x} = 2r/\pi$. Por simetría vemos inmediatamente que este resultado es también válido para el arco cuartocircular si se toman las coordenadas tal como se indica.



①Debe quedar perfectamente claro que las coordenadas polares son preferibles a las cartesianas para expresar la longitud de arco de circunferencia.

PROBLEMA TIPO 5.2



Centroide de una superficie triangular. Determinar la distancia $\bar{h}$ entre el centroide de un triángulo de altura h y la base del mismo.

Solución. El eje x se coloca coincidente con la base. Se toma una franja diferencial de área $dA = x\,dy$. Por semejanza de triángulos, $x/(h-y) = b/h$. Aplicando la segunda de las ecuaciones 5.5*a* resulta ①

$$[A\bar{y} = \int y_c dA] \qquad \frac{bh}{2}\bar{y} = \int_0^h y\frac{b(h-y)}{h}dy = \frac{bh^2}{6}$$

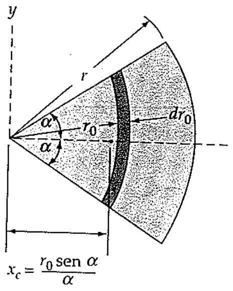
y

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \qquad \textit{Resp.}$$

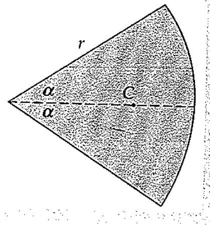
Para los otros dos lados del triángulo tomados como base y con las nuevas alturas correspondientes se obtendrá el mismo resultado. Podemos decir, así, que el centroide se encuentra en la intersección de las medianas, ya que la distancia de este punto a cada uno de los lados es igual a un tercio de la altura del triángulo en el que se considere cada lado como base.

① Empleando el elemento diferencial de primer orden, eliminamos una integración. El elemento dA debe expresarse en función de la variable de integración y; por ello, se necesita $x = f(y)$.

PROBLEMA TIPO 5.3



Solución I



Centroide de la superficie de un sector circular. *Localizar el centroide de la superficie de un sector circular.*

Solución I. Se hace coincidir el eje x con el de simetría y entonces es $\bar{y} = 0$ automáticamente. La superficie puede barrerse desplazando un elemento en forma de segmento de corona circular desde el centro hasta el arco que limita el sector. El radio de la corona es r_0 y su anchura dr_0, por lo que su superficie será $dA = 2r_0\,\alpha\,dr_0$. ①

① Obsérvese atentamente la distinción entre la variable r_0 y el valor constante r.

② Según el problema tipo 5.1 la coordenada x del centroide del elemento es $x_c = r_0 \operatorname{sen} \alpha/\alpha$, donde r_0 sustituye a r. Así, la primera de las ecuaciones 5.5*a* da

$$[A\bar{x} = \int x_c\,dA] \qquad \frac{2\alpha}{2\pi}(\pi r^2)\bar{x} = \int_0^r\left(\frac{r_0 \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\right)(2r_0\alpha\,dr_0)$$

$$r^2\alpha\bar{x} = \tfrac{2}{3}r^3 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \qquad \textit{Resp.}$$

Solución II. La superficie puede también ser barrida con un triángulo de área diferencial con vértice en el centro del círculo, que gire barriendo el ángulo total del sector. Este triángulo, que se ilustra en la figura, tiene una área $dA = (r/2)(r\,d\theta)$, donde se desprecian los términos de orden superior. De nuevo se toma como coordenada x la del centroide del elemento y, según el problema tipo 5.2, esta coordenada es $x_c = \frac{2}{3}r \cos \theta$. Aplicando la primera de las ecuaciones 5.5*a* se tiene

$$[A\bar{x} = \int x_c\,dA] \qquad (r^2\alpha)\bar{x} = \int_{-\alpha}^{\alpha}(\tfrac{2}{3}r \cos \theta)(\tfrac{1}{2}r^2\,d\theta)$$

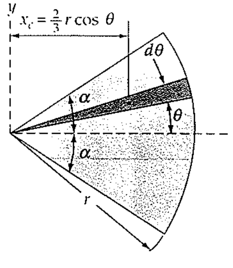
$$r^2\alpha\bar{x} = \tfrac{2}{3}r^3 \operatorname{sen} \alpha$$

y como antes

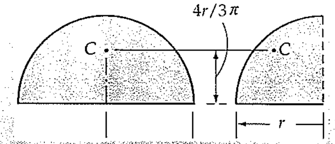
$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \qquad \textit{Resp.}$$

Para un sector semicircular es $2\alpha = \pi$, que nos da $\bar{x} = 4r/3\pi$. Por simetría, vemos inmediatamente que este resultado es también válido para el sector cuartocircular, si se toman las coordenadas tal como se indica.

Obsérvese que si se toma un elemento de segundo orden $r_0\,dr_0\,d\theta$, la integración respecto a θ daría la corona circular con la que se inició la solución I. Por otra parte, la integración respecto a r_0 inicialmente daría el elemento triangular con el que se inició la solución II.

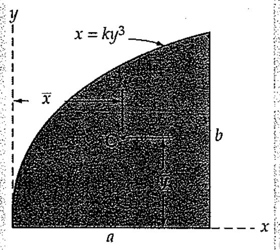


Solución II



② Téngase cuidado en no emplear ro como coordenada centroidal del elemento.

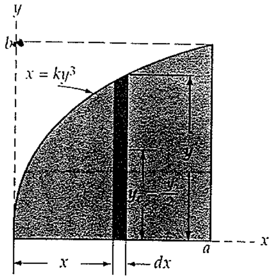
PROBLEMA TIPO 5.4



Localizar el centroide de la superficie situada bajo la curva $x = ky^3$ entre $x = 0$ y $x = a$.

Solución I. Tal como se muestra en la figura, tomamos un elemento vertical de área $dA = y\,dx$. La coordenada x del centroide la obtenemos mediante la primera de las expresiones 5.5*a*. Así

① $$[A\bar{x} = \int x_c dA] \qquad \bar{x}\int_0^a y\,dx = \int_0^a xy\,dx$$



Solución I

Sustituyendo $y = (x/k)^{1/3}$ y $k = a/b^3$ e integrando resulta

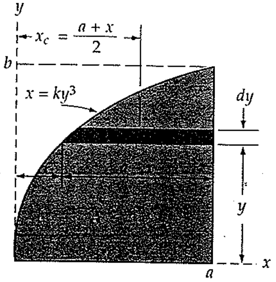
$$\frac{3ab}{4}\bar{x} = \frac{3a^2b}{7} \qquad \bar{x} = \tfrac{4}{7}a \qquad \textit{Resp.}$$

Al resolver y por la segunda de las ecuaciones 5.5*a*, la coordenada del centroide del elemento rectangular es $y_c = y/2$, donde y es la altura de la franja en la ecuación de la curva $x = ky^3$. Entonces, el principio de los momentos se escribirá

$$[Ay = \int y_c\, dA] \qquad \frac{3ab}{4}\bar{y} = \int_0^a \left(\frac{y}{2}\right) y\, dx$$

Con la sustitución $y = b(x/a)^{1/3}$ e integrando resulta

$$\frac{3ab}{4}\bar{y} = \frac{3ab^2}{10} \qquad \bar{y} = \tfrac{2}{5}b \qquad \textit{Resp.}$$



Solución II

① **Obsérvese que $x_c = x$ cuando se toma un elemento vertical.**

Solución II. En vez del elemento vertical, podemos emplear el elemento horizontal que se muestra en la ilustración inferior. Se ve que la coordenada x de este elemento es $x_c = x + \frac{1}{2}(a - x) = (a + x)/2$ que no es sino el valor medio de las coordenadas a y x de sus extremos. Por tanto,

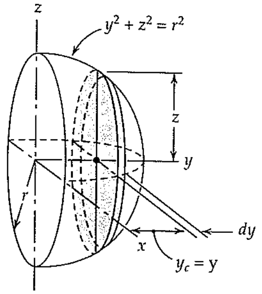
$$[A\bar{x} = \int x_c\, dA] \qquad \bar{x}\int_0^b (a-x)dy = \int_0^b \left(\frac{a+x}{2}\right)(a-x)\, dy$$

El valor de $\bar{y}$ se obtiene de

$$[A\bar{y} = \int y_c\, dA] \qquad \bar{y}\int_0^b (a-x)dy = \int_0^b y(a-x)\, dy$$

donde $y_c = y$ para la franja horizontal. El cálculo de estas integrales confirmará los resultados obtenidos antes para $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

PROBLEMA TIPO 5.5



Solución I

Volumen hemisférico. *Localizar el centroide de un hemisferio de radio r con respecto a su base.*

Solución I. Tomando los ejes de referencia tal como se indica en la figura, por simetría es $\bar{x} = \bar{z} = 0$. El elemento de volumen más sencillo es una rebanada cilíndrica de altura dy paralela al plano x-z. Como la semiesfera corta al plano y-z según el círculo $y^2 + z^2 = r^2$, el radio de la rebanada será $z = +\sqrt{r^2 - y^2}$. Por tanto, el volumen de esa rebanada elemental será

①

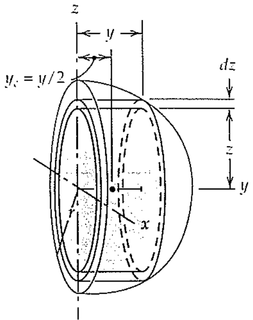
$$dV = \pi(r^2 - y^2)\, dy$$

La segunda de las expresiones 5.6*a* requiere

$$[V\bar{y} = \int y_c\, dV] \qquad \bar{y}\int_0^r \pi(r^2 - y^2)\, dy = \int_0^r y\pi(r^2 - y^2)\, dy$$

donde $y_c = y$. Integrando resulta

$$\tfrac{2}{3}\pi r^3 \bar{y} = \tfrac{1}{4}\pi r^4 \qquad \bar{y} = \tfrac{3}{8}r \qquad \textit{Resp.}$$



Solución II

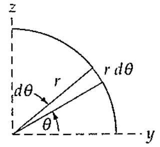
① ***Solucion II.*** Otra posibilidad sería tomar como elemento diferencial una cáscara cilíndrica de altura y, radio z y espesor dz, tal como se muestra en la ilustración inferior. La integración cubriría todo el volumen haciendo variar el radio desde cero a r. Por simetría, el centro de la cáscara elemental se encuentra en el centro, por lo que $y_c = y/2$. El volumen del elemento es $dV = (2\pi z\, dz)(y)$. Utilizando la ecuación de la circunferencia para expresar y en función de z se obtiene $y = +\sqrt{r^2 - z^2}$. Aplicando en la segunda de las expresiones 5.6*a* el valor de $\frac{2}{3}\pi r^3$ calculado en la solución I para el volumen del hemisferio, resulta

$$[V\bar{y} = \int y_c\, dV] \qquad (\tfrac{2}{3}\pi r^3)\bar{y} = \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{2}(2\pi z\sqrt{r^2 - z^2})\, dz$$

$$= \int_0^r \pi(r^2 z - z^3)\, dz = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\bar{y} = \tfrac{3}{8}r \qquad \textit{Resp.}$$

Las soluciones I y II son de utilidad similar, pues en ambas intervienen elementos de formas sencillas y sólo hace falta integrar una vez respecto a una única variable.



Solución III

Solución III. Otro procedimiento consistiría en emplear el ángulo θ como variable entre 0 y $\pi/2$. El radio del elemento, en ambos casos, sería r senθ, mientras que el espesor de la rebanada en la solución I sería $dy = (r\, d\theta)$ sen θ y el de la cáscara en la solución II sería $dz = (r\, d\theta)\cos\theta$. La altura de la cáscara sería $y = r\cos\theta$.

① **¿Puede identificarse el elemento diferencial de orden superior que se omite en la definición de *dV*?**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.1 Colocar la punta del lápiz en el punto de la superficie triangular que a ojo se estime más próximo al centroide. Contrastar la posición horizontal del punto estimado con los resultados del problema tipo 5.2

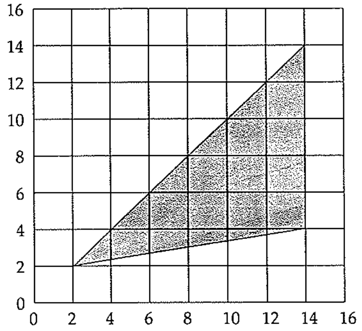


Figura problema 5.1

5.2 La placa cuartocircular uniforme cuelga del pequeño cojinete A y puede oscilar sin trabas en el plano vertical. Calcu-

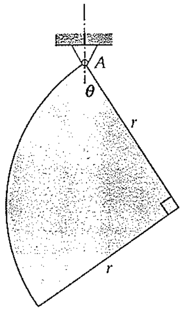


Figura problema 5.2

lar el ángulo que forma su borde superior con la vertical en la posición de equilibrio.

5.3 Especificar las coordenadas x y z del centro de masa de la cáscara semicilíndrica.

Resp. $\bar{x}$ = 120 mm $\bar{z}$ = 43,6

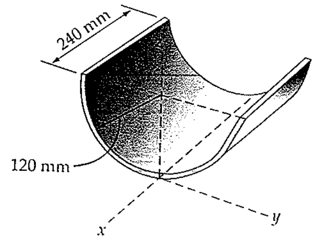

240 mm
120 mm
x
y

Figura problema 5.3

5.4 Especificar las coordenadas x, y y z del centro de masa del cuadrante de cilindro macizo homogéneo.

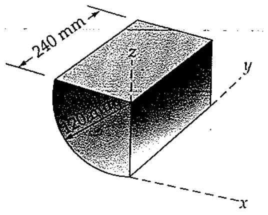

240 mm
120 mm
z
y
x

Figura problema 5.4

5.5 Hallar las coordenadas x e y del centroide C de la superficie trapezoidal.

Resp. $\bar{x} = 7a/9$ $\bar{y} = 4b/9$

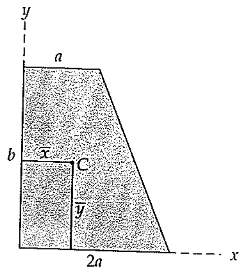

y
a
b
$\bar{x}$
C
$\bar{y}$
2a
x

Figura problema 5.5

5.6 Hallar las coordenadas del centroide de la superficie sombreada.

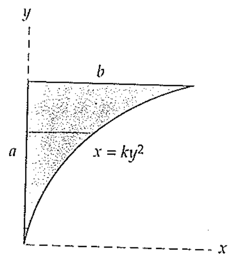


Figura problema 5.6

5.7 Hallar las coordenadas del centroide de la superficie sombreada.

Resp. $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = 4b/7$

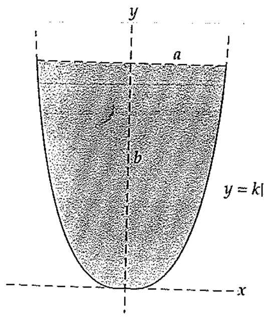


Figura problema 5.7

5.8 La barra delgada hecha de un material experimental cuya densidad varía con la posición de acuerdo con $\rho = \rho_0 e^{-ax}$. Localizar su centro de masa y particularizar el resultado para $a = 1/L$.

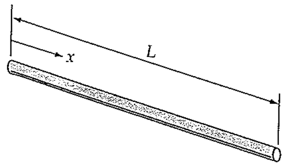


Figura problema 5.8

5.9 Hallar las coordenadas del centroide de la superficie sombreada.

Resp. $\bar{x}$ = 1,44 $\bar{y} = 0{,}36k$

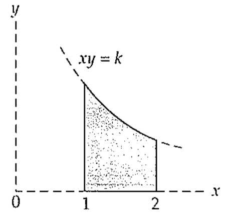


Figura problema 5.9

5.10 Determinar la distancia $\bar{z}$ desde el vértice del cono recto hasta el centroide de su volumen.

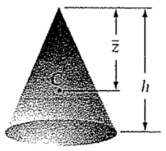


Figura problema 5.10

Problemas representativos

5.11 Hallar, por integración directa, las coordenadas del centroide de la superficie trapezoidal.

Resp. $\bar{x}$ = 2,35 $\bar{y}$ = 3,56

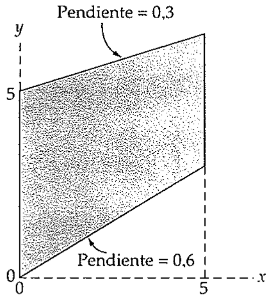

Pendiente = 0,3
y
5
Pendiente = 0,6
0
0
5
x

Figura problema 5.11

5.12 Hallar, por integración directa, la coordenada x del centroide de la superficie sombreada.

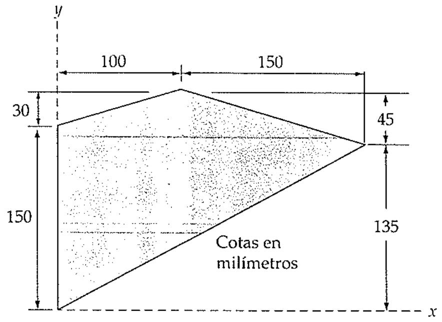

y
100
150
30
45
150
135
Cotas en milímetros
x

Figura problema 5.12

5.13 Localizar el centroide de la superficie sombreada de la figura.

Resp. $\bar{x}$ =1,797 $\bar{y}$ = 2,34

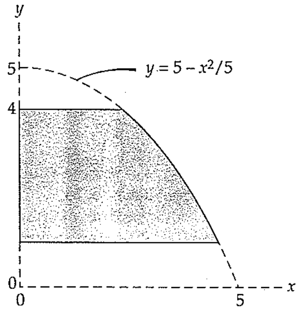

y
5
$y = 5 - x^2/5$
4
0
0
5
x

Figura problema 5.13

5.14 Localizar el centroide de la superficie sombreada.

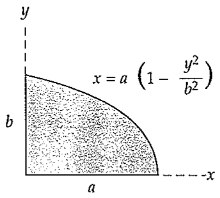

y
$x = a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$
b
a
x

Figura problema 5.14

5.15 Hallar las coordenadas del centroide de la superficie sombreada.

Resp. $\bar{x} = 2a/\pi$ $\quad\bar{y} = \pi b/8$

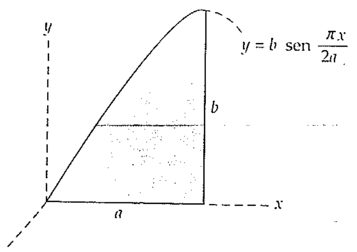


Figura problema 5.15

5.16 Empleando los ejes que se muestran, hallar las coordenadas del centroide del arco de circunferencia. Confrontar los resultados con los del problema tipo 5.1.

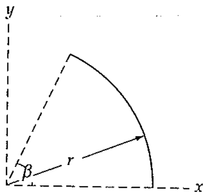


Figura problema 5.16

5.17 Empleando los ejes que se muestran, hallar las coordenadas del centroide del sector circular. Confrontar los resultados con los del problema tipo 5.3.

Resp. $\bar{x} = \dfrac{2r}{3\beta} \operatorname{sen} \beta$ $\quad\bar{y} = \dfrac{2r}{3\beta}(1 - \cos \beta)$

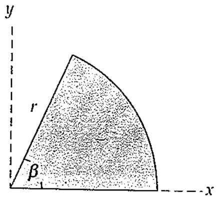


Figura problema 5.17

5.18 Hallar la coordenada y del centroide de la superficie sombreada.

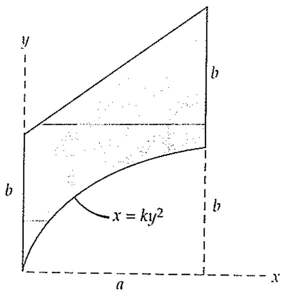


Figura problema 5.18

5.19 Localizar el centroide de la superficie sombreada comprendida entre la elipse y el círculo.

Resp. $\bar{x} = \dfrac{4}{3\pi}(a + b)$

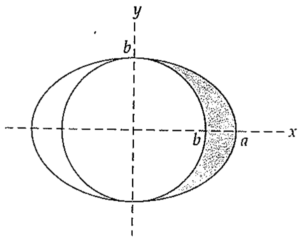


Figura problema 5.19

5.20 Hallar las coordenadas del centroide de la superficie sombreada.

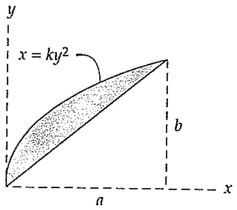


Figura problema 5.20

5.21 Localizar el centroide de la superficie sombreada comprendida entre las dos curvas.

Resp. $\bar{x} = \frac{24}{25}$. $\quad\bar{y} = \frac{6}{7}$

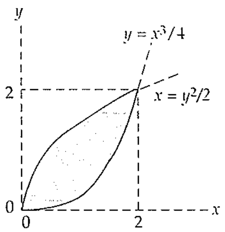


Figura problema 5.21

5.22 La figura representa una pieza curva de chapa metálica simétrica respecto al eje x cuyo contorno curvo tiene forma de parábola. Determinar la coordenada x de su centroide.

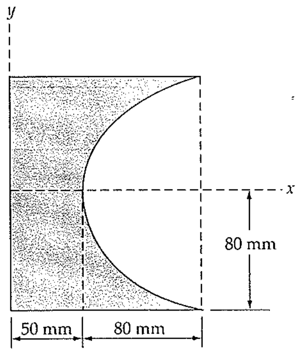


Figura problema 5.22

5.23 Por integración directa localizar el centroide de la superficie sombreada de la figura(*Obs.*: Cuídese de conservar el signo adecuado del radical que interviene en el problema.)

Resp. $\bar{x} = \dfrac{2a}{3(4 - \pi)}$ $\quad\bar{y} = \dfrac{10 - 3\pi}{3(4 - \pi)}a$

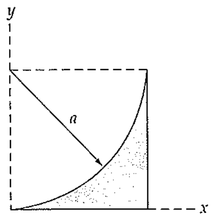


Figura problema 5.23

5.24 Hallar la coordenada y del centroide de la superficie sombreada de la figura. (Téngase en cuenta la observación al problema 5.23.)

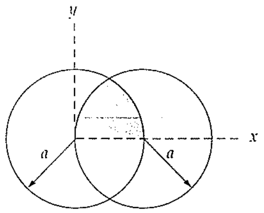


Figura problema 5.24

5.25 Calcular la distancia $\bar{h}$ desde la base del tronco de cono macizo hasta el centroide de este volumen troncocónico.

Resp. $\bar{h} = \frac{11}{56}h$

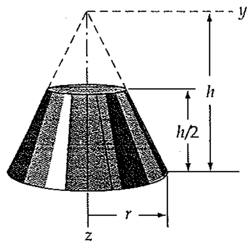


Figura problema 5.25

5.26 Empleando el resultado del problema tipo 5.2, determinar por inspección la distancia $\bar{h}$ desde el centroide de la superficie lateral de cualquier cono o pirámide de altura h hasta la base de la figura.

5.27 El espesor de la placa triangular varía linealmente con y desde el valor t_0 en su base $y = 0$ hasta $2t_0$ para $y = h$. Hallar la coordenada y del centro de masa de la placa.

Resp. $\bar{y} = 3h/8$

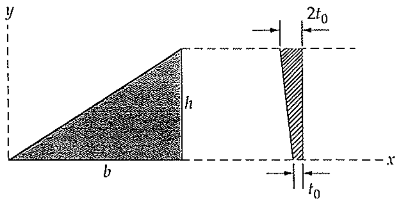


Figura problema 5.27

5.28 Hallar la coordenada z del centroide del volumen que se obtiene haciendo girar 360° en torno al eje z la superficie triangular sombreada.

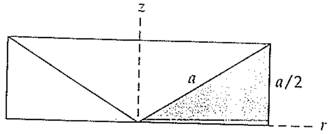


Figura problema 5.28

5.29 Hallar la coordenada z del volumen engendrado haciendo girar 360° en torno al eje z la superficie sombreada.

Resp. $\bar{z} = 5a/8$

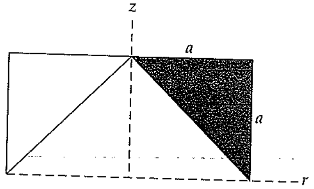


Figura problema 5.29

5.30 Hallar la coordenada z del volumen que se obtiene haciendo girar 180° en torno del eje z la superficie sombreada limitada por la parábola.

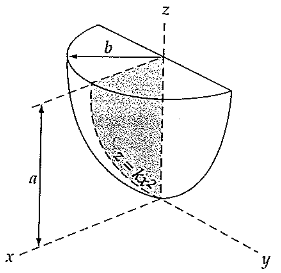


Figura problema 5.30

5.31 La barra delgada es de sección recta uniforme y está conformada como se indica. Calcular la coordenada y de su centro de masa. (Recordatorio: El elemento diferencial de arco es $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dx/dy)^2}dy$.)

Resp. $\bar{y}$ = 57,4 mm

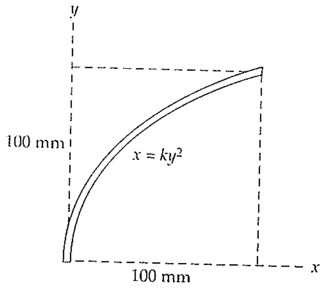


Figura problema 5.31

5.32 Plantear, pero no calcular, las integrales que dan las coordenadas x e y del centroide de la barra delgada uniforme conformada como se indica.

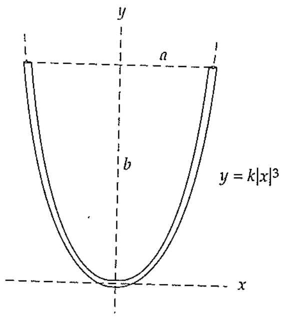


Figura problema 5.32

5.33 Localizar el centro de masa del cuerpo macizo cuyo volumen es el engendrado por la superficie sombreada cuando gira 360° alrededor del eje z.

Resp. $\bar{z}$ = 263 mm

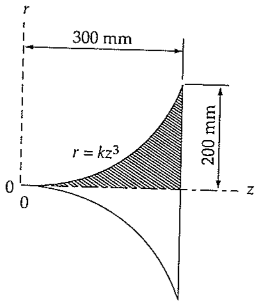


Figura problema 5.33

5.34 Hallar la coordenada x del centroide del volumen definido.

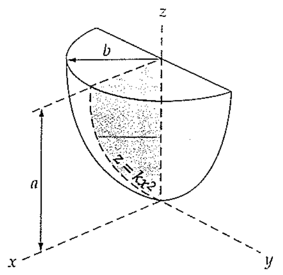


Figura problema 5.34

5.35 Hallar las coordenadas del centroide del volumen que se obtiene rotando 90° la superficie sombreada en torno al eje z.

Resp. $\bar{x} = \bar{y} = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{3}{4}\right)a, \ \bar{\bar{z}} = a/4$

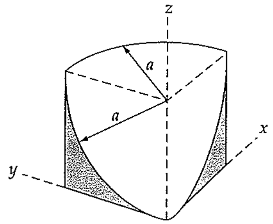


Figura problema 5.35

5.36 Determinar la posición del centro de masa de la cáscara cónica delgada de la figura.

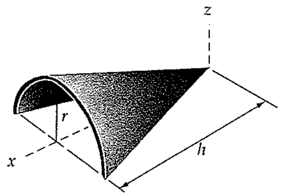


Figura problema 5.36

5.37 La densidad de una esfera disminuye linealmente con la distancia r al centro, de tal modo que en éste vale $2\rho_0$ y en la superficie, para r = a, vale ρ_0. Si la esfera se corta por un plano diametral, tal como se muestra, hallar la distancia $\bar{z}$ del plano de la base al centro de masa del hemisferio.

Resp. $\bar{z} = 9a/25$

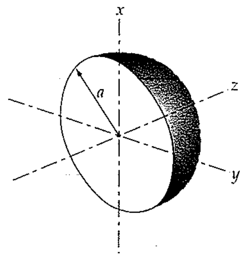


Figura problema 5.37

5.38 Localizar el centro de masa de la cáscara acampanada de espesor uniforme pero despreciable.

Resp. $\bar{z} = \dfrac{a}{\pi - 2}$

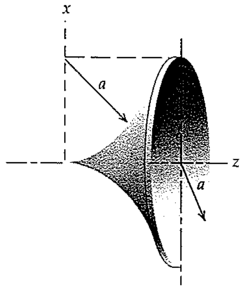


Figura problema 5.38

5.39 Determinar la posición del centroide del volumen interior a la cáscara acampanada del problema 5.38.

Resp. $\bar{z} = \dfrac{a}{2(10 - 3\pi)}$

5.40 Localizar el centro de masa G del semianillo de acero. (*Sugerencia*: Elíjase un elemento de volumen en forma de cáscara cilíndrica cuya intersección con el plano de los extremos sea la indicada.)

Resp. $\bar{r} = \dfrac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$

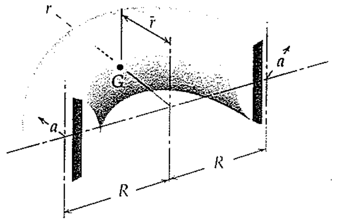


Figura problema 5.40

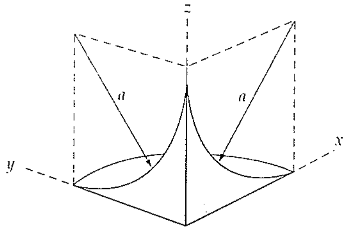


Figura problema 5.41

5.41 Hallar las coordenadas x e y del centroide del volumen engendrado al girar 90° la superficie sombreada alrededor del eje z.

Resp. $\bar{x} = \bar{y} = 0{,}242a$

5.42 Hallar la coordenda z del volumen descrito en el problema 5.41.

Resp. $\bar{z} = 0{,}1308a$

5.4 FIGURAS Y CUERPOS COMPUESTOS; APROXIMACIONES

Cuando un cuerpo o figura puede descomponerse sin complicaciones en varias partes, se podrá emplear el principio de los momentos tratando cada una de las partes como elemento finito del conjunto. Así, para un cuerpo como el que se esquematiza en la figura 5.13, descompuesto en tres partes de masas m_1, m_2 y m_3, si las coordenadas de sus respectivos centros de masa, por ejemplo, en la dirección x son $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$, el principio de los momentos nos da

$$(m_1 + m_2 + m_3)\bar{X} = m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3$$

donde $\bar{X}$ es la coordenada x del centro de masa del conjunto. Expresiones análogas se obtendrán para las otras dos coordenadas. Entonces, para un cuerpo descomponible en un número cualquiera de partes, las sumas podemos expresarlas condensadamante y escribir como expresiones generales de las coordenadas de su centro de masa

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \qquad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} \tag{5.7}$$

Expresiones análogas se cumplen para líneas, superficies y volúmenes, sin más que sustituir las m por L, A y V respectivamente. Señalemos que si un cuerpo presenta un agujero o cavidad que se trate como una de las partes componentes del cuerpo, a la masa correspondiente a ese agujero o cavidad se le asigna un signo negativo.

En la práctica es frecuente que los límites de una superficie o volumen no sean asimilables a formas geométricas sencillas o que sean representables matemáticamente. En tales casos resulta necesario recurrir a algún método de aproximación. Como ejemplo, consideremos el problema de ubicar el centroide C de la superficie irregular de la figura 5.14. Esa superficie podemos dividirla en franjas verticales de anchura Δx y altura variable h. Para obtener los momentos de cada elemento de superficie, como el que en la figura aparece coloreado, multiplicamos el área A de cada franja por las correspondientes coordenadas x_c e y_c de su centroide. La suma de los momentos de todas las franjas dividida por el área total de las franjas nos dará la coordenada centroidal correspondiente. Una tabulación sistemática de los resultados nos facilitará un cálculo ordenado del área total $\sum A$, las sumas $\sum Ax_c$ y $\sum Ay_c$ y las coordenadas centroidales

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax_c}{\sum A} \qquad \bar{y} = \frac{\sum Ay_c}{\sum A}$$

La precisión de la aproximación será tanto mayor cuanto menor sea la anchura de las franjas. En todos los casos la altura media de cada franja hay que estimarla al aproximar su área. Aunque suela ser más conveniente emplear elementos todos de la misma anchura, no es necesario que así sea. De hecho podemos emplear elementos de cualquier tamaño y forma que den un valor aproximado del área dada con una precisión satisfactoria.

El problema de ubicar el centroide de un volumen irregular puede reducirse al de determinar el centroide de una superficie. Consideremos el volumen representado en la figura 5.15, en la que asimismo se representa gráficamente la superficie de la sección normal a la dirección x en función de x. El área de una de las franjas verticales limitada por la curva es $A\ \Delta x$, y ésta es igual al correspondiente volumen ΔV. O sea, el área limitada por la curva representa el volumen del cuerpo y la coordenada x del centroide de esa área es

$$\bar{x} = \frac{\sum(A\Delta x)x_c}{\sum A\ \Delta x} \qquad \text{es decir} \qquad \bar{x} = \frac{\sum Vx_c}{\sum V}$$

que es la del volumen real.

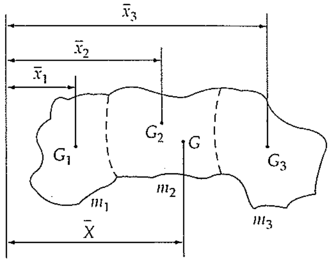


Figura 5.13

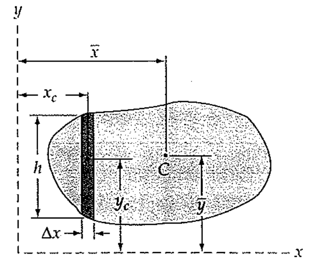


Figura 5.14

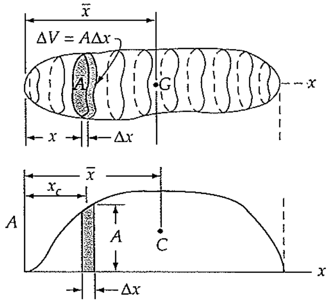
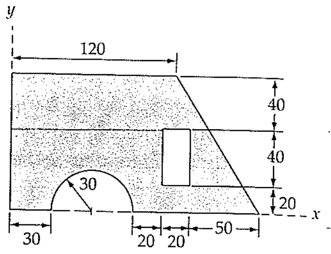


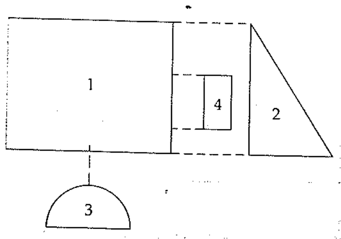
Figura 5.15

PROBLEMA TIPO 5.6

Localizar el centroide de la superficie sombreada.



Cotas en milímetros



Solución. La superficie la dividimos en las cuatro formas sencillas que se muestran en la ilustración inferior. Las posiciones de los centroides de esas cuatro superficies pueden obtenerse en la tabla D.3. Adviértase que a las superficies de los "agujeros" (partes 3 y 4) se les asignan valores negativos en la tabla siguiente:

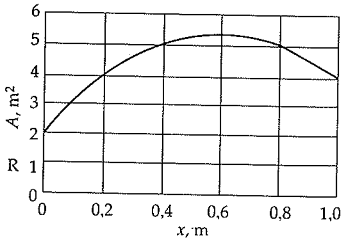
PARTE	A mm^2	$\bar{x}$ mm	$\bar{y}$ mm	$\bar{x}$ A mm^3	$\bar{y}$ A mm^3
1	12000	60	50	720 000	600 000
2	3000	140	100/3	420 000	100 000
3	−1414	60	12,73	−84 800	−18 000
4	−800	120	40	−96 000	−32 000
TOTALES	12 790			959 000	650 000

Aplicamos ahora la versión para superficies de las fórmulas 5.7 y obtenemos

$$\left[\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A}\right] \qquad \bar{X} = \frac{959\ 000}{12\ 790} = 75{,}0 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\left[\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A}\right] \qquad \bar{Y} = \frac{650\ 000}{12\ 790} = 50{,}8 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 5.7



Aproximar la coordenada x del centroide del volumen de un cuerpo de longitud 1 m y cuya superficie de la sección normal varía con x tal como se muestra en la figura.

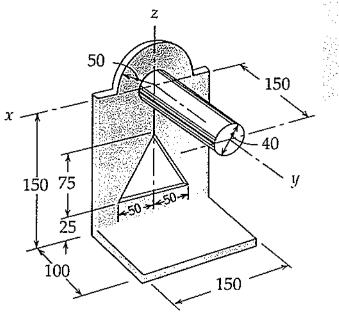
Solución. El cuerpo se divide en cinco secciones. De éstas se determinan la superficie media, el volumen y la posición del centroide y se introducen en la tabla siguiente:

INTERVALO	A_{av} m^2	Volumen V m^3	$\bar{x}$ m	$V\bar{x}$ m^4
0-0,2	3	0,6	0,1	0,060
0,2-0,4	4,5	0,90	0,3	0,270
0,4-0,6	5,2	1,04	0,5	0,520
0,6-0,8	5,2	1,04	0,7	0,728
0,8-1,0	4,5	0,90	0,9	0,810
TOTALES		4,48		2,388

① $$\left[\bar{X} = \frac{\sum V\bar{x}}{\sum V}\right] \qquad \left(\bar{X} = \frac{2{,}388}{4{,}48}\right) = 0{,}533 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

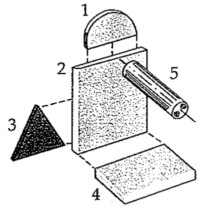
① **Obsérvese que la forma del cuerpo como función de y e z no afecta al valor de $\bar{X}$.**

PROBLEMA TIPO 5.8



Dimensiones en milímetros

Localizar el centro de masa de la combinación soporte-árbol. La cara vertical es de plancha metálica, cuya masa es de 25 kg/m². El material de la base horizontal tiene una masa de 40 kg/m² y el árbol de acero tiene una densidad de 7,83 Mg/m³.



Solución. El cuerpo podemos considerarlo compuesto de las cinco partes que se muestran en la ilustración inferior, de las cuales a la triangular le asignamos una masa negativa. Por simetría, para los ejes de referencia indicados la coordenada x del centro de masa es nula.

La masa m de cada parte se calcula sin dificultad y no hacen falta aclaraciones. Según el problema tipo 5.3, para la parte 1 tenemos

$$\bar{z} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(50)}{3\pi} = 21{,}2 \text{ mm}$$

Según el problema tipo 5.2, el centro de masa del triángulo que constituye la parte 3 estará a un tercio de su altura por encima de la base. Midiendo en los ejes coordenados resulta

$$\bar{z} = -[150 - 25 - \tfrac{1}{3}(75)] = -100 \text{ mm}$$

Las coordenadas x e y de los centros de masa restantes son evidentes. Las cantidades que intervienen en la aplicación de las fórmulas 5.7 se manejan mejor en forma tabular tal como sigue:

PARTE	m kg	$\bar{y}$ mm	$\bar{z}$ mm	$m\bar{y}$ kg · mm	$m\bar{z}$ kg · mm
1	0,098	0	21,2	0	2,08
2	0,562	0	−75,0	0	−42,19
3	−0,094	0	−100,0	0	9,38
4	0,600	50,0	−150,0	30,0	−90,00
5	1,476	75,0	0	110,7	0
TOTALES	2,642			140,7	−120,73

Aplicando ahora las fórmulas 5.7 resulta

$$\left[\bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m}\right] \qquad \bar{Y} = \frac{140,7}{2,642} = 53,3 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\left[\bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m}\right] \qquad \bar{Z} = \frac{-120,73}{2,642} = -45,7 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.43 Hallar las coordenadas del centroide de la superficie trapezoidal representada.

Resp. $\bar{X} = 233$ mm $\qquad \bar{Y} = 333$ mm

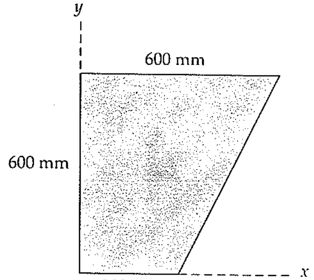


Figura problema 5.43

5.44 Calcular las coordenadas x e y del centroide de la superficie sombreada.

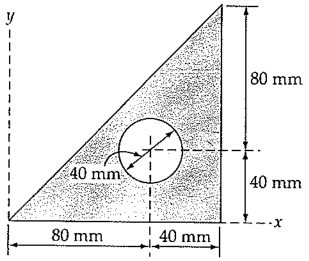


Figura problema 5.44

5.45 Hallar las coordenadas x e y del centroide de la superficie sombreada.

Resp. $\bar{X} = \bar{Y} = 37,3$ mm

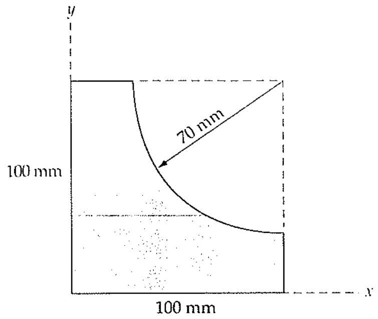


Figura problema 5.45

5.46 Expresar la coordenada y del centroide de la superficie en función de r_1 y r_2.

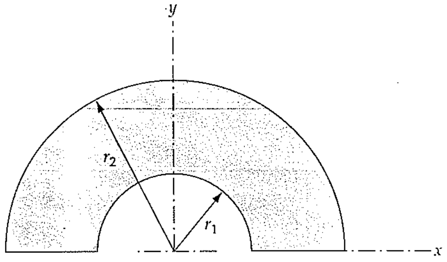


Figura problema 5.46

5.47 Hallar la distancia $\bar{H}$, en función de r, desde el diámetro de la base al centroide de la superficie sombreada.

Resp. $\bar{H} = 0,545r$

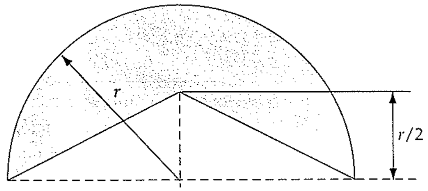


Figura problema 5.47

5.48 Determinar, por el procedimiento descrito en el último apartado, la coordenada x del centroide de la superficie sombreada comprendida entre el círculo y la elipse del problema 5.19, cuya figura vuelve a representarse aquí. (Las propiedades de la superficie elíptica pueden encontrarse en la tabla D.3 del apéndice D.)

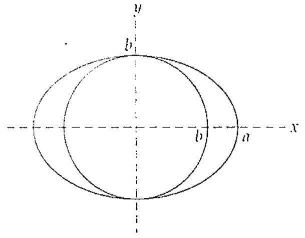


Figura problema 5.48

5.49 Calcular la coordenada y del centroide de la superficie sombreada.

Resp. $\bar{Y} = 99,3$ mm

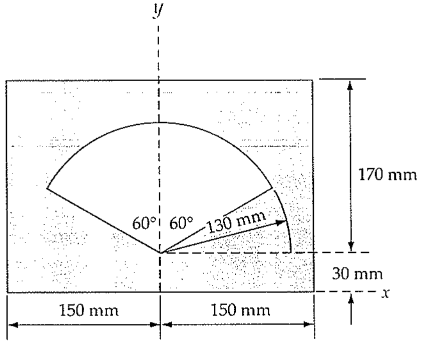


Figura problema 5.49

Problemas representativos

5.50 Calcular las coordenadas del centroide de la superficie sombreada.

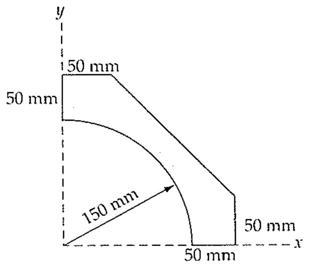
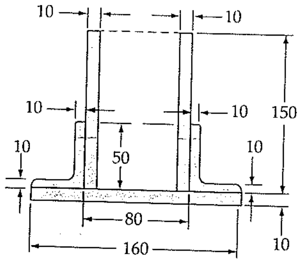


Figura problema 5.50

5.51 Determinar la distancia $\bar{H}$ del centroide de la sección estructural a su base.

Resp. $\bar{H} = 39{,}3$ mm


10
10
10
10
150
10
50
10
80
160
10

Cotas en milímetros

Figura problema 5.51

5.52 Hallar las coordenadas del centroide de la superficie sombreada.

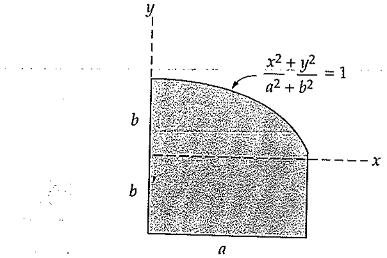

y
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
b
x
b
a

Figura problema 5.52

5.53 Los brazos superiores de la Y formada con barras delgadas uniformes tienen una masa por unidad de longitud de 0,3 kg/m, mientras que el brazo inferior tiene una masa de 0,5 kg/m. Localizar el centro de masa del conjunto.

Resp. $\bar{Y} = -1{,}033$ mm $\qquad \bar{X} = 0$

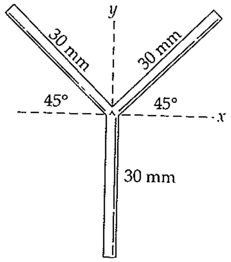

y
30 mm
30 mm
45°
45°
x
30 mm

Figura problema 5.53

5.54 Hallar las coordenadas del centroide de la superficie sombreada.

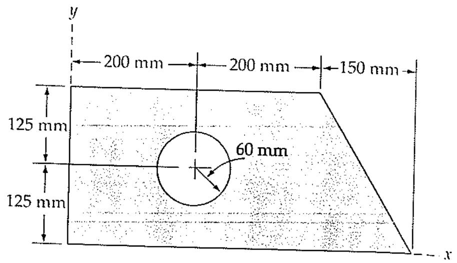

y
200 mm
200 mm
150 mm
125 mm
60 mm
125 mm
x

Figura problema 5.54

5.55 La pieza se compone de un disco circular de 2 kg, un eje redondo de 1,5 kg y una placa cuadrada de 1 kg, rígidamente unidos. Hallar la coordenada z del centro de masa del conjunto.

Resp. $\bar{Z} = 70$ mm

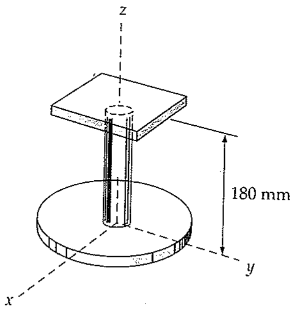


Figura problema 5.55

5.56 Una varilla uniforme se curva como se indica y pivota alrededor del eje *O*. Determinar el valor de *a* en función del radio *r* para que la porción recta permanezca horizontal.

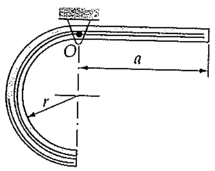


Figura problema 5.56

5.57 Por el método del último apartado hallar la distancia $\bar{H}$ desde la base hasta el centro de masa del tronco de cono macizo del problema 5.25, cuya figura se repite aquí.

Resp. $\bar{H} = \frac{11}{56}h$

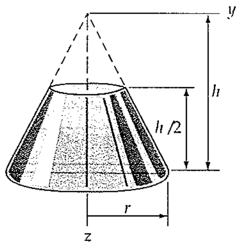


Figura problema 5.57

5.58 Hallar las coordenadas del centro de masa del conjunto soldado de barras delgadas hechas de la misma partida de material.

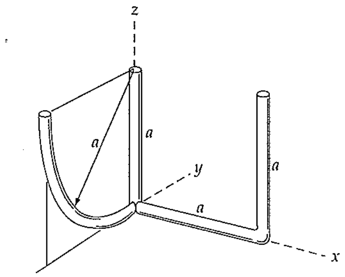


Figura problema 5.58

5.59 Hallar las coordenadas del centro de masa del soporte, construido de chapa de espesor uniforme.

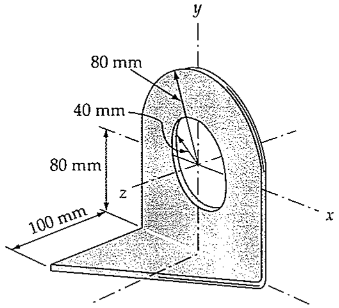

y
80 mm
40 mm
80 mm
z
100 mm
x

Figura problema 5.59

Resp. $\bar{X} = -8{,}3$ mm
$\bar{Y} = -31{,}4$ mm
$\bar{Z} = 10{,}3$ mm

5.60 En la figura se muestra la maqueta de un instrumento subacuático. Hallar las coordenadas del centroide de este volumen compuesto.

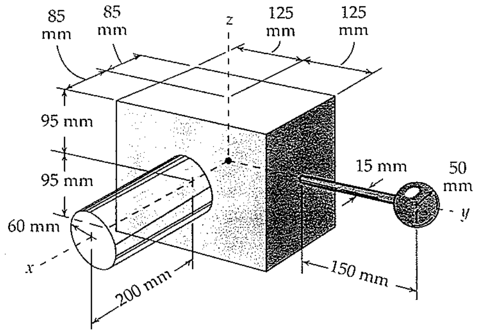

85 mm
85 mm
z
125 mm
125 mm
95 mm
95 mm
60 mm
x
15 mm
50 mm
y
150 mm
200 mm

Figura problema 5.60

5.61 El conjunto soldado está constituido por una varilla uniforme, cuya masa es de 0,5 kg por metro de longitud, y la placa semicircular, cuya masa es de 30 kg por metro cuadrado. Calcular las coordenadas del centro de masa del conjunto.

Resp. $\bar{X} = 44{,}7$ mm
$\bar{Y} = 0$
$\bar{Z} = 38{,}5$ mm

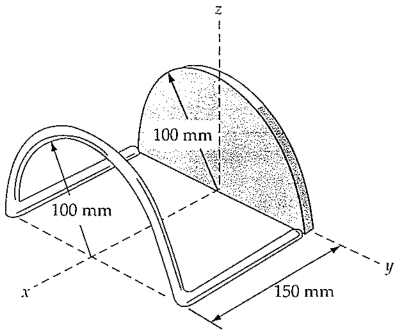
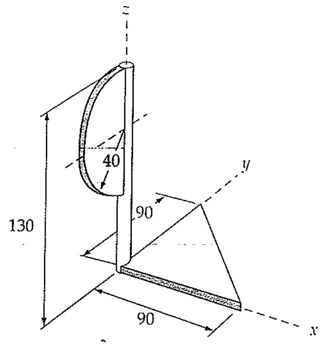

z
100 mm
100 mm
x
150 mm
y

Figura problema 5.61

5.62 Las masas de las tres partes del conjunto soldado, compuesto de placa triangular, varilla uniforme y chapa semicircular son, respectivamente, 0,210, 0,110 y 0,125 kg. Calcular las coordenadas de su centro de masa.

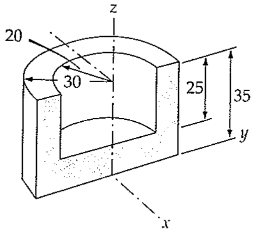


Cotas en milímetros

Figura problema 5.62

5.63 Calcular las coordenadas del centro de masa de la pieza metálica moldeada.

Resp. $\overline{X} = -14{,}71$ mm $\overline{Z} = 15{,}17$ mm



Cotas en milímetros

Figura problema 5.63

5.64 Determinar la posición del centro de masa de la cáscara cilíndrica con un extremo semicircular cerrado. La cáscara está hecha con una plancha metálica cuya masa es de 24 kg/m^2 y el extremo con otra plancha de 36 kg/m^2.

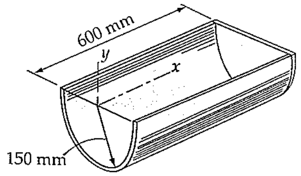


Figura problema 5.64

5.65 Como ejemplo de la precisión de las aproximaciones gráficas, calcular el tanto por ciento de error e cometido al determinar la coordenada x del centroide de la superficie triangular utilizando la aproximación de los cinco rectángulos de anchura $a/5$ en lugar del triángulo.

Resp. $e = 1{,}00\%$ por defecto

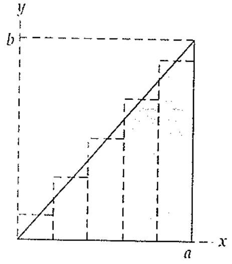


Figura problema 5.65

5.66 En la figura se muestra la sección transversal sumergida A del casco de un velero, a una distancia x hacia popa desde la proa. Para un cierto casco se representa gráficamente la variación de A con x. Hallar la distancia $\overline{X}$ hacia popa desde el punto P hasta el centro de empuje del casco (es el centroide del volumen de agua desplazado). La posición del centro de empuje es un parámetro crítico en el proyecto de cascos.

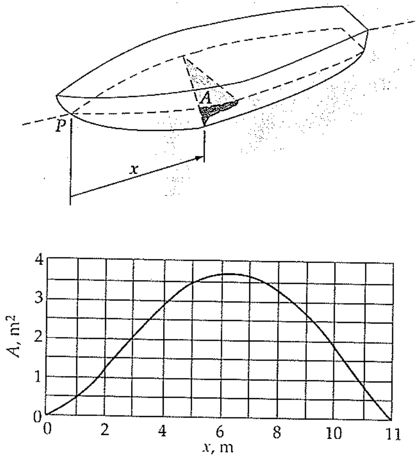


Figura problema 5.66

5.67 Un patrón de chapa metálica tiene la forma indicada. Estimar a ojo la posición del centroide de esa superficie y anotar sus coordenadas. Seguidamente determinar las coordenadas con ayuda del retículo superpuesto y comparar este resultado con los valores estimados a ojo.

Resp. $\bar{x} = 68{,}4$ mm $\bar{y} = 58{,}0$ mm

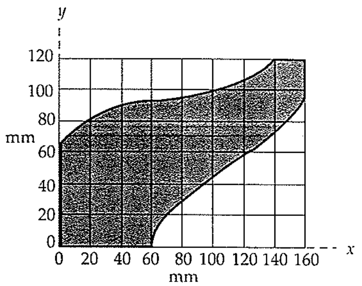
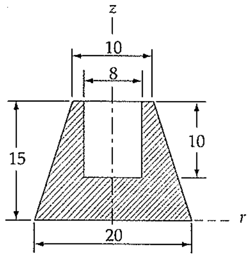


Figura problema 5.67

5.68 Un sólido de revolución homogéneo, cuya sección se muestra, está constituido por un trono de cono circular recto que tiene una cavidad cilíndrica de 8 mm de diámetro. Calcular la distancia $\overline{Z}$ de su centro de masa a la base.



Cotas en milímetros

Figura problema 5.68

5.69 De la chapa metálica cuadrada de lado a se suprime un trozo rectangular. Determinar el valor de h para el cual el centro de masa del material restante se encontrará lo más a la izquierda posible.

Resp. $h = 0{,}586a$

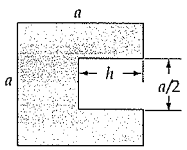
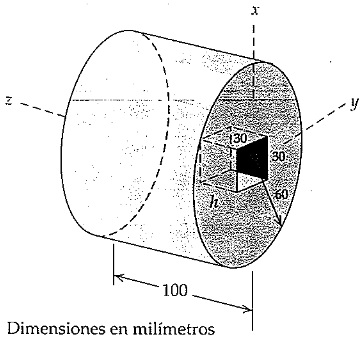


Figura problema 5.69

5.70 Determinar la profundidad h del orificio cuadrado practicado en el cilindro circular macizo para la cual es máxima la coordenada z del centro de masa.



Dimensiones en milímetros

Figura problema 5.70

5.71 El disco de la figura gira alrededor de un eje que pasa por su centro O y tiene tres orificios de diámetro d situados como se indica. En el disco ha de taladrarse un cuarto orificio a la misma distancia r del centro O de forma que el centro de masa sea O. Determinar el diámetro necesario D del nuevo orificio y su posición angular.

Resp. $D = 1{,}227d$ $\theta = 84{,}9°$

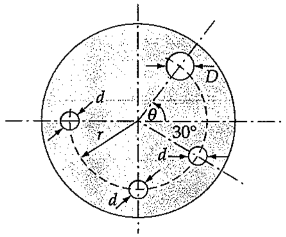


Figura problema 5.71

5.72 Un recipiente cilíndrico con una parte posterior prolongada y unos extremos semicirculares está fabricado de la misma partida de chapa metálica. Calcular el ángulo que forma con la horizontal la parte plana cuando el recipiente descansa en equilibrio sobre una superficie horizontal.

Resp. $\alpha = 39{,}6°$

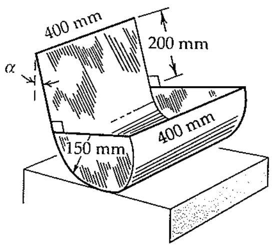


Figura problema 5.72

5.5 TEOREMAS DE PAPPO[1]

Existe un método muy sencillo para calcular el área de la superficie generada por una curva plana al girar en torno a una recta que no la corte y sea coplanaria con la curva. El segmento curvilíneo de longitud L de la figura 5.16 está situado en el plano x-y y genera una superficie al girar en torno al eje x. Un elemento de esa superficie es el anillo generado por dL. La superficie de ese anillo es el producto de su perímetro por la generatriz dL, o sea $dA = 2\pi y\, dL$, y el área total será, pues,

$$A = 2\pi \int y\, dL$$

Pero como $\bar{y}L = \int y\, dL$, el área vale

$$A = 2\pi\bar{y}L \tag{5.8}$$

donde $\bar{y}$ es la coordenada y del centroide del segmento curvilíneo de longitud L. Así, pues, el área de la superficie generada es igual al área de la superficie lateral de un cilindro recto de revolución de generatriz L y radio $\bar{y}$.

En el caso del volumen generado haciendo girar una superficie plana en torno a una recta coplanaria con ella y que no la corte, existe una relación igualmente sencilla para hallar el volumen. En la figura 5.17 puede verse que al girar la superficie de área A alrededor del eje x, uno de los elementos de volumen generados es el anillo elemental de sección recta de área dA y radio y. El volumen del elemento es $dV = 2\pi y\, dA$, siendo el volumen total

$$V = 2\pi \int y\, dA$$

Pero como $\bar{y}A = \int y\, dA$, el volumen es

$$V = 2\pi\bar{y}A \tag{5.9}$$

donde $\bar{y}$ es la coordenada y del centroide de la superficie girada de área A. Luego, el volumen generado se obtendrá multiplicando el área de la superficie

---

[1] Atribuido a Pappo de Alejandría, matemático del siglo III a.C. El teorema se conoce como teorema de Guldin (Paul Guldin, matemático suizo, 1577-1643), que se atribuye la autoria aunque es posible que conociera la obra de Pappo.

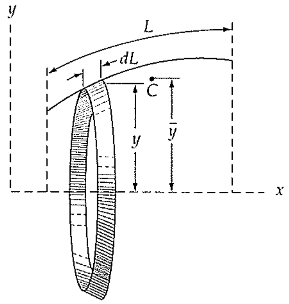


Figura 5.16

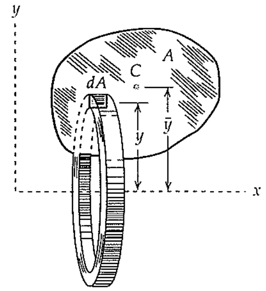


Figura 5.17

generatriz por la longitud de la circunferencia que constituye la trayectoria circular descrita por su centroide.

Los dos teoremas de Pappus, expresados por las ecuaciones 5.8 y 5.9, no solamente son útiles para determinar áreas y volúmenes de revolución, sino que también se emplean para hallar centroides de curvas planas y superficies planas cuando se conocen las correspondientes áreas y volúmenes debidas a la revolución de esas figuras alrededor de un eje que no las corte. Dividiendo el área o volumen por el producto de 2π por la longitud del segmento o área de la superficie correspondiente, tendremos la distancia del centroide al eje de revolución.

En el caso de que la línea o superficie gire un ángulo θ inferior a 2π, se obtendrá la superficie o volumen generados sustituyendo 2π por θ en las ecuaciones 5.8 y 5.9. Entonces, unas relaciones más generales serán

$$A = \theta\bar{y}L \tag{5.8a}$$

y

$$V = \theta\bar{y}A \tag{5.9a}$$

donde θ está expresado en radianes.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.73 Por el procedimiento del último apartado, determinar el volumen y la superficie totales de un cilindro circular recto de radio r y altura h.

Resp. $V = \pi r^2 h \qquad A = 2\pi(r + h)$

5.74 A partir de la expresión conocida del área de una superficie esférica $A = 4\pi r^2$, determinar la distancia radial $\bar{r}$ al centroide del arco semicircular utilizado para generar la superficie esférica.

5.75 Hallar el volumen V y el área de la superficie lateral de un cono recto de revolución cuyo radio de la base es r y cuya altura es h.

Resp. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad A = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

5.76 Hallar el volumen V generado al hacer girar 180° alrededor del eje z la superficie elíptica.

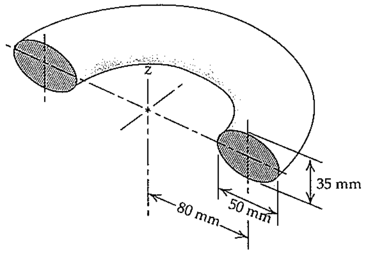


Figura problema 5.76

5.77 Hallar el área A de la superficie lateral del tronco de cono recto.

Resp. $A = \frac{3}{4}\pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

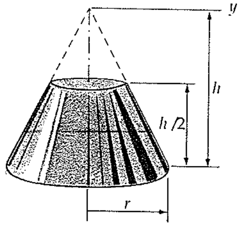


Figura problema 5.77

5.78 Obtener el volumen V del semielipsoide de revolución generado haciendo girar alrededor del eje x la superficie de cuadrante elíptico. Consúltese la información acerca de centroides contenida en la tabla D.3 del apéndice D.

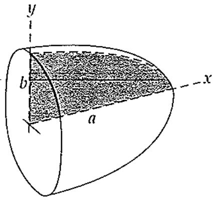


Figura problema 5.78

Problemas representativos

5.79 Hallar el volumen V generado al hacer girar 90° alrededor del eje z, en la forma que se indica, un cuarto de círculo.

Resp. $V = \frac{\pi a^3}{12}(3\pi - 2)$

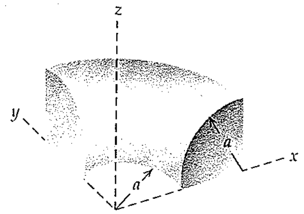


Figura problema 5.79

5.80 Calcular el volumen V del sólido generado al hacer girar 180° alrededor del eje z la superficie del triángulo rectángulo de la figura.

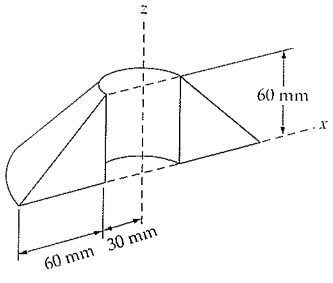


Figura problema 5.80

5.81 Calcular el volumen que se forma cuando la sección transversal que se muestra da una revolución completa en torno a su eje de simetría z.

Resp. $V = 0{,}1728\ \mathrm{m}^3$

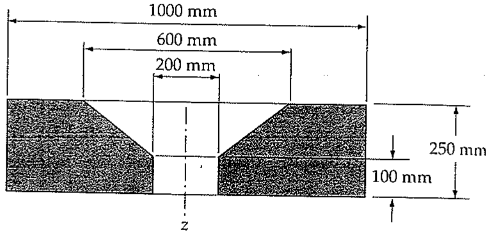


Figura problema 5.81

5.82 Una cáscara delgada tiene la forma de la superficie obtenida haciendo girar 360° alrededor del eje z el arco de circunferencia. Determinar el área de la superficie de una cara de la cáscara completa.

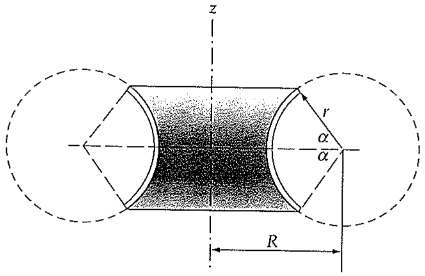


Figura problema 5.82

5.83 Una matriz de acero, cuya sección se representa, tiene la forma del sólido que se genera haciendo rotar la superficie sombreada alrededor del eje z. Calcular su masa m.

Resp. $m = 84.5$ kg

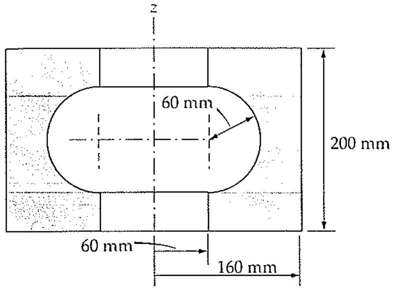


Figura problema 5.83

5.84 Los dos arcos de circunferencia AB y BC se hacen rotar en torno al eje vertical para obtener la superficie de revolución que se muestra. Calcular el área A de esa superficie.

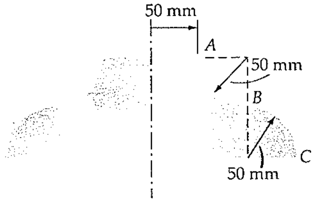
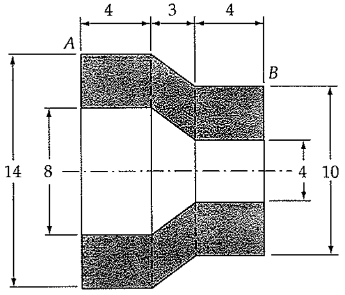


Figura problema 5.84

5.85 La figura muestra la sección de un reductor para circuito oleohidraúlico de alta presión. Calcular la superficie lateral de la pieza (o sea, el área generada por una rotación completa de AB alrededor del eje longitudinal) y también su volumen.

Resp. $A = 438\ \mathrm{mm}^2$ $V = 933\ \mathrm{mm}^3$



Cotas en milímetros

Figura problema 5.85

5.86 Determinar el área de una de las caras de la cáscara acampanada del problema 5.38, que se representa nuevamente, empleando el teorema de Pappo.

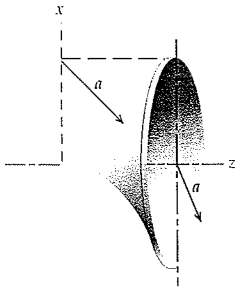


Figura problema 5.86

5.87 Determinar el volumen contenido por la cáscara acampanada del problema 5.86. Pueden emplearse los resultados del problema 5.23.

Resp. $V = \frac{\pi a^3}{6}(10 - 3\pi)$

5.88 Calcular el volumen V y el área total A del anillo cuya sección transversal se representa.

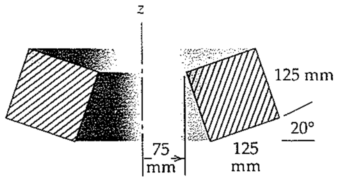


Figura problema 5.88

5.89 Un volante de accionamiento manual está fabricado de aluminio y tiene las proporciones indicadas en la vista seccionada. El área total de la sección es 15 200 mm^2 y la masa de la pieza es 10,0 kg. Calcular la distancia $\bar{r}$ entre el eje del volante y el centroide de la media sección. La densidad del aluminio es 2,69 Mg/m^3.

Resp. $\bar{r} = 77{,}8$ mm

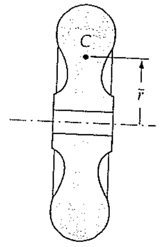


Figura problema 5.89

5.90 En la figura se representa la sección normal de una pieza moldeada en aluminio que tiene la forma de un sólido de revolución alrededor del eje z. Calcular su masa m.

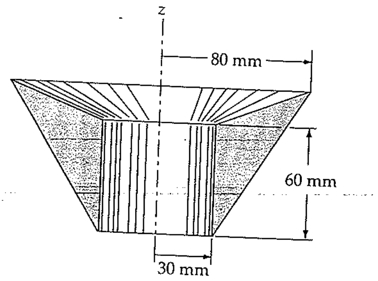


Figura problema 5.90

5.91 El depósito de agua es una cáscara de revolución y ha de pintarse con dos capas de pintura cuyo poder cubriente es de 16 m^2 por litro. El ingeniero (que aún recuerda la Mecánica) consulta un plano a escala del depósito y determina que la longitud de la curva ABC es 10 m y que su centroide está a 2,50 m del eje de simetría del depósito. ¿Cuántos litros de pintura se usarán para pintar el depósito incluyendo la columna vertical cilíndrica?

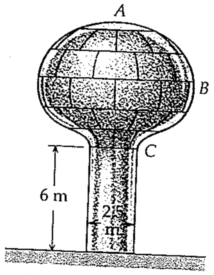


Figura problema 5.91

5.92 Determinar el volumen V del sólido generado haciendo girar 90° alrededor del eje z la superficie sombreada.

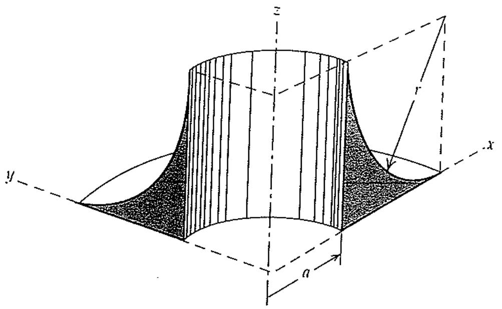


Figura problema 5.92

5.93 Calcular la masa m de hormigón necesaria para construir la presa en arco representada. La densidad del hormigón es 2,40 Mg/m^3.

Resp. $m = 1{,}126(10^6)$ Mg

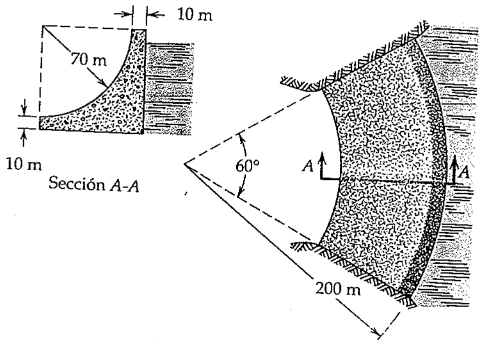


Figura problema 5.93

5.94 La superficie sombreada está limitada por un semiciclo de sinusoide y el eje de la misma. Hallar el volumen engendrado por una revolución completa de la superficie alrededor del eje x.

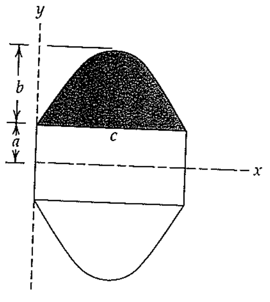


Figura problema 5.94

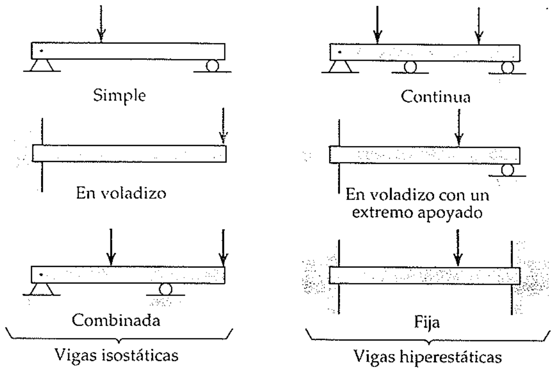


Figura 5.18

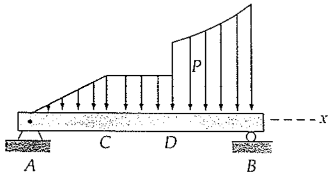


Figura 5.19

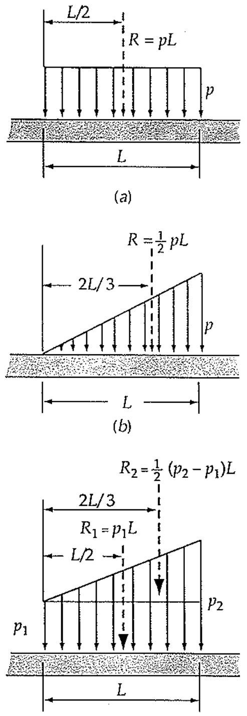
SECCIÓN B: TEMAS ESPECIALES

5.6 VIGAS-EFECTOS EXTERNOS

Los miembros estructurales que ofrecen resistencia a la flexión originada por las cargas aplicadas reciben el nombre de vigas. La mayoría de las vigas son barras prismáticas y las cargas suelen aplicarse perpendicularmente a los ejes de esas barras. La viga es, indudablemente, el más importante de todos los miembros estructurales y es ineludible entender perfectamente la teoría básica que fundamenta su diseño. El análisis de las capacidades de soporte de carga de las vigas consiste, primero, en establecer los requisitos de equilibrio de la viga en conjunto y de una parte cualquiera de ella considerada por separado. Segundo, se establecen las relaciones entre las fuerzas resultantes y la correspondiente resistencia interna de la viga para soportar esas fuerzas. La primera parte de este análisis requiere aplicar los principios de la Estática, mientras que en la segunda parte del problema intervienen las características de resistencia mecánica del material y acostumbra a tratarse en el ámbito de la mecánica de sólidos o de la resistencia de materiales. En este apartado se estudia las cargas *externas* y las reacciones actuantes en las vigas. En el apartado siguiente nos ocuparemos de la distribución de las fuerzas y momentos *internos* a lo largo de las vigas.

Tipos de vigas. Las vigas soportadas de tal manera que las reacciones en los apoyos pueden calcularse solamente con el concurso de la Estática reciben el nombre de vigas *isostáticas*. De una viga con más apoyos de los necesarios para su equilibrio se dice que es *hiperestática* y para determinar las reacciones en sus apoyos es necesario, además de emplear las ecuaciones de equilibrio, considerar sus propiedades de deformación bajo cargas. En la figura 5.18 se presentan ejemplos de ambos tipos de vigas. En este apartado se estudian únicamente vigas isostáticas.

Las vigas pueden también clasificarse de acuerdo con el tipo de carga exterior que soporten. Así, las vigas de la figura 5.18 soportan cargas concentradas, mientras que la viga de la figura 5.19 soporta una carga distribuida. La intensidad p de una carga distribuida puede expresarse como fuerza por unidad de



(a)

(b)

(c)

Figura 5.20

longitud de viga y puede ser constante o variable, continua o discontinua. En la figura 5.19 la intensidad de la carga es constante entre C y D y variable entre A y C y entre D y B. En el punto D, la carga presenta una discontinuidad y cambia bruscamente de valor. En el punto C, la intensidad no es discontinua en sí, pero lo es su variación por unidad de longitud dp/dx.

Cargas distribuidas. Las intensidades constantes o que varíen linealmente se manejan con facilidad. En la figura 5.20 se representan los tres casos más corrientes junto con las resultantes correspondientes.

En los casos a y b de la figura 5.20 vemos que la carga resultante R está representada por el área de la superficie delimitada por la curva de intensidad p (fuerza por unidad de longitud de viga) y la longitud L a lo largo de la cual se distribuye la carga. La recta soporte de la resultante R pasa por el centroide de esa superficie.

En la parte c de la figura 5.20, la superficie trapezoidal se ha dividido en una superficie rectangular y una superficie triangular, para determinar por separado las resultantes parciales R_1 y R_2 correspondientes. Obsérvese que la resultante neta podría determinarse por el método de composición de centroides que se expuso en el apartado 5.4; habitualmente es innecesario determinar la resultante neta.

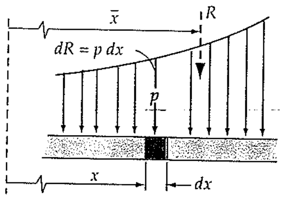


Figura 5.21

En un caso más general, como el de la figura 5.21, deberá comenzarse con un incremento diferencial de la fuerza $dR = p\,dx$. La carga total R será entonces la suma de esas fuerzas diferenciales, o sea

$$R = \int p\,dx$$

Como antes, la recta soporte de la resultante R pasa por el centroide de la superficie considerada. Aplicando el principio de los momentos, $R\bar{x} = \int xp\,dx$, obtendremos la coordenada x de ese centroide, o sea

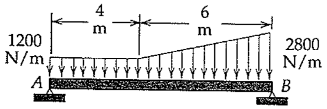
$$\bar{x} = \frac{\int xp\,dx}{R}$$

Para la distribución de la figura 5.21, no es necesario hallar la coordenada vertical del centroide.

Un vez que las cargas distribuidas se hayan reducido a sus cargas concentradas equivalentes, las reacciones exteriores sobre la viga podrán determinarse sin más que aplicar los procedimientos analíticos expuestos en el capítulo 3.

PROBLEMA TIPO 5.9

Determinar la(s) carga(s) concentrada(s) equivalente(s) y las reacciones exteriores en la viga simplemente apoyada sometida a la carga distribuida que se muestra.



Solución. La superficie asociada a la distribución de carga se divide en las superficies rectangular y triangular que se indican. Los valores de las correspondientes cargas concentradas se determinan calculando las áreas respectivas y las cargas se colocan en los centroides.

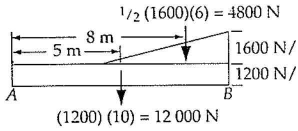
① Una vez conocidas las cargas concentradas, éstas se colocan en el diagrama de sólido libre de la viga junto con las reacciones en A y B. Aplicando las condiciones de equilibrio, tendremos

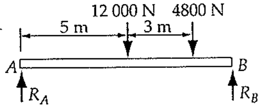
$[\sum M_A = 0]$ $\quad 12\,000(5) + 4800(8) - R_B(10) = 0$

$R_B = 9840$ N *Resp.*

$[\sum M_B = 0]$ $\quad (R_A(10) - 12\,000(5)) - 4800(2) = 0$

$R_A = 6960$ N o sea 6,96 kN *Resp.*

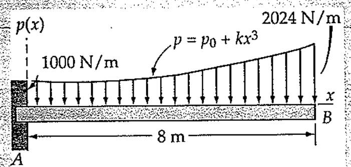




① **Adviértase que es habitualmente innecesario reducir una carga distribuida dada a *una única* carga concentrada.**

PROBLEMA TIPO 5.10

Hallar la reacción en el empotramiento A de la viga en voladizo cargada.



Solución. Los parámetros de la distribución de carga se encuentra que son ① $p_0 = 1000$ N/m y $k = 2$ N/m^4. La carga R será

$$R = \int p\,dx = \int_0^8 (1000 + 2x^3)dx = \left(1000x + \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^8 = 10\,048 \text{ N}$$

② La coordenada x del centroide de la superficie se halla mediante

$$\bar{x} = \frac{\int xp\,dx}{R} = \frac{1}{10\,048}\int_0^8 x(1000 + 2x^3)dx$$

$$= \frac{1}{10\,048}\left(500x^2 + \tfrac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^8 = 4{,}49 \text{ m}$$

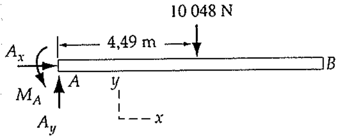
En el diagrama de sólido libre de la viga se tiene

$[\sum M_A = 0]$ $\quad M_A - (10\,048)(4{,}49) = 0$

$M_A = 45\,100$ N · m *Resp.*

$[\sum F_y = 0]$ $\quad A_y = 10\,048$ N *Resp.*

Obsérseve por inspección que $A_x = 0$



① **Atención a las unidades de los parámetros p_o y k.**

② **Conviene que el lector comprenda que el cálculo de R y su ubicación $\bar{x}$ no es más que una aplicación de lo expuesto en el apartado 5.3 acerca de los centroides.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.95 Para la viga sometida a la distribución de carga uniforme hallar las reacciones en *A* y *B*.

Resp. $R_A = 1{,}35$ kN $\qquad R_B = 0{,}45$ kN

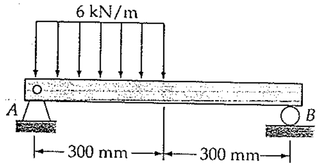

6 kN/m
A
B
300 mm
300 mm

Figura problema 5.95

5.96 Hallar las reacciones en *A* y *B* de la viga cargada como se muestra.

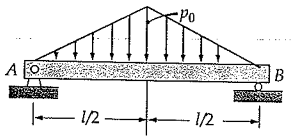


Figura problema 5.96

5.97 Calcular la fuerza resistente R_A y el momento resistente M_A en el empotramiento A de la viga en voladizo cargada.

Resp. $R_A = 2{,}4$ kN $\qquad M_A = 14{,}4$ kN · m (AH)

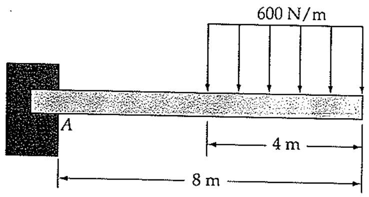

600 N/m
A
4 m
8 m

Figura problema 5.97

5.98 Para la viga sometida a la distribución de carga triangular calcular las reacciones en *A* y *B*.

5.99 Hallar las reacciones en el extremo empotrado de la viga sometida a la distribución de carga triangular.

Resp. $R_A = \dfrac{p_0 l}{2} \qquad M_A = \dfrac{p_0 l^2}{6}$ (AH)

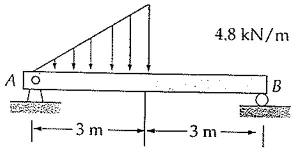

4.8 kN/m
A
B
3 m
3 m

Figura problema 5.98

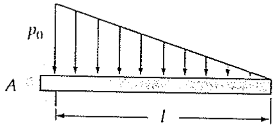


Figura problema 5.99

5.100 Para la viga cargada como se muestra hallar las reacciones en *A* y *B*.

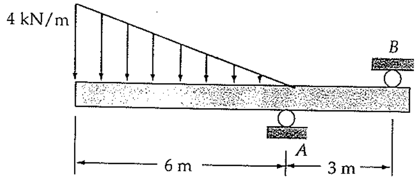

4 kN/m
B
A
6 m
3 m

Figura problema 5.100

Problemas representativos

5.101 Calcular las reacciones en *A* y *B* para la viga sometida a la combinación de carga distribuida y carga puntual.

Resp. $R_A = 7P/6 \qquad R_B = 5P/6$

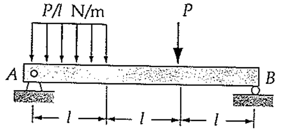

P/l N/m
P
A
B
l
l
l

Figura problema 5.101

5.102 Determinar la reacción en *A* debida a la carga uniforme y al par aplicado.

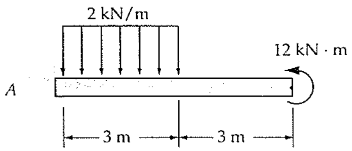

2 kN/m
12 kN · m
A
3 m
3 m

Figura problema 5.102

5.103 Hallar las reacciones en los apoyos de la viga cargada como se muestra.

Resp. $R_A = 2230$ N $\qquad R_B = 2170$ N

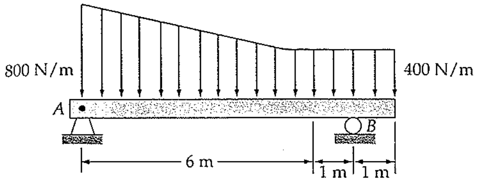

800 N/m
400 N/m
A
B
6 m
1 m
1 m

Figura problema 5.103

5.104 Para la viga sometida a las dos distribuciones lineales de carga, calcular las reacciones en los apoyos *A* y *B*.

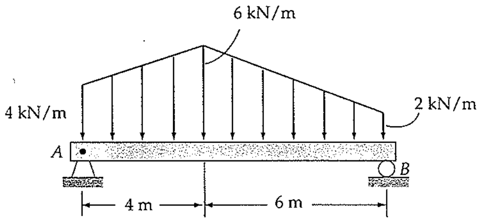

6 kN/m
4 kN/m
2 kN/m
A
B
4 m
6 m

Figura problema 5.104

5.105 Para la viga sometida a las dos distribuciones lineales de carga, calcular las reacciones en los apoyos *A* y *B*.

Resp. $R_A = 21{,}1$ kN $\qquad R_B = 20{,}9$ kN

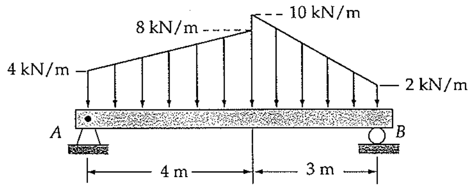

10 kN/m
8 kN/m
4 kN/m
2 kN/m
A
B
4 m
3 m

Figura problema 5.105

5.106 Hallar la fuerza y el momento resistente en *A* para la viga sometida a la combinación de cargas que se representa.

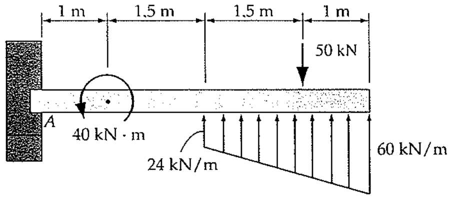

1 m
1,5 m
1,5 m
1 m
50 kN
A
40 kN · m
24 kN/m
60 kN/m

Figura problema 5.106

5.107 Hallar las reacciones en los puntos *A* y *B* de la viga sometida a las distribuciones de carga elíptica y uniforme. La reacción en *A*, ¿actúa en la cara superior o en la inferior?

Resp. $A = 5{,}15$ kN $\qquad B = 5{,}37$ kN; superior

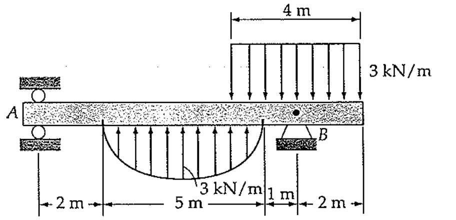

4 m
3 kN/m
A
B
3 kN/m
2 m
5 m
1 m
2 m

Figura problema 5.107

5.108 Hallar las reacciones en los puntos *A* y *B* de la viga inclinada sometida a la distribución de carga vertical que se muestra. El valor de la distribución de carga en el extremo derecho de la viga es de 5 kN por metro *horizontal*.

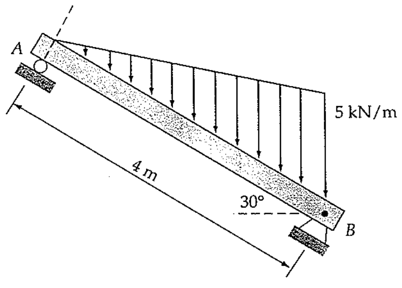

A
5 kN/m
4 m
30°
B

Figura problema 5.108

5.109 Hallar la fuerza y el momento de reacción en el empotramiento A de la viga sometida a la distribución senoidal de carga.

Resp. $R_A = \frac{2p_0 l}{\pi}$ $M_A = \frac{p_0 l^2}{\pi}$ (AH)

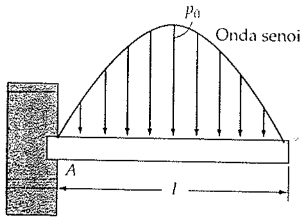


Figura problema **5.109**

5.110 Una viga en voladizo soporta la carga variable representada. Calcular la fuerza R_A y el momento M_A resistentes en el empotramiento A.

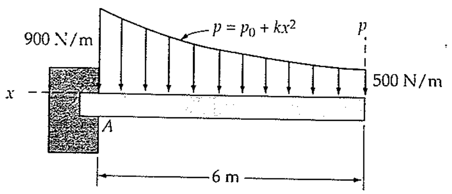


Figura problema **5.110**

5.111 Una viga en voladizo está sometida a una distribución parabólica de carga simétrica respecto a su punto medio. Hallar la fuerza R_A y el momento M_A resistentes en el empotramiento A.

Resp. $R_A = \frac{2p_0 l}{3}$ $M_A = \frac{p_0 l^2}{3}$ (AH)

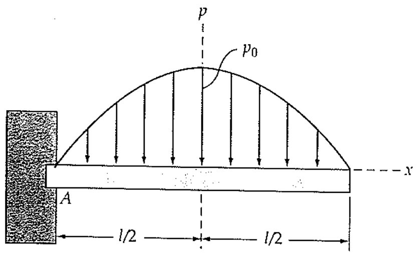


Figura problema **5.111**

5.112 Una viga está sometida a la carga variable representada. Calcular las reacciones en los apoyos A y B.

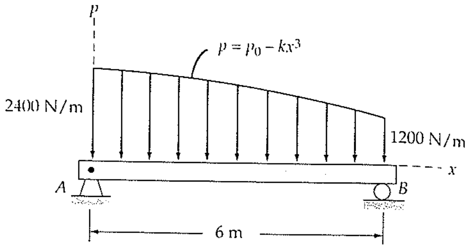


Figura problema **5.112**

5.113 Hallar las reacciones en los apoyos de la viga sobre la que actúa la combinación de distribuciones de carga uniforme y parabólica.

Resp. $R_A = 7$ kN $R_B = 7$ kN

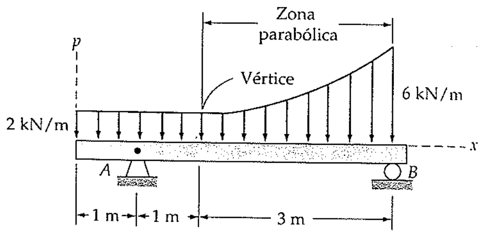


Figura problema **5.113**

5.114 La transición entre las cargas de 10 kN/m y las de 37 kN/m se efectúa mediante una función de tercer grado de la forma $p = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3$, cuya pendiente es nula en sus extremos $x = 1$ m y $x = 4$ m. Hallar las reacciones en A y B.

Resp. $R_A = 43{,}1$ kN $R_B = 74{,}4$ kN

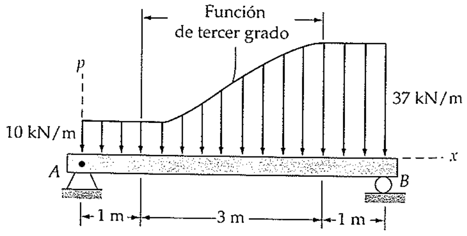


Figura problema **5.114**

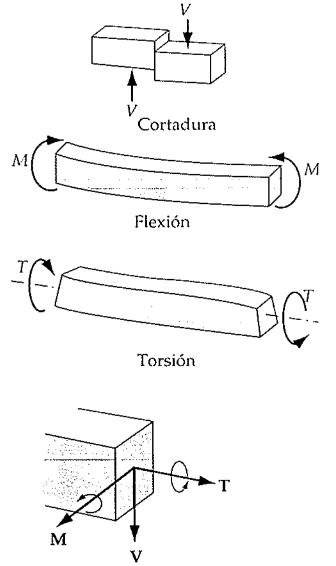
En el apartado precedente se ha tratado de cómo reducir una fuerza distribuida a una o más fuerzas concentradas equivalentes y de la subsiguiente determinación de las reacciones exteriores actuantes sobre la viga. En este apartado se introducen los efectos internos y se aplican los principios de la estática al cálculo de la fuerza cortante y el momento flector, internos, como funciones que son de la posición a lo largo de la viga.

(a) Cortadura, flexión y torsión. Las vigas presentan resistencia no sólo a la tracción y a la compresión, sino también a la cortadura, a la flexión y a la torsión. En la figura 5.22 se ilustran estos tres efectos. La fuerza V recibe el nombre de *fuerza cortante*, el par M es conocido como *momento flector* y el par T es el llamado *momento de torsión*. Estos tres efectos representan las componentes vectoriales de la resultante de las fuerzas que actúan en una sección transversal de la viga tal como se muestra en la parte inferior de la figura.

Centramos nuestra atención primordialmente en la fuerza cortante V y en el momento flector M producidos por fuerzas aplicadas a la viga contenidas en un plano único. En la figura 5.23 se representan los convenios de signos generalmente admitidos para la fuerza cortante V y el momento flector M. Adviértase que, en virtud del principio de acción y reacción, los sentidos positivos de V y M están invertidos en las dos secciones. Pocas veces es posible, sin recurrir al cálculo, decir si la fuerza cortante y el momento flector en una determinada sección son positivos o negativos. Por esta razón, es aconsejable atribuir sentidos positivos a V y M en los diagramas de sólido libre y esperar a que los signos algebraicos de los valores calculados indiquen los sentidos verdaderos.

Como ayuda para interpretar físicamente el momento flector M, consideremos la viga de la figura 5.24 flexionada por dos momentos negativos iguales y opuestos aplicados en sus extremos. La sección de la viga se supone que es una doble T de alma estrecha y alas superior e inferior gruesas. En este caso podemos despreciar la carga que impone el alma frente a la de las alas. Es bien evidente que el ala superior se acorta y está sometida a compresión, mientras que el ala inferior se alarga y está sometida a tracción. La resultante de las dos fuerzas, una tracción y una compresión, es un par y el momento de éste es el momento flector que actúa sobre la sección. En una viga de sección recta diferente cargada del mismo modo, se tendría una distribución de fuerzas diferente en la sección, pero la resultante sería el mismo par.

La variación de la fuerza cortante V y el momento flector M a lo largo de una viga suministra una información necesaria para su diseño. En especial, el



Cortadura

Flexión

Torsión

Carga combinada

Figura 5.22

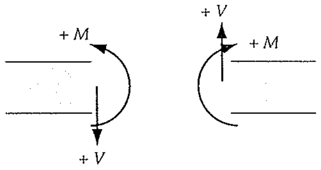


Figura 5.23

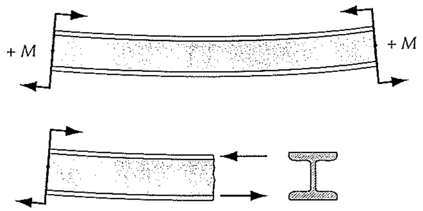


Figura 5.24

valor máximo del momento flector suele ser lo que primero se considera al diseñar o seleccionar una viga, por lo que deben determinarse su valor y posición. Las variaciones de cortantes y flectores se presentan mejor gráficamente y las representaciones gráficas de los valores de V y M en función de la distancia a lo largo de la viga dan lugar a los llamados *diagramas de fuerza cortante* y *momento flector* de la viga.

El primer paso en la determinación de las relaciones de cortantes y flectores es establecer los valores de todas las reacciones externas sobre la viga aplicando las ecuaciones de equilibrio al diagrama de sólido libre de toda la viga. Seguidamente, se aísla una parte de la viga, a la derecha o a la izquierda de una sección transversal cualquiera, mediante un diagrama de sólido libre y a éste se aplican las ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones darán expresiones para la fuerza cortante V y el momento flector M actuantes sobre la sección de la parte aislada de la viga. La parte de la viga en la que figure el menor número de fuerzas, a la derecha o a la izquierda de la sección efectuada, suele dar la solución más sencilla. No debe tomarse una sección transversal que pase por una carga concentrada o un par, pues esa posición representa un punto de discontinuidad en la variación de las cortantes o del momento flector. Por último, es importante advertir que los cálculos de V y M en cada sección elegida deben ser coherentes con el convenio de sentidos positivos que se ilustra en la figura 5.23.

(b) Relaciones generales entre carga, fuerza cortante y momento flector. Para las vigas con cargas distribuidas pueden establecerse ciertas relaciones generales que facilitan la obtención de las distribuciones de cortantes y flectores a lo largo de la viga. En la figura 5.25 se representa una porción de una viga cargada de la que se ha aislado un tramo elemental de longitud dx. La intensidad de carga p representa una fuerza por unidad de longitud de viga. En la posición x la fuerza cortante V y el momento flector M se han dibujado en sus sentidos positivos. En la otra cara del elemento, cuya coordenada es $x + dx$, esas cantidades se han dibujado asimismo en sus sentidos positivos, pero en ese caso serán $V + dV$ y $M + dM$, ya que V y M varían con x. La intensidad p de la carga aplicada podemos considerarla constante de un extremo a otro del elemento, pues la longitud de éste es una cantidad diferencial y el efecto de la variación de p desaparece en el límite en comparación con el efecto de p por sí misma.

El equilibrio del elemento exige que la suma de las fuerzas verticales sea cero. Así pues,

$$V - p\,dx - (V + dV) = 0$$

o sea

$$\boxed{p = -\frac{dV}{dx}} \qquad \textbf{(5.10)}$$

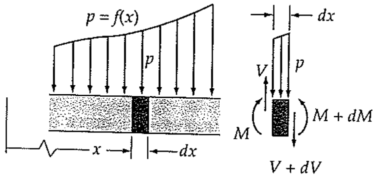


Figura 5.25

Según (5.10) la pendiente del diagrama de fuerza cortante debe ser igual en todos los puntos al valor de la intensidad de la carga aplicada cambiada de signo. La igualdad 5.10 es válida a uno y otro lado de una carga concentrada, pero no en el punto donde esté aplicada esa carga a causa de la discontinuidad debida al brusco cambio en el valor de la fuerza cortante.

Integrando 5.10 podremos expresar la fuerza cortante V en función de la distribución de carga p. Es decir

$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_{x_0}^{x} p\, dx$$

o sea

$$V = V_0 - (\text{Área delimitada por la curva de carga entre } x_0 \text{ y } x) \qquad \textbf{(5.10a)}$$

En esta expresión V_0 es la fuerza cortante en x_0 y V es la fuerza cortante en x. Medir el área delimitada por la curva de carga suele ser un modo sencillo de construir el diagrama de la fuerza cortante.

El equilibrio del elemento de la figura 5.25 exige también que la suma de los momentos sea cero. Tomando momentos respecto al extremo izquierdo del elemento se tiene

$$M + p\,dx\frac{dx}{2} + (V + dV)dx - (M + dM) = 0 \qquad \textbf{(5.10b)}$$

Los dos M se eliminan y los términos $p(dx)^2/2$ y $dV\,dx$ pueden despreciarse por ser infinitésimos de orden superior a los otros términos. Queda, pues, simplemente

$$\boxed{V = \frac{dM}{dx}} \qquad \textbf{(5.11)}$$

que expresa que en todos los puntos la fuerza cortante es igual a la pendiente de la curva del momento cambiada de signo. La igualdad 5.11 es válida a cada lado de un par concentrado, pero no en el punto donde esté aplicado el par a causa de la discontinuidad por el brusco cambio en el valor del momento.

Ahora podemos expresar el momento M en función de la fuerza cortante integrando 5.11. Entonces

$$\int_{M_0}^{M} dM = -\int_{x_0}^{x} V\, dx$$

o sea

$$M = M_0 (\text{Área delimitada por la curva de cortantes entre } x_0 \text{ y } x)$$

En esta expresión M_0 es el momento flector en x_0 y M es el momento flector en x. En el caso de una viga que tenga un momento externo M_0 aplicado en $x_0 = 0$, el momento total en una sección cualquiera será igual y de signo contrario al área limitada por el diagrama de cortantes hasta la sección considerada. La manera más sencilla de construir el diagrama de momentos flectores suele ser medir el área limitada por el diagrama de cortantes.

Cuando V se anule en algún punto siendo función continua de x con $dV/dx \neq 0$, el momento flector M será máximo o mínimo, pues en ese punto

$dM/dx = 0$. También pueden aparecer valores críticos de M cuando V cruce el eje de abscisas en una discontinuidad, lo que ocurre en el caso de vigas sometidas a cargas concentradas.

En las ecuaciones 5.10 y 5.11 puede verse que el grado de V respecto a x es superior en una unidad al de p. También el grado de M es superior en una unidad al de V. Además, el grado de M respecto a x es superior en dos unidades al de p. Así, para una viga cargada con $p = kx$, que es de primer grado en x, la fuerza cortante es de segundo grado en x y el momento flector es de tercer grado en x.

Las ecuaciones 5.10 y 5.11 se pueden combinar para dar

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p \tag{5.12}$$

Así, si p es una función conocida de x, podrá obtenerse el momento M mediante dos integraciones, siempre que en cada una de ellas se fijen adecuadamente los límites de integración. Este método será utilizable solamente cuando p sea función continua de x[1].

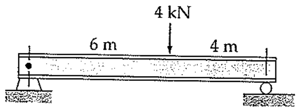
Cuando en una viga se presente flexión en más de un plano, debe realizarse un análisis separado en cada plano. Los resultados podrán luego componerse vectorialmente.

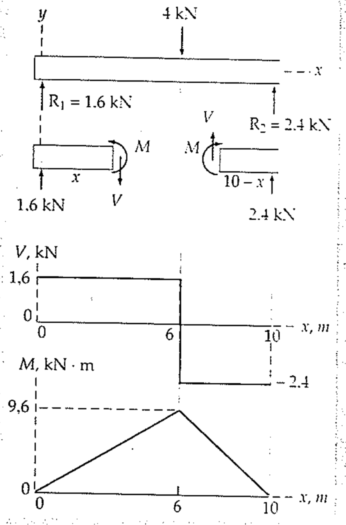
---

[1] Cuando p es una función discontinua de x, se puede introducir un conjunto especial de expresiones denominadas *funciones singulares* que permiten escribir ecuaciones analíticas de la fuerza cortante V y del momento M a lo largo de un intervalo de discontinuidades. En esta obra no se tratan estas funciones.

PROBLEMA TIPO 5.11

Determinar las distribuciones de fuerzas cortantes y momentos flectores producidos en la viga simplemente apoyada por la carga concentrada de 4 kN.





Solución. Mediante el diagrama de sólido libre de la viga completa, determinamos las reacciones en los apoyos que son

$$R_1 = 1{,}6\ \text{kN} \qquad R_2 = 2{,}4\ \text{kN}$$

A continuación aislamos un tramo de viga de longitud x y representamos su diagrama de sólido libre sobre el que indicamos los sentidos positivos de la fuerza cortante V y el momento flector M. Para que haya equilibrio ha de ser

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 1{,}6 - V = 0 \qquad V = 1{,}6\ \text{kN}$$
$$[\Sigma M_{R_1} = 0] \qquad M + 1{,}6x = 0 \qquad M = -1{,}6x$$

① Estos valores de V y M son válidos para todas las secciones de la viga situadas a la izquierda de la carga de 4 kN.

De la misma forma, aislamos ahora una parte de la viga situada a la derecha de la carga de 4 kN y dibujamos su diagrama de sólido libre indicando los sentidos positivos de V y M. Las ecuaciones de equilibrio nos dan

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad V + 2{,}4 = 0 \qquad V = -2{,}4\ \text{kN}$$
$$[\Sigma M_{R_2} = 0] \qquad -(2{,}4)(10 - x) + M = 0 \qquad M = 2{,}4(10 - x)$$

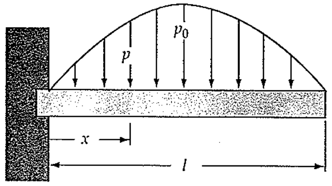
Estos valores sólo son válidos para las secciones de la viga situadas a la derecha de la carga de 4 kN.

Los valores de V y M se representan gráficamente como se indica. Vemos que el momento flector máximo (en valor absoluto) se produce en el punto donde la fuerza cortante cambia de signo (o sea, de sentido). Si partiendo de $x = 0$ nos desplazamos hacia la derecha a lo largo de la viga, vemos que M no es sino el valor acumulado del área delimitada por el diagrama de cortantes.

① Hemos de tener cuidado de no tomar la sección por una carga concentrada (como por ejemplo $x = 6$m) puesto que las expresiones de fuerza cortante y del momento implican discontinuidades en tales posiciones.

PROBLEMA TIPO 5.12

La viga en voladizo soporta la carga repartida (fuerza por unidad de longitud) $p = p_0 \operatorname{sen} (\pi x/l)$. Determinar la fuerza cortante V y el momento flector M como funciones del cociente x/l.



Solución. Se comienza por dibujar el diagrama de sólido libre de la viga completa, para calcular así la fuerza cortante V_0 y el momento flector M_0 que actúan en el extremo empotrado (o sea, en $x = 0$). V_0 y M_0 se representan con los sentidos que se han convenido como positivos. Imponiendo la condición de equilibrio a las fuerzas verticales

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad V_0 - \int_0^l p\, dx = 0 \qquad V_0 = \int_0^l p_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}\, dx = \frac{2p_0 l}{\pi}$$

① Imponiendo la condición de equilibrio a los momentos respecto al extremo izquierdo ($x = 0$):

$$[\Sigma M = 0] \qquad -M_0 - \int_0^l x(p\, dx) = 0 \qquad M_0 = -\int_0^l p_0 x \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}\, dx$$

$$M_0 = \frac{-p_0 l^2}{\pi^2}\left[\operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} - \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{l}\right]_0^l = -\frac{p_0 l^2}{\pi}$$

① Dada la simetría, es evidente en este caso que la resultante $R = V_0 = 2p_0 l/\pi$ de la distribución de carga actúa en el centro de la viga, por lo que la ecuación de momentos es simplemente $M_0 = -Rl/2 = -p_0 l^2/\pi$. Esto quiere decir que, en la realidad, el momento flector en $x = 0$ tiene el mismo sentido que el atribuido en el diagrama de sólido libre.

② El diagrama de sólido libre nos recuerda que los límites de integración de V, y también los de x, deben tenerse en cuenta. Vemos que la expresión de V es positiva, por lo que la fuerza cortante tiene el sentido con el que se ha representado en el diagrama de sólido libre.

Con un diagrama de sólido libre de un tramo de longitud arbitraria x, la integración de la ecuación 5.10 permite hallar la fuerza cortante interna de la viga. O sea,

② $[dV = -pdx]$

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\int_0^x p_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}\, dx$$

$$V - V_0 = \left[\frac{p_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l}\right]_0^x \qquad V - \frac{2p_0 l}{\pi} = \frac{p_0 l}{\pi}\left(\cos \frac{\pi x}{l} - 1\right)$$

o bien, en forma adimensional

$$\frac{V}{p_0 l} = \frac{1}{\pi}\left(1 + \cos \frac{\pi x}{l}\right) \qquad \text{Resp.}$$

El momento flector se obtiene integrando la ecuación 5.11, lo que da

$[dM = Vdx]$

$$\int_{M_0}^{M} dM = \int_0^x \frac{p_0 l}{\pi}\left(1 + \cos \frac{\pi x}{l}\right) dx$$

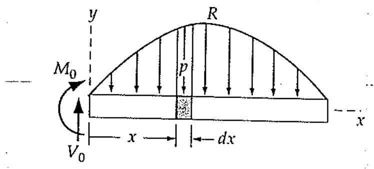
$$M - M_0 = \frac{p_0 l}{\pi}\left[x + \frac{l}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}\right]_0^x$$

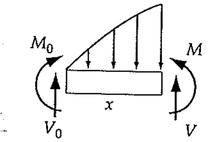
$$M = -\frac{p_o l^2}{\pi} + \frac{p_0 l}{\pi}\left[x + \frac{l}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} - 0\right]$$

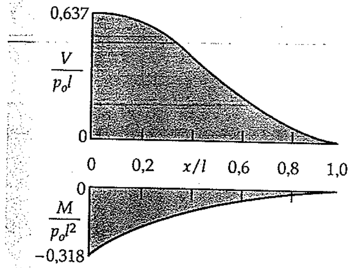
o bien, en forma adimensional

$$\frac{M}{p_0 l^2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}\right)$$

En las ilustraciones inferiores se representan las variaciones de $V/p_0 l$ y $M/p_0 l^2$. Los valores de $M/p_0 l^2$ resultan positivos, lo que significa que el momento flector tiene realmente el mismo sentido que se le atribuyó.

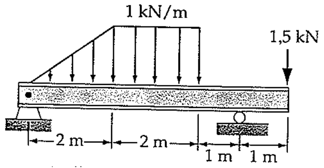






PROBLEMA TIPO 5.13

Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada y determinar el momento máximo M y su posición x respecto al extremo izquierdo.



Solución. El procedimiento más sencillo para hallar las reacciones en los apoyos es considerar las resultantes de las cargas distribuidas tal como se muestran en el diagrama de sólido libre de la viga completa. Se analiza el primer intervalo de la viga mediante el diagrama de sólido libre correspondiente a la sección en que $0 < x < 2$ m. La suma de las fuerzas (verticales) y la suma de los momentos dan

$[\sum F_y = 0]$ $\quad V = 1{,}23 - 0{,}25x^2$

$[\sum M = 0]$ $\quad M + (0{,}25x^2)\frac{x}{3} - 1{,}23x = 0 \qquad M = 1{,}23x - 0{,}0833x^3$

Estos valores de V y M son válidos para $0 < x < 2$ m y se representan gráficamente en los diagramas de cortantes y flectores de la figura.

En el diagrama de sólido libre del tramo $2 < x < 4$ m el equilibrio de las fuerzas (verticales) y el de la suma de momentos respecto al corte dan

$[\sum F_y = 0]$ $\quad V + 1(x-2) + 1 - 1{,}23 = 0 \qquad V = 2{,}23 - x$

$[\sum M = 0]$ $\quad M + 1(x-2)\frac{x-2}{2} + 1[x - \frac{2}{3}(2)] - 1{,}23x = 0$

$$M = -0{,}667 + 2{,}23x - 0{,}50x^2$$

Estos valores de V y M se representan gráficamente en los diagramas de cortantes y flectores para el intervalo $2 < x < 4$ m.

El análisis del resto de la viga prosigue con el diagrama de sólido libre de la porción de viga que queda a la derecha de una sección del intervalo siguiente. Obsérvese que V y M están representados con sus sentidos positivos. El equilibrio de las fuerzas (verticales) y el de los momentos dan

$$V = -1{,}77 \text{ kN} \qquad \text{y} \qquad M = 7{,}33 - 1{,}77x$$

Estos valores de V y M están representados en los diagramas de cortantes y flectores para el intervalo $4 < x < 5$ m.

El último intervalo puede examinarse a simple vista. La fuerza cortante es constante y vale +1,5 kN y el momento flector obedece a una relación lineal que empieza con el valor cero en el extremo derecho de la viga.

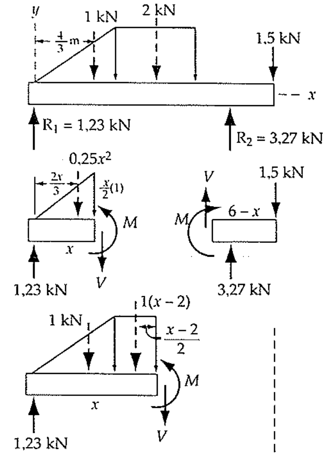
El momento flector máximo se presenta en $x = 2{,}23$ m, punto en que la curva de cortantes corta al eje de abscisas y el valor de M se obtiene sustituyendo ese valor de x en la expresión de M correspondiente al segundo intervalo. El momento máximo es

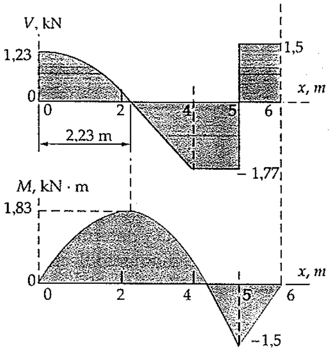
$$M = 1{,}83 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Como antes, obsérvese que el momento flector M en una sección cualquiera es igual al área (con el signo cambiado) delimitada por el diagrama de cortantes hasta la sección considerada. Por ejemplo, para $x < 2$ m,

$[\Delta M = \int V\, dx]$ $\quad M - 0 = \int_0^x (1{,}23 - 0{,}25x^2)\, dx$

y, como antes, $\quad M = -1{,}23x + 0{,}0833x^3$





PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.115 Determinar las distribuciones de cortantes y flectores que en la viga produce la carga concentrada ¿Cuánto valen la fuerza cortante y el momento flector en el punto $x = l/2$?

Resp. $V = P/3$ $M = Pl/6$

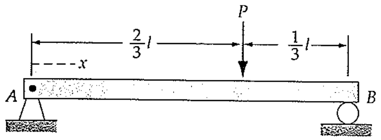


Figura problema 5.115

5.116 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga en voladizo.

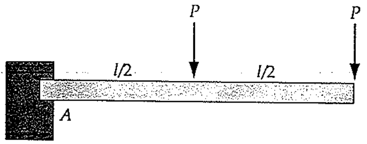


Figura problema 5.116

5.117 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada y determinar la distancia d al extremo A del punto en que el momento flector se anula.

Resp. $d = 2{,}67$ m

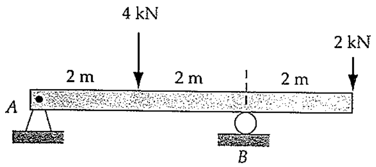


Figura problema 5.117

5.118 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada por la fuerza F aplicada, como se muestra, a la pieza vertical soldada al extremo derecho.

5.119 El puntal angular está soldado al extremo C de la viga en doble T y soporta la carga vertical de 1,6 kN. Hallar el momento flector en B y la distancia x a la izquierda de C a la que es nulo el momento flector. Construir también el diagrama de flectores.

Resp. $M_B = 0{,}40$ kN · m $x = 0{,}2$

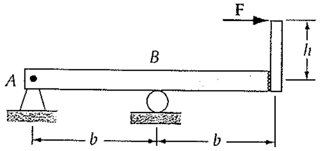


Figura problema 5.118

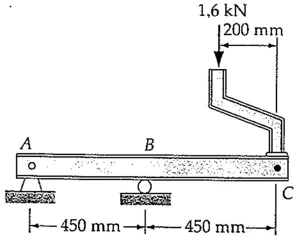


Figura problema 5.119

5.120 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada uniformemente y hallar el momento flector máximo M.

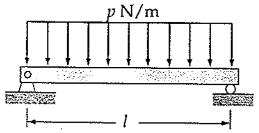


Figura problema 5.120

5.121 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada y hallar el valor máximo M_{max} del momento flector.

Resp. $M_{\text{max}} = -10$ kN · m

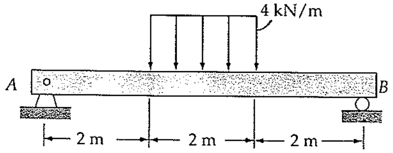


Figura problema 5.121

Problemas representativos

5.122 Construir el diagrama de momentos flectores del árbol en voladizo AB del conjunto rígido de la figura.

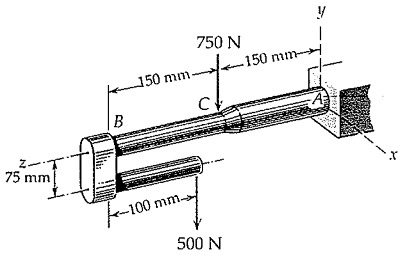


Figura problema 5.122

5.123 La viga en doble T soporta la fuerza de 4,5 kN y el par de 3 kN · m, aplicado éste al puntal de 1,5 m soldado al extremo de la viga. Calcular la fuerza cortante V y el momento M en la sección equidistante de A y B.

Resp. $V = 6{,}6$ kN $M = 0{,}3$ kN · m

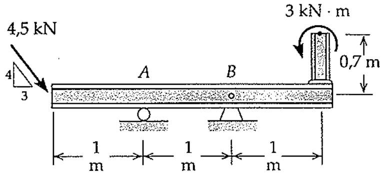


Figura problema 5.123

5.124 Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada por la fuerza de 2 kN y el par de 1,6 kN · m.

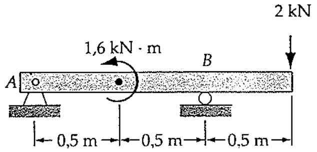


Figura problema 5.124

5.125 Un elemento sensor de nave espacial está compuesto de dos plaquitas rígidamente conectadas al resorte de lámina A que permanece doblado cuando el sensor está en posición retraída y que retorna a su posición extendida (línea de trazos) cuando se suelta el alambre de retención B. Si en la posición retenida la tracción en el alambre es de 20 N, hallar los correspondientes momento flector M, compresión C y fuerza cortante V en el resorte en el punto de unión D con la plaquita. Hallar asimismo el momento flector M_A en el punto A del resorte. Supóngase que la nave se encuentra muy alejada de la Tierra.

Resp. $M = -0{,}866$ N · m $C = 10$ N $V = 17{,}32$ N
$M_A = -1{,}2$ N · m

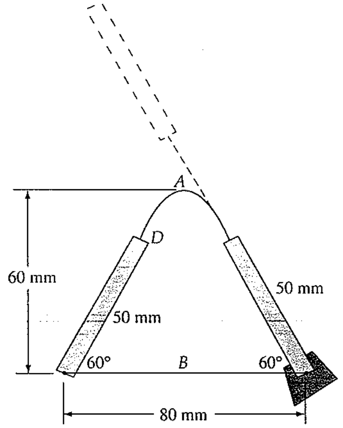


Figura problema 5.125

5.126 Una viga curva en voladizo tiene forma de cuadrante de circunferencia. Determinar las expresiones de la fuerza cortante V y del momento flector M en función de θ.

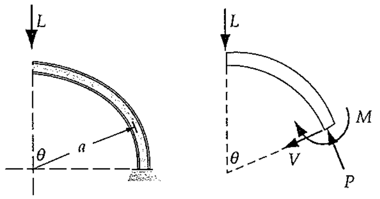


Figura problema 5.126

5.127 Escribir las expresiones del momento torsor T y del momento flector M de la viga curva en forma de cuadrante de circunferencia sometida a la carga L en su extremo. Utilizar una notación acorde con el sistema de coordenadas a derechas asignando a los momentos un sentido positivo coincidente con el sentido de las coordenadas positivas.

Resp. $M = -La\cos\theta$ $T = La(1 - \operatorname{sen}\theta)$

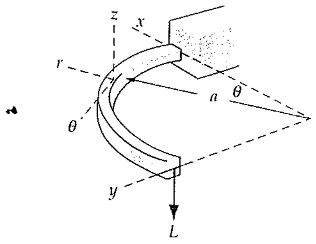


Figura problema 5.127

5.128 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga en voladizo sometida a la carga linealmente variable y especificar el momento flector M_A en el empotramiento A.

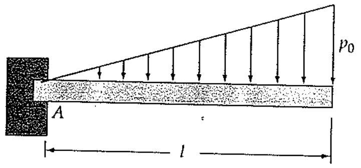


Figura problema 5.128

5.129 Se repite la viga del problema 5.97. Determinar sus diagramas de fuerza cortante y momento flector y especificar los valores de V y M en la sección central.

Resp. $V = 4{,}8 - 0{,}6x$ kN $\quad M = 0{,}3(8 - x)^2$ kN · m
$V = 2{,}4$ kN $\quad M = 4{,}8$ kN · m

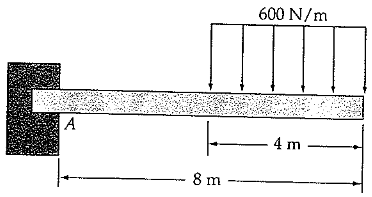


Figura problema 5.129

5.130 Se repite la viga del problema 5.100. Dibujar sus diagramas de fuerza cortante y momento flector y especificar los valores de V y M a 3 m del empotramiento A.

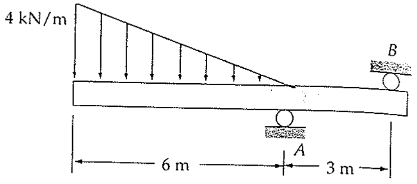


Figura problema 5.130

5.131 Se repite la viga del problema 5.110. Dibujar sus diagramas de fuerza cortante y momento flector y especificar los valores de V y M en el centro.

Resp. $V = 1{,}6$ kN $\quad M = 2{,}33$ kN · m

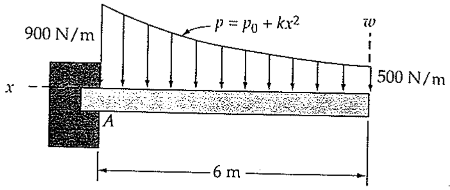


Figura problema 5.131

5.132 Se repite la viga en voladizo del problema 5.111. Deducir las expresiones de la fuerza cortante V y el momento flector M en función de x.

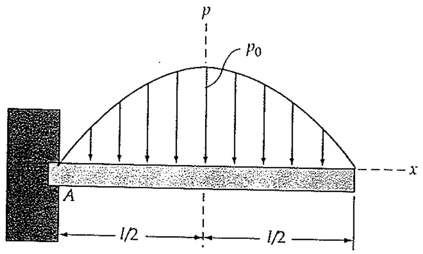


Figura problema 5.132

5.133 Determinar el momento flector máximo M y el valor correspondiente de x en el puente grúa e indicar en qué sección se ejerce ese momento.

Resp. $M_A = \dfrac{L}{4l}(l - a)^2 \qquad x = \dfrac{a + l}{2}$

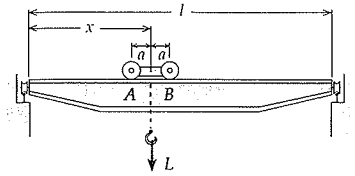


Figura problema 5.133

5.134 Representar gráficamente los diagramas de cortantes y flectores de la viga cargada a la vez con la carga repartida y la puntual ¿Cuánto valen la fuerza cortante y el momento flector en $x = 6$ m? Hallar el momento flector máximo M_{max}.

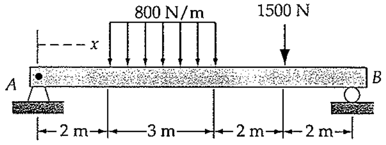


Figura problema 5.134

5.135 Repetir el problema 5.134 cambiando la fuerza de 1500 N por el par de 4,2 kN · m.

Resp. $V = -1400$ N $\quad M = 0 \quad M_{max} = -2800$ N · m

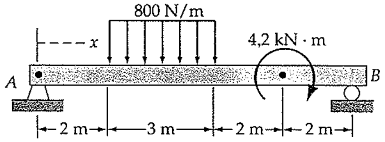


Figura problema 5.135

5.136 La viga curva en voladizo tiene forma de un cuarto de circunferencia y soporta una carga de p N/m aplicada a lo largo de su cara superior. Determinar el momento torsor T y el momento flector en función de θ.

Resp. $T = pr^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta - \cos\theta\right) \qquad M = pr^2(1 - \operatorname{sen}\theta)$

5.137 El árbol apoyado por su extremo está sometido a las cargas linealmente variables contenidas en planos ortogonales. Determinar la expresión del momento flector resultante M en el árbol.

Resp. $M = \dfrac{p_0}{6l}\, x(l - x)\sqrt{5l^2 - 2lx + 2x^2}$

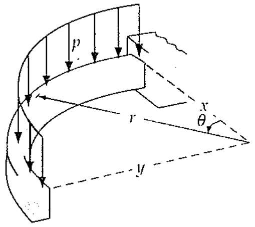


Figura problema 5.136

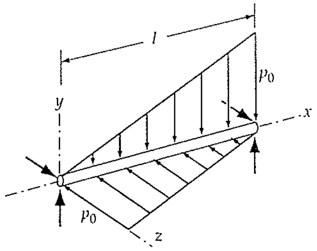


Figura problema 5.137

5.138 El miembro uniforme de masa m, en forma de un cuarto de circunferencia, yace en el plano vertical y está articulado en A mientras que en B se apoya en la pared vertical mediante un pequeño rodillo. Para una sección cualquiera S, escribir las expresiones de la fuerza cortante V, la compresión C y el momento flector M debidos al peso propio del miembro.

Resp. $V = \dfrac{2mg}{\pi}(\theta \operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$

$C = \dfrac{2mg}{\pi}(\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

$M = \dfrac{2mgr}{\pi}\theta\cos\theta$

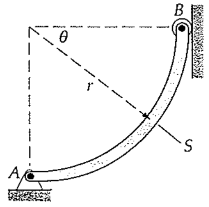


Figura problema 5.138

5.8 CABLES FLEXIBLES

Un tipo importante de miembro estructural es el cable flexible que se utiliza en puentes colgantes, líneas de transmisión, cables portantes de troles pesados o líneas telefónicas y en otras muchas aplicaciones. En el proyecto de estas estructuras es necesario conocer las relaciones entre tensión, longitud de tramo, flecha y longitud de los cables. Estas cantidades se determinan examinando el cable como un cuerpo en equilibrio. En el análisis de cables flexibles se supone despreciable toda resistencia opuesta a la flexión. Esta hipótesis significa que la fuerza en el cable tendrá siempre la dirección de éste.

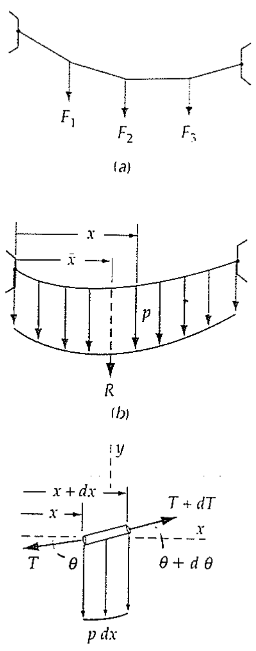


Figura 5.26

Los cables flexibles pueden soportar una serie de cargas concentradas, tal como en la figura 5.26*a*, o bien cargas distribuidas de modo continuo a lo largo de su longitud, como la carga p de intensidad variable en la figura 5.26*b*. En algunos casos, el peso del cable es despreciable frente a las cargas que soporta, y en otros el peso del cable puede constituir una carga apreciable e incluso la única, en cuyo caso no puede despreciarse. Independientemente de cuál de estas condiciones sea la existente, los requisitos de equilibrio del cable deberán formularse de la misma manera.

(a) Relaciones generales. Si la intensidad de la carga variable y continua aplicada al cable de la figura 5.26*b* se expresa como p unidades de fuerza por metro de longitud horizontal x de cable, la resultante R de la carga vertical será

$$R = \int dR = \int p\, dx$$

donde la integración se extiende al intervalo considerado. La posición de R la determinamos mediante el principio de los momentos

$$R\bar{x} = \int x\, dR \qquad \bar{x} = \frac{\int x\, dR}{R}$$

La carga elemental $dR = p\,dx$ está representada por una franja elemental de longitud vertical p y anchura dx del área sombreada del diagrama de carga y R está representada por el área total. De las expresiones anteriores resulta que R pasa por el *centroide* del área sombreada.

La condición de equilibrio del cable se satisfará si cada elemento infinitesimal de cable está en equilibrio. En la figura 5.26*c* puede verse el diagrama de sólido libre de un elemento diferencial. La tensión del cable en una posición genérica x es T y el cable forma un ángulo θ con la dirección horizontal x. En la posición $x + dx$ la tensión es $T + dT$ y el ángulo es $\theta + d\theta$. Obsérvese que las variaciones de T y de θ se toman ambas positivas para una variación positiva de x. La carga vertical $p\,dx$ completa el diagrama de sólido libre. El equilibrio de las fuerzas verticales y el de las horizontales requieren, respectivamente, que

$$(T + dT)\,\mathrm{sen}(\theta + d\theta) = T\ \mathrm{sen}\ \theta + p dx$$
$$(T + dT)\cos(\theta + d\theta) = T\cos\theta$$

Los desarrollos trigonométricos del seno y el coseno de la suma de dos ángulos y las sustituciones sen $d\theta = d\theta$ y cos $d\theta = 1$, válidas en el límite cuando $d\theta$ tiende a cero, dan

$$(T + dT)(\,\mathrm{sen}\ \theta + \cos\ \theta d\theta) = T\ \mathrm{sen}\ \theta + p dx$$
$$(T + dT)(\cos\ \theta - \mathrm{sen}\ \theta d\theta) = T\cos\theta$$

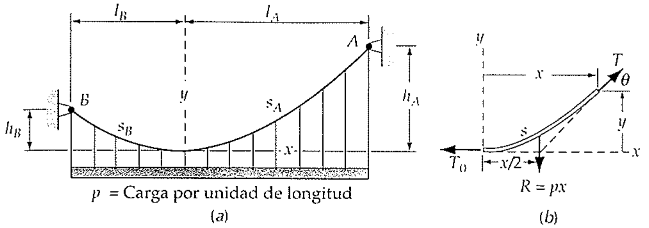


Figura 5.27

Desechando los infinitésimos de segundo orden y simplificando resulta

$$T\cos\ \theta d\theta + dT\ \mathrm{sen}\ \theta = p\, dx$$
$$-T\ \mathrm{sen}\ \theta d\theta + dT\cos\ \theta = 0$$

que podemos escribir como

$$d(T\ \mathrm{sen}\ \theta) = p\, dx \qquad \text{y} \qquad d(T\cos\theta) = 0$$

La segunda de estas relaciones expresa el hecho de que la componente horizontal de T permanece invariable, lo cual resulta evidente en el diagrama de sólido libre. Si empleamos el símbolo $T_0 = T\cos\theta$ para representar esa fuerza horizontal constante, en la primera de las dos relaciones recién obtenidas podemos hacer la sustitución $T = T_0/\cos\theta$ y escribir $d(T_0\ tg\ \theta) = p\, dx$. Pero tg $\theta = dy/dx$, por lo que la ecuación de equilibrio podremos escribirla

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0} \tag{5.13}$$

Esta ecuación 5.13 es la llamada *ecuación diferencial* del cable flexible. La solución a esta ecuación será una relación funcional $y = f(x)$ que la satisfaga y satisfaga asimismo las condiciones en los extremos fijos del cable, llamadas *condiciones en los límites*. Esta relación define la forma del cable, y vamos a emplearla para resolver dos importantes casos límite de cables cargados.

(b) Cable parabólico. Cuando es constante la intensidad p de la carga vertical, la descripción se aproxima mucho a la de un puente colgante en el que el peso uniforme de la calzada puede expresarse por la constante p. El peso del cable no se distribuye uniformemente según la horizontal, pero se desprecia por ser relativamente pequeño. Para este caso límite vamos a ver que el cable adopta la forma de un arco de parábola. Empecemos considerando el cable de la figura 5.27*a*, suspendido de dos puntos A y B que no se hallan en la misma horizontal. El origen de coordenadas lo colocamos en el punto más bajo del cable, donde la tensión horizontal es T_0. Integrando 5.13 una vez respecto a x resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px}{T_0} + C$$

donde C es una constante de integración. En los ejes coordenados que hemos tomado, $dy/dx = 0$ para $x = 0$, con lo que $C = 0$. Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px}{T_0}$$

que define la pendiente de la curva como función de x. Una nueva integración da

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{px}{T_0}\,dx \qquad \text{o sea} \qquad y = \frac{px^2}{2T_0} \tag{5.14}$$

Debe comprobar el lector que se llega al mismo resultado mediante una integral indefinida cuya constante se evalúe. La ecuación 5.14 da la forma del cable que es, evidentemente, una parábola vertical. La componente horizontal constante de la tensión del cable es la tensión de éste en el origen de coordenadas.

Introduciendo los valores correspondientes $x = l_A$ e $y = h_A$ en la ecuación 5.14 se tiene

$$T_0 = \frac{pl_A^2}{2h_A} \qquad \text{por tanto} \qquad y = h_A(x/l_A)^2$$

La tensión T se halla mediante un diagrama de sólido libre de una porción finita del cable (fig. 5.27*b*), en el cual ha de ser

$$T = \sqrt{T_0^2 + p^2x^2}$$

Eliminando T_0 se tiene

$$T = p\sqrt{x^2 + (l_A^2/2h_A)^2} \tag{5.15}$$

La tensión máxima se presenta en el punto $x = l_A$ y vale

$$T_{\text{max}} = pl_A\sqrt{1 + (l_A/2h_A)^2} \tag{5.15a}$$

La longitud s_A del cable, desde el origen hasta el punto A, la obtenemos integrando la expresión de la longitud de arco infinitesimal $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. O sea,

$$\int_0^{s_A} ds = \int_0^{l_A} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx = \int_0^{l_A} \sqrt{1 + (px/T_0)^2}dx$$

Aunque esta expresión puede integrarse exactamente, a efectos de su empleo para cálculos, es más práctico expresar el radical como serie convergente e integrar ésta término a término. Para ello empleamos el desarrollo binómico

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

que converge para $x^2 < 1$. Sustituyendo en esta serie x por $(px/T_0)^2$ y haciendo $n = \frac{1}{2}$ resulta la expresión

$$\begin{aligned} s_A &= \int_0^{l_A}\left(1 + \frac{p^2x^2}{2T_0^2} - \frac{p^4x^4}{8T_0^4} + \ldots\right)dx \\ &= l_A\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^4 + \ldots\right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

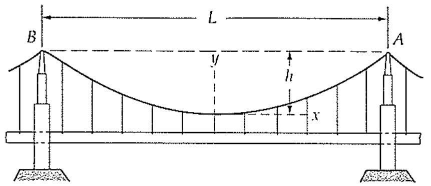


Figura 5.28

Esta serie converge para valores $h_A/l_A < \frac{1}{2}$, lo cual ocurre en la mayoría de los casos prácticos.

Las relaciones aplicables a la porción de cable comprendida entre el origen y el punto B pueden obtenerse sin más que sustituir h_A, l_A y s_A por h_B, l_B y s_B, respectivamente.

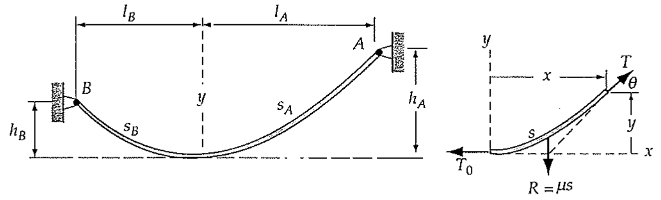
Para un puente colgante cuyas torres de suspensión se encuentren en la misma horizontal (fig. 5.28), la luz total es $L = 2l_A$, la flecha es $h = h_A$ y la longitud total del cable es $S = 2s_A$. Entonces, al sustituir por estos valores, la tensión máxima y la longitud total quedan

$$T_{\text{max}} = \frac{pL}{2}\sqrt{1 + (L/4h)^2} \tag{5.15b}$$

$$S = L\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{L}\right)^4 + \ldots\right] \tag{5.16a}$$

Esta serie converge para todos los valores de $h/L < \frac{1}{4}$. En la mayoría de los casos h es mucho menor que $L/4$, con lo cual los tres términos de 5.16*a* dan una aproximación suficientemente precisa.

(c) Catenaria. Consideremos ahora el cable uniforme de la figura 5.29*a* suspendido de dos puntos A y B que cuelga bajo la única acción de su propio peso. En la parte *b* de la figura se representa el diagrama de sólido libre de una porción finita del cable de longitud s medida desde el origen de coordenadas. Este diagrama de sólido libre difiere del de la figura 5.27*b* en que la fuerza vertical total que soporta es igual al peso del trozo de cable de longitud s y no al total de una carga uniformemente repartida respecto a la horizontal. Si es μ el peso del cable por unidad de su longitud, la resultante R de la carga será $R = \mu s$ y la



(*a*) (*b*)

Figura 5.29

carga vertical incremental $p\,dx$ de la figura 5.26c será aquí $\mu\,ds$. Haciendo esta sustitución en la ecuación diferencial 5/13, tendremos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx} \tag{5.17}$$

Como $s = f(x,y)$, habrá que transformar esta ecuación en otra que contenga sólo las dos variables.

Podemos sustituir por la identidad $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ para obtener

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{5.18}$$

La ecuación 5.18 es la ecuación diferencial de la curva (catenaria) que adopta el cable. La resolución de esta ecuación se facilita haciendo el cambio $p = dy/dx$, lo cual da

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\mu}{T_0}dx$$

La integración de esta ecuación da

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{\mu}{T_0}x + C$$

La constante C es nula puesto que $dy/dx = p = 0$ para $x = 0$. Sustituyendo $p = dy/dx$, pasando a la forma exponencial y simplificando el radical, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\mu x/T_0} - e^{-\mu x/T_0}}{2} = \operatorname{senh}\frac{\mu x}{T_0}$$

donde por comodidad se ha introducido la función hiperbólica[1]. Al integrar la pendiente resulta

$$y = \frac{T_0}{\mu}\cosh\frac{\mu x}{T_0} + K$$

La constante de integración K se calcula con la condición en el límite $x = 0$ para $y = 0$. Esta sustitución requiere que $K = -T_0/\mu$ y por lo tanto

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right) \tag{5.19}$$

Esta expresión 5.19 es la ecuación de la curva catenaria que el cable adopta al colgar bajo la acción exclusiva de su peso.

En el diagrama de sólido libre de la figura 5.29b se ve que $dy/dx = \operatorname{tg}\theta = \mu s/T_0$. Así pues, de la expresión anterior de la pendiente

$$s = \frac{T_0}{\mu}\operatorname{senh}\frac{\mu x}{T_0} \tag{5.20}$$

---

[1] Veánse los apartados C.8 y C.10 del apéndice C para la definición e integrales de las funciones hiperbólicas.

La tensión T del cable se obtiene mediante el triángulo de fuerzas en equilibrio de la figura 5.29b. Así pues,

$$T^2 = \mu^2s^2 + T_0^2$$

que, combinada con la ecuación 5.20, da

$$T^2 = T_0^2\left(1+\operatorname{senh}^2\frac{\mu x}{T_0}\right) = T_0^2\cosh^2\frac{\mu x}{T_0}$$

o sea,

$$T = T_0\cosh\frac{\mu x}{T_0} \tag{5.21}$$

La tensión puede también expresarse en función de y con ayuda de la ecuación 5.19, la cual, aplicada en la ecuación 5.21, da

$$T = T_0 + \mu y \tag{5.22}$$

Esta última indica que el incremento de la tensión del cable sobre la existente en el punto más bajo depende solamente de μy.

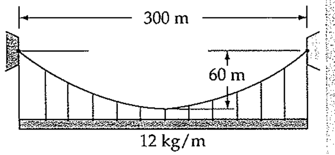
En la mayoría de los problemas de catenarias interviene la resolución de las ecuaciones comprendidas entre las ecuaciones 5.19 y 5.22, operación que puede realizarse mediante una aproximación gráfica o con ordenador. El método de resolución gráfica o con ordenador se ilustra en el problema tipo 5.15 que sigue a este apartado.

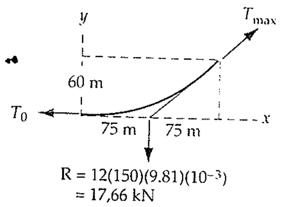
Los problemas de catenarias en los que la razón flecha/tramo sea pequeña pueden resolverse por aproximación haciendo uso de las relaciones desarrolladas para el cable parabólico. Una razón flecha/tramo reducida significa que el cable está tenso y la distribución uniforme del peso a lo largo del cable no difiere gran cosa de la misma intensidad de carga distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal.

En muchos problemas de catenarias o cables parabólicos los puntos de suspensión no están a la misma altura. En estos casos, las relaciones que acabamos de obtener podrán aplicarse a cada parte del cable que se hallen a uno y otro lado del punto más bajo.

PROBLEMA TIPO 5.14

El cable de peso despreciable soporta una masa de 12 kg por metro de longitud horizontal y cuelga de dos puntos separados 300 m y situados a la misma altura. Si la flecha es de 60 m, hallar la tensión en el punto medio, la tensión máxima y la longitud del cable.





① *Sugerencia*: Comparar este valor de T_{max} con el obtenido directamente del diagrama de sólido libre de la mitad derecha del cable mediante un polígono de fuerzas.

Solución. Como la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, es aplicable la teoría desarrollada en la parte *b* del apartado 5.8 y el cable toma forma parabólica. Con $h = 60$ m, $L = 300$ m y $p = 12(9{,}81)(10^{-3})$ kN/m, la expresión deducida de la ecuación 5.14 nos da la tensión en el punto medio

$$\left[T_0 = \frac{pL^2}{8h}\right] \qquad \left(T_0 = \frac{0{,}1177(300)^2}{8(60)}\right) = 22{,}07 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

La tensión máxima se produce en el punto medio y viene dada por 5.15*b*; o sea,

① $$\left[T_{max} = \frac{pL}{2}\sqrt{1+\left(\frac{L}{4h}\right)^2}\right]$$

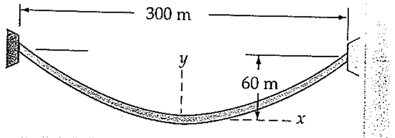
$$T_{max} = \frac{12(9{,}81)(10^{-3})(300)}{2}\sqrt{1+\left(\frac{300}{4(60)}\right)^2} = 28{,}27 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

El cociente flecha/claro es 60/300 = 1/5 < 1/4; por tanto, en este caso la serie 5.16*a* convergerá y la longitud total podemos escribirla

$$\begin{aligned} S &= 300\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^2-\frac{32}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^4+\dots\right] \\ &= 300[1+0{,}1067-0{,}01024+\dots] \\ &= 329 \text{ m} \end{aligned} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 5.15

Sustituir el cable del problema tipo 5.14, de peso despreciable y cargado uniformemente a lo largo de la horizontal, por otro cable de masa 12 kg por metro de longitud de cable y sometido únicamente a su propio peso. El cable cuelga de dos puntos separados 300 m situados a la misma altura y tiene una flecha de 60 m. Hallar la tensión en el punto medio, la tensión máxima y la longitud del cable.



Solución. Como la carga está distribuida uniformemente a lo largo de la longitud del cable, es aplicable la teoría desarrollada en la parte *c* del apartado 5.8 y el cable toma la forma de catenaria. En las expresiones 5.20, de la longitud, y 5.21, de la tensión, aparece la tensión mínima T_0 en el punto medio, la cual debe calcularse con la ecuación 5.19. Entonces, para $x = 150$ m e $y = 60$ m, con $\mu = 12(9{,}81)(10^{-3}) = 0{,}1177$ kN/m, se tiene

$$60 = \frac{T_0}{0{,}1177}\left[\cosh\frac{(0{,}1177)(150)}{T_0} - 1\right]$$

o sea

$$\frac{7{,}063}{T_0} = \cosh\frac{17{,}66}{T_0} - 1$$

Esta ecuación puede resolverse gráficamente. Para ello se representan gráficamente en función de T_0 ambos miembros de la ecuación. La igualdad se cumple en el punto en que ambas curvas se cortan, punto que determina el valor buscado de T_0. Esta construcción gráfica se muestra en la figura que acompaña a este problema y nos da la solución

$$T_0 = 23{,}2 \text{ kN}$$

Otra posibilidad sería escribir la ecuación así:

$$f(T_0) = \cosh\frac{17{,}66}{T_0} - \frac{7{,}063}{T_0} - 1 = 0$$

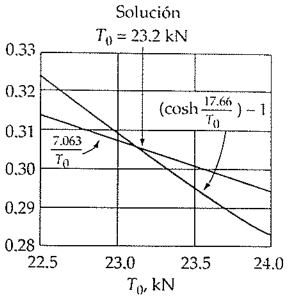
Y, entonces, escribir un programa para ordenador para calcular *R* en función de T_0. De este modo, el valor de T_0 buscado sería el correspondiente a $R = 0$.

La tensión máxima se da en el valor máximo de *y* y, según la ecuación 5.22, será

$$T_{max} = 23{,}2 + (0{,}1177)(60) = 30{,}2 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Según la ecuación 5.20 la longitud total del cable será

① $$2s = 2\frac{23{,}2}{0{,}1177}\,\text{senh}\,\frac{(0{,}1177)(150)}{23{,}2} = 330 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$



① Obsérvese que en el problema tipo 5.14 referente al cable parabólico se obtienen resultados muy próximos a los de éste, aun cuando la flecha sea muy elevada. Cuando la relación flecha/tramo es menor, la similitud de los resultados es todavía mayor.

PROBLEMAS

(En los problemas señalados con un asterisco (*) intervienen ecuaciones trascendentes que deben resolverse gráficamente o con ayuda de un ordenador.)

Problemas introductorios

5.139 El tramo principal del Puente Golden Gate, de San Francisco, tiene una longitud de 1280 m, una flecha de 143 m y una carga estática total de 310,8 kN por metro lineal horizontal. En esta cifra se incluyen los pesos de los dos cables principales que se suponen distribuidos uniformemente sobre la horizontal. El ángulo que forman los cables con la horizontal en el extremo de las torres es igual a cada lado de cada torre. Calcular la tensión T_0 de cada cable en el punto medio del tramo y la fuerza de compresión *C* que ejerce cada cable sobre el extremo de cada torre.

Resp. T_0 = 223 MN   C = 198,9 MN

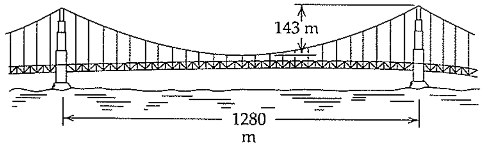


Figura problema 5.139

5.140 Calcular la tensión T_0 en el punto *A* del cable necesaria para soportar la carga uniformemente repartida respecto a la horizontal. Hallar asimismo el ángulo θ que forma el cable con la horizontal en el punto de amarre B.

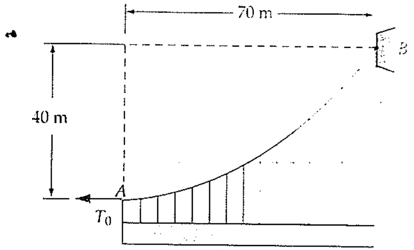


Figura problema 5.140

5.141 Un cable que pesa 40 newton por metro de longitud está sujeto al punto A y pasa por la pequeña polea B. Hallar qué masa m debe tener el cilindro sujeto al extremo del cable para que la flecha de éste sea de 10 m. Dado el valor del cociente flecha/tramo, puede emplearse la aproximación parabólica.
Resp. m = 480 kg

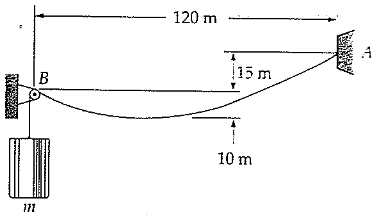


Figura problema 5.141

5.142 Un globo publicitario está amarrado a un poste con un cable de masa 0,12 kg/m. Bajo el viento, las tensiones del cable en A y B son, respectivamente, 110 y 230 N. Hallar a qué altura h se encuentra el globo.

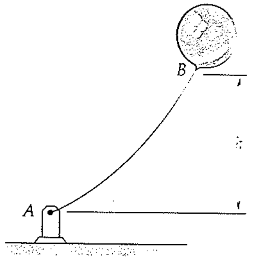


Figura problema 5.142

5.143 Un conducto de agua horizontal de 350 mm de diámetro cruza una cañada suspendido, tal como se muestra, de un cable. La conducción y el agua que transporta poseen una masa total de 1400 kg por metro de longitud. Calcular la compresión C que ejerce el cable sobre cada soporte. Los ángulos que forma el cable con la horizontal son iguales a ambos lados de los dos soportes.
Resp. C = 549 N

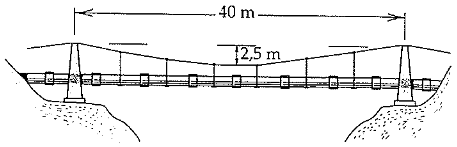


Figura problema 5.143

Problemas representativos

5.144 Un cable soporta una carga de 50 kg/m distribuida uniformemente respecto a la horizontal y está suspendido de dos puntos fijos situados como se indica. Hallar las tensiones máxima T y mínima T_0 del cable.

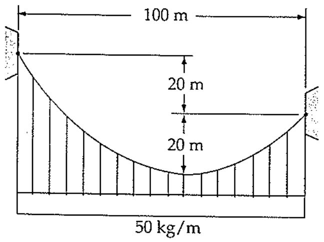


Figura problema 5.144

5.145 Se suspende un cable, de peso despreciable, de los puntos fijos indicados de modo que su pendiente sea nula en el punto más bajo. Si el cable soporta una carga p por unidad de longitud, la cual disminuye uniformemente con x desde p_0 hasta cero en la forma indicada, determinar la ecuación de la curva que adopta el cable.

Resp. $y = \dfrac{3hx^2}{2l^2}\left(1 - \dfrac{x}{3l}\right)$

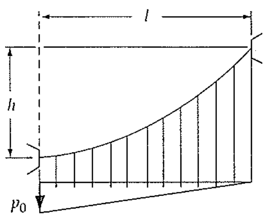


Figura problema 5.145

5.146 Desarrollar la ecuación 5.19 en serie de potencias de $\cosh(\mu x/T_0)$ y demostrar que la ecuación 5.14 se obtiene tomando solamente los dos primeros términos de la serie. (Véase el apartado C.8 del apéndice C para el desarrollo en serie de las funciones hiperbólicas.)

5.147 El cable ligero está amarrado a dos puntos de una misma horizontal separados una distancia L. Si la carga por unidad de longitud, según la dirección horizontal, que soporta el cable varía desde p_0, en el centro, hasta p_1, en los extremos, de acuerdo con la relación $p = a + bx^2$, deducir el valor de la flecha h del cable en función de la tensión T_0 correspondiente al punto medio de la luz.

Resp. $h = \dfrac{L^2}{48T_0}(5p_0 + p_1)$

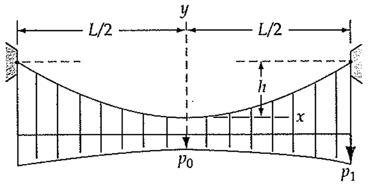


Figura problema 5.147

*5.148 Determinar la longitud total de cadena que ha de suspenderse de dos puntos situados en la misma horizontal y separados 10 m para que la flecha sea de 2 m.

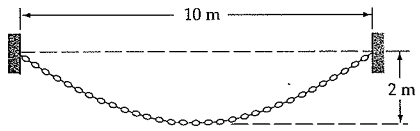


Figura problema 5.148

5.149 Una draga flotante está anclada en posición fija mediante un solo cable popa que en el punto de amarre A está horizontal y se extiende 250 m de distancia horizontal hasta su anclaje B en tierra. En A se precisa una tensión en el cable de 300 kN. Si la masa del cable es de 22 kg por metro de longitud, calcular la altura necesaria H que debe tener el anclaje sobre el nivel del mar y hallar la longitud del cable entre A y B.
Resp. H = 24.5 m s = 251 m

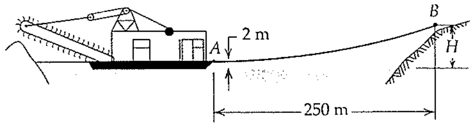


Figura problema 5.149

5.150 Resolver el problema 5.149 aproximando los resultados con las fórmulas del cable parabólico y comparar los resultados con los obtenidos en el problema 5.149.

*5.151 Calcular la tensión T necesaria para tirar uniformemente del cable que pasa por el rodillo de soporte del poste de tendido. Despréciense los rozamientos en el rodillo. El cable, que está horizontal en A, tiene una masa de 3 kg/m. Hallar también la longitud del cable entre A y B.
Resp. T = 1665 N s = 32,1 m

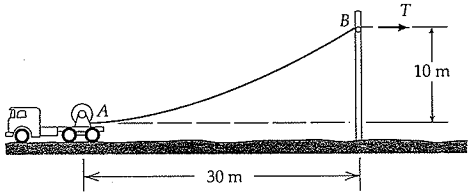


Figura problema 5.151

5.152 Para tender el ancla en el fondo de 30 m de agua, un pequeño remolcador invierte las hélices consiguiendo así un empuje hacia atrás P = 3,6 kN. Entre el ancla y la proa se ha soltado un total de 120 m de cadena. La masa de ésta es de 2,40 kg/m

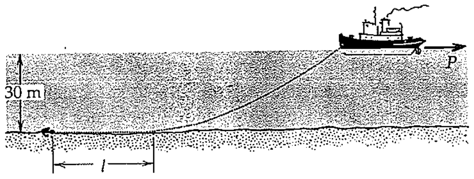


Figura problema 5.152

y la fuerza hacia arriba debida al empuje hidrostático es de 3,04 N/m. Calcular la longitud l de la cadena en contacto con el fondo.

*5.153 Una cuerda de 40 m de longitud se suspende entre dos puntos situados a un mismo nivel y separados 10 m. Calcular la distancia h al punto más bajo del seno.
Resp. h = 18,53 m

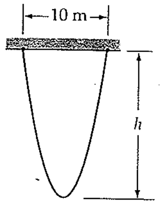


Figura problema 5.153

***5.154** El cable lleva sujetos un gran número de flotadores y la diferencia entre el empuje hidrostático y el peso es una fuerza neta hacia arriba de 30 newton por metro de longitud de cable. Hallar la fuerza T que debe aplicarse para que el cable adopte la forma representada.

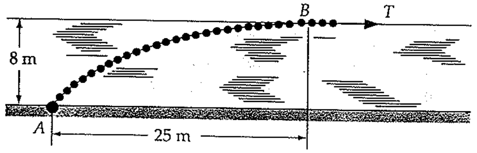


Figura problema 5.154

***5.155** Un cable flexible está amarrado al punto A y pasa por una pequeña polea situada en el punto B que se halla 200 m por encima de A. Si para hacer $\alpha = 0$ en A se precisa de una tensión T = 53 kN en B, determinar la masa ρ del cable por metro de longitud del mismo.
Resp. ρ = 8,58 kg/m

5.156 El dirigible está amarrado al torno del suelo y sometido a un viento suave, siendo 100 m la longitud del cable de amarre de 12 mm cuya masa es 0,51 kg/m. Para empezar a arrollar el cable hay que aplicar al torno un par de 400 N · m. En estas condiciones el cable forma un ángulo de 30° con la vertical en las proximidades del torno. Calcular la altura H a que se halla el dirigible. El diámetro del torno es de 0,5 m.

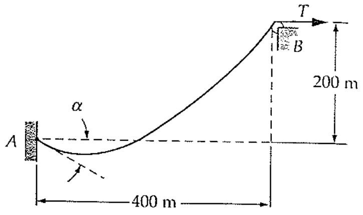


Figura problema 5.155

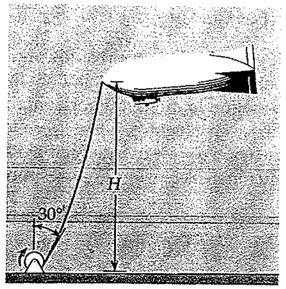


Figura problema 5.156

***5.157** Para preparar la limpieza a chorro de una pared, una persona dispone una manguera tal como se muestra en la figura. La manguera está horizontal en A y tiene una masa de 0,75 kg/m cuando está vacía y de 1,25 kg/m cuando está llena de agua. Determinar la tensión T y el ángulo θ necesarios tanto para la manguera vacía como llena.
Resp. T = 63,0 N (vacía) T = 105,0 N (llena)
θ = 40,0° en ambos casos

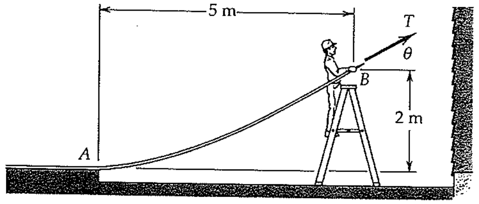


Figura problema 5.157

***5.158** Un cable con una masa de 15 kg/m está amarrado al punto A y pasa por la pequeña polea B situada en la misma horizontal que A. Hallar la flecha h y la longitud S del cable entre A y B sabiendo que el cable tiene aplicada una tracción de 12 kN en la polea.

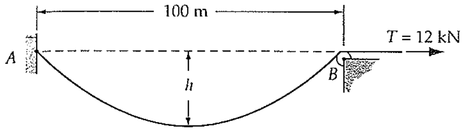


Figura problema 5.158

***5.159** El cable móvil de un remonte de esquí tiene una masa de 10 kg/m y transporta sillines y pasajeros regularmente espaciados, los cuales añaden una masa media de 20 kg/m a lo largo de todo el cable. Éste sale horizontal de la rueda portadora A. Calcular la tensión del cable en A y B y su longitud s entre esos dos puntos.
Resp. T_A = 27,4 kN T_B = 33,3 kN s = 64,2 m

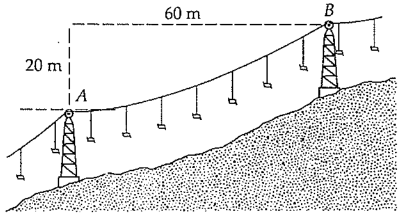


Figura problema 5.159

***5.160** Un cable que pesa 50 newton por metro de longitud está amarrado al punto A y pasa, sometido a la tracción T, por la pequeña polea B situada a la misma altura que A. Determinar el valor mínimo de T para sostener el cable y la correspondiente flecha h. (*Indicación*: Tómese $(T - \mu h)$ en el punto B como variable.)

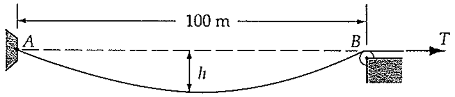


Figura problema 5.160

***5.161** Un cablero remolca un rastrillo A durante una inspección del lecho del océano que precede al tendido de un cable telefónico. El buque mantiene una velocidad constante a poca máquina con el rastrillo a una profundidad de 180 m con longitud de cable suficiente para que esté horizontal en su punto de unión con el rastrillo, el cual se encuentra a 480 m a popa del barco. El peso efectivo del cable es de 45,2 N/m una vez descontado el empuje del agua. Por otra parte, dado lo reducido de la velocidad pueden despreciarse las fuerzas actuantes sobre el cable debidas al movimiento. Calcular la fuerza horizontal T_0 aplicada al rastrillo y la máxima tensión del cable. Determinar asimismo la longitud del cable de arrastre entre los puntos A y B.
Resp. T_0 = 30,2 kN T_{max} = 38,3 kN s = 522 m

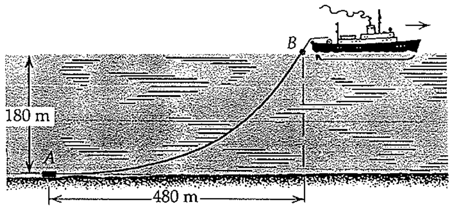


Figura problema 5.161

***5.162** Para marcar el recorrido en una regata de veleros se emplea la boya esférica de la figura. Una corriente de agua de izquierda a derecha produce un efecto de arrastre en la boya, aunque puede despreciarse el efecto sobre el cable. La longitud del cable entre los puntos A y B es de 87 m y la masa efectiva del cable es de 2 kg/m cuando se tiene en cuenta el empuje hidrostático. Determinar las tensiones en A y B.

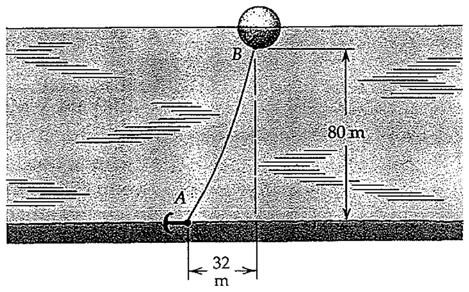


Figura problema 5.162

5.9 ESTÁTICA DE FLUIDOS

Hasta aquí, hemos enfocado nuestra atención a la acción de las fuerzas que actúan sobre y entre cuerpos sólidos. Este apartado se dedica al estudio del equilibrio de los cuerpos sometidos a fuerzas producidas por la presión de fluidos. Un fluido es toda sustancia continua que, en estado de reposo, es incapaz de soportar fuerzas cortantes. Una fuerza cortante es toda fuerza tangente a la superficie sobre la que actúa y aparece cuando en capas contiguas de fluidos las velocidades son diferentes. Es decir, un fluido en reposo sólo puede ejercer fuerzas perpendiculares a la superficie que lo limita. Los fluidos pueden ser gaseosos o líquidos. La Estática de los fluidos suele conocerse como *Hidrostática* cuando el fluido es un líquido y *Aerostática* cuando es un gas.

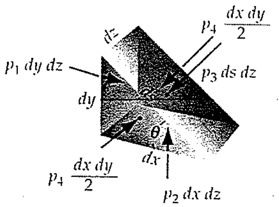


Figura 5.30

(a) Presión en un fluido. La presión en cualquier punto dado de un fluido se ejerce por igual en todas las direcciones (principio de Pascal). Para probarlo consideremos el equilibrio del prisma triangular infinitesimal de fluido de la figura 5.30. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 las presiones del fluido sobre las caras del elemento tal como se indica. Siendo la fuerza igual a la presión multiplicada por el área, el equilibrio de las fuerzas en las direcciones x e y nos da

$$p_2 dxdz = p_3 dsdz \cos\theta \qquad p_1 dydz = p_3 dsdz \operatorname{sen}\theta$$

Como $ds \operatorname{sen}\theta = dy$ y $ds \cos\theta = dx$, estas ecuaciones hacen que

$$p_1 = p_2 = p_3 = p$$

Rotando el elemento 90°, vemos que p_4 es también igual a las otras presiones. Por tanto, la presión en cualquier punto de un fluido se ejerce por igual en todas las direcciones. Es innecesario en este análisis tener en cuenta el peso del elemento de fluido ya que, si el peso por unidad de volumen (la densidad ρ multiplicada por g) se multiplica por el volumen del elemento, resulta un infinitésimo de tercer orden que puede despreciarse frente a los términos de presión y fuerza que son infinitésimos de segundo orden.

En todos los fluidos en reposo la presión es función de la dimensión vertical. Para determinar esta función consideremos las fuerzas que actúan sobre el elemento diferencial de columna de fluido de la figura 5.31, cuya sección transversal tiene una área dA. El sentido positivo de la coordenada vertical h se toma hacia abajo. La presión en la base superior es p, mientras que la presión en la base inferior será p más la variación infinitesimal dp, o sea, $p + dp$. El peso del elemento es ρg multiplicado por el volumen. No se representan las fuerzas perpendiculares a la superficie lateral, que son horizontales y no afectan al equilibrio de fuerzas en la dirección vertical. El equilibrio del elemento en la dirección h requiere

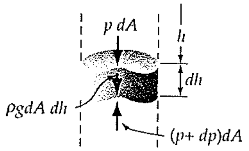


Figura 5.31

$$p\,dA + \rho g\,dA\,dh - (p + dp)dA = 0$$
$$dp = \rho g\,dh \tag{5.23}$$

Esta relación diferencial muestra que la presión en el seno de un fluido aumenta con la profundidad o disminuye con la altura. La ecuación 5.23 es aplicable tanto a líquidos como a gases y concuerda con nuestras observaciones cotidianas acerca de las presiones del aire y el agua.

Los fluidos que son esencialmente incompresibles se llaman líquidos y a efectos prácticos, en la mayoría de los casos, puede suponerse que su densidad ρ es constante en todos sus puntos. Siendo ρ constante, la ecuación 5.23 puede integrarse sin más y resulta

$$p = p_0 + \rho g h \tag{5.24}$$

La presión p_0 es la presión en la superficie del líquido, donde $h = 0$. Si p_0 es la presión atmosférica y el instrumento registra únicamente el incremento de presión por encima de la atmosférica, la medición corresponde a la llamada "presión manométrica" o "presión indicada" y vale $p = \rho g h$.

La unidad SI de presión comúnmente utilizada es el kilopascal (kPa), es decir un kilonewton por metro cuadrado (10^3 N/m^2). Al calcular una presión, si expresamos ρ en Mg/m^3, g en m/s^2 y h en metros, el producto $\rho g h$ dará kilopascal directamente. Por ejemplo, la presión a diez metros de profundidad de agua dulce es

$$p = \rho g h = \left(1{,}0\frac{\text{Mg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{ m}) = 98{,}1\left(10^3\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\,\frac{1}{\text{m}^2}\right)$$
$$= 98{,}1\text{ kN/m}^2 = 98{,}1\text{ kPa}$$

(b) Presión hidrostática sobre superficies rectangulares sumergidas. Una superficie sumergida en un líquido, como puede ser una válvula de aliviadero en una presa o la pared de un depósito, está sometida a una presión normal a su superficie y repartida por toda ella. En los problemas en que sean apreciables las fuerzas ejercidas por un fluido habrá que tener en cuenta la fuerza resultante debida a la distribución de la presión sobre la superficie y el punto dónde actúa esa resultante. En los sistemas abiertos a la atmósfera terrestre, la presión atmosférica p_0 se ejerce sobre todas las superficies y, por tanto, la resultante será nula. Así pues, sólo habrá que considerar el incremento sobre la presión atmosférica, al que hemos llamado "presión manométrica", que es $p = \rho g h$.

Consideremos el caso particular, pero frecuente, de la acción de la presión hidrostática sobre una placa rectangular sumergida en un líquido. En la figura 5.32*a* se representa una placa 1-2-3-4 con su borde superior horizontal e inclinada un ángulo θ cualquiera respecto a la vertical. La superficie horizontal del líquido es el plano x-y'. La presión (manométrica) del fluido que actúa normalmente al plano de la placa en el punto 2 está representada por el vector 6-2 y es igual al producto de ρg por la profundidad vertical desde la superficie del líquido hasta el punto 2. Esa misma presión se ejerce sobre todos los puntos del borde 2-3. En el punto 1 del borde inferior, la presión del fluido es igual al producto de ρg por la profundidad vertical correspondiente al punto1 y esa presión es la misma en todos los puntos del borde 1-4. La variación de la presión p sobre la superficie de la placa viene regida por la relación lineal con la profundidad y estará representada, por tanto, por el vector de la figura 5.32*b* que varía linealmente del valor 6-2 al 5-1. La fuerza resultante producida por esa distribución de la presión está representada por R, la cual se ejerce sobre un cierto punto P llamado *centro de presión*.

Está claro que las condiciones que prevalecen en la sección vertical 1-2-6-5 de la figura 5.32*a* son las mismas que en la sección 4-3-7-8 y en cualquier otra sección vertical que corte a la placa. Así pues, podremos analizar el problema

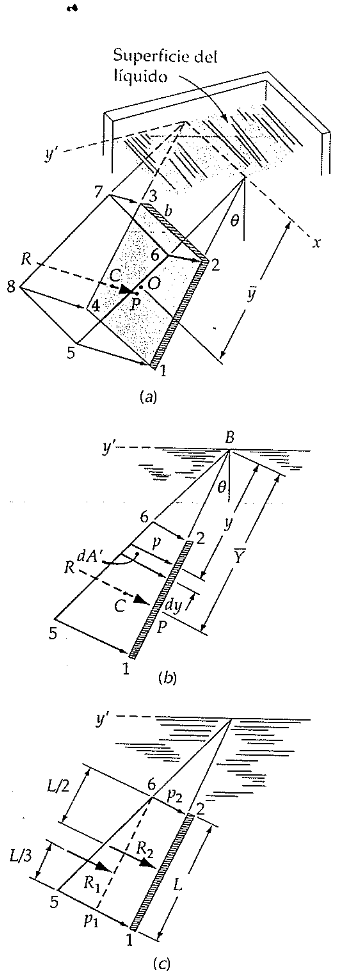


Figura 5.32

bidimensionalmente a partir de una sección vertical como la 1-2-6-5 de la figura 5.32*b*. En esta sección, la distribución de la presión es trapezoidal. Si es b la anchura horizontal de la placa medida normal al plano de la figura (dimensión 2-3 en la figura 5.32*a*), sobre el elemento de superficie $dA = b\,dy$ se ejercerá la presión $p = \rho g h$ y el incremento de la fuerza resultante es $dR = p\,dA = bp\,dy$. Pero $p\,dy$ no es más que el incremento sombreado del área trapezoidal dA', con lo que $dR = b\,dA'$. Por tanto, la fuerza resultante que se ejercerá sobre toda la placa podrá expresarse como el producto de la superficie trapezoidal 1-2-6-5 por la anchura $b$de la placa,

$$R = b\int dA' = bA'$$

Hay que tener cuidado en no confundir el área física A de la placa con el área geométrica A' definida por la distribución trapezoidal de la presión.

El área trapezoidal que representa la distribución de la presión se expresa fácilmente utilizando su altura media. Por tanto, la fuerza resultante R podrá escribirse en función de la presión media $p_{\text{med}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, multiplicándola por el área A de la placa. La presión media es también la presión existente a la profundidad media correspondiente al centroide O de la placa. Por tanto, otra expresión de R será

$$R = p_{\text{med}}A = \rho g\bar{h}A$$

donde $\bar{h} = \bar{y}\cos\theta$.

La recta soporte de la fuerza resultante R se obtiene aplicando el principio de los momentos. Tomando el eje x (punto B en la figura 5.32*b*) como eje de momentos, resulta $R\bar{Y} = \int y(pb\,dy)$. Sustituyendo $p\,dy = dA'$ y $R = bA'$ y eliminando b se tiene

$$\bar{Y} = \frac{\int y\,dA'}{\int dA'}$$

que no es sino la expresión de la coordenada centroidal del área trapezoidal A'. En la vista en dos dimensiones, por tanto, la resultante R pasa por el centroide C del área trapezoidal definida por la distribución de la presión en la sección vertical. Es evidente que $\bar{Y}$ ubica también el centroide C del prisma truncado 1-2-3-4-5-6-7-8 de la figura 5.32*a* por el que realmente pasa la resultante.

En las distribuciones trapezoidales de presión, el cálculo puede simplificarse dividiendo el trapezoide en un rectángulo y un triángulo como en la figura 5.32*c* y considerar por separado la fuerza que cada una de esas partes representa. La fuerza correspondiente a la porción rectangular actúa en el centro O de la placa y vale $R_2 = p_2A$, siendo A el área 1-2-3-4 de la placa. La fuerza R_1 que representa el incremento triangular de la distribución de presión es $\frac{1}{2}(p_1 - p_2)A$ y actúa, como se muestra, pasando por el centroide de la porción triangular.

(c) Presión hidrostática sobre superficies cilíndricas. En el caso de una superficie curva sumergida, la determinación de la resultante R debida a la presión distribuida requiere más cálculos que en el de una superficie plana. Como ejemplo consideremos la superficie cilíndrica sumergida representada en la figura 5.33*a*, cuyos elementos son paralelos a la superficie horizontal x-y' del líquido. Las secciones verticales normales a la superficie exhiben todas la misma curva AB y la misma distribución de presión. Por tanto, podremos utilizar la misma representación bidimensional de la figura 5.33*b*. Para hallar R por integración directa es necesario integrar las componentes x e y de dR a lo largo de la curva AB, ya que dR cambia de dirección de un punto a otro. Así pues,

$$R_x = b\int(p\,dL)_x = b\int p\,dy \qquad \text{y} \qquad R_y = b\int(p\,dL)_y = b\int p\,dx$$

A continuación, emplearemos una ecuación de momentos para determinar la posición de R.

Para determinar R hay otro procedimiento que suele ser más sencillo. Consideremos el equilibrio del bloque de líquido ABC situado justo encima de la superficie tal como se muestra en la figura 5.33*c*. La resultante R aparece entonces como la reacción (opuesta) que la superficie ejerce sobre el bloque de líquido. Las resultantes de las presiones a lo largo de AC y CB son P_y y P_x, respectivamente, y se obtienen fácilmente. El peso W del bloque de líquido se calcula a partir del área ABC de su sección, multiplicándola por la dimensión constante b y por el peso específico ρg. El peso W pasa por el centroide de la superficie ABC. La equilibrante R quedará entonces determinada mediante las ecuaciones de equilibrio aplicadas al diagrama de sólido libre del bloque de fluido.

(d) Presión hidrostática sobre superficies planas de forma cualquiera. En la figura 5.34*a* se representa una placa plana de una forma cualquiera sumergida en un líquido. La superficie horizontal de éste coincide con el plano x-y' y el plano de la placa forma un ángulo θ con la vertical. La fuerza que actúa sobre una franja horizontal de área dA paralela a la superficie del líquido es $dR = p\,dA = \rho gh\,dA$. La presión p tendrá el mismo valor en todos los puntos de la franja, pues ésta está horizontal. La fuerza total actuante sobre el área A sometida a presión se obtiene por integración y es

$$R = \int dR = \int p\,dA = \rho g\int h\,dA$$

Sustituyendo la relación centroidal $\bar{h}A = \int h\,dA$ resulta

$$R = \rho g\bar{h}A \tag{5.25}$$

La cantidad $\rho g\bar{h}$ es la presión que existe a la profundidad del centroide O de la superficie y es el valor medio de la presión en esa superficie.

La resultante R puede también representarse geométricamente mediante el volumen de la figura que se indica en la figura 5.34*b*. En ésta, la presión del fluido en cada punto está representada por una altura perpendicular a la placa que se toma como base. Vemos así que el volumen resultante es un cilindro recto truncado. La fuerza dR actuante en el elemento diferencial de superficie de área $dA = x\,dy$ está representada por el volumen elemental $p\,dA$ indicado por la rebanada sombreada y la fuerza total estará representada por el volumen total del cilindro. Según 5.25, la altura media del cilindro truncado es la presión

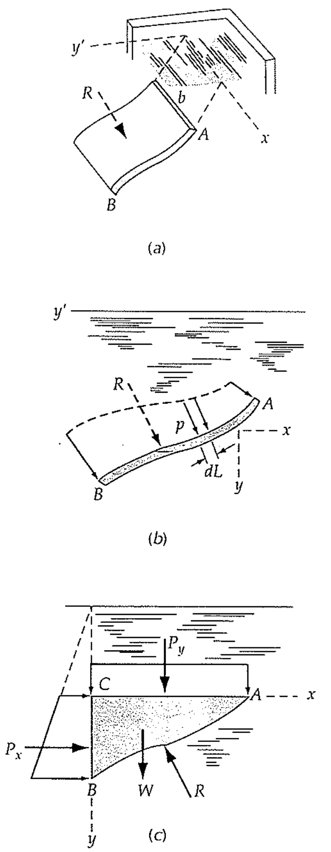


Figura 5.33

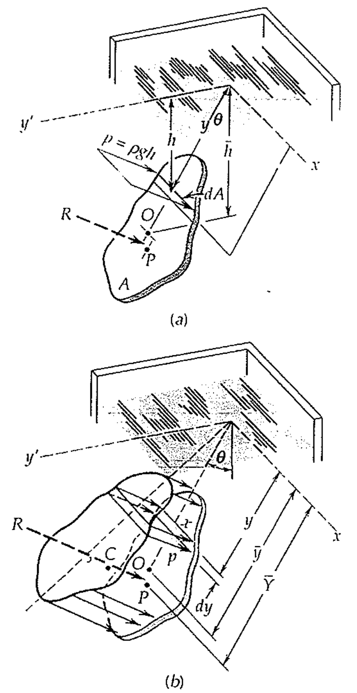


Figura 5.34

media $\rho g h$ que coincide con la existente a la profundidad a la que se encuentra el centroide O de la superficie sometida a la presión del fluido. En los problemas en que la posición del centroide O no sea evidente de inmediato, para obtener R puede recurrirse a una integración directa o sea,

$$R = \int dR = \int p\, dA = \rho g h x\, dy$$

donde la profundidad h y la longitud x de la franja horizontal de superficie elemental deben expresarse en función de y para efectuar la integración.

La segunda condición a introducir en el estudio de la presión de los fluidos es la determinación de los momentos de las fuerzas generadas por la presión. Aplicando el principio de los momentos a la figura 5.34*b*, tomando el eje x como eje de momentos resulta

$$R\bar{Y} = \int y\, dR \qquad \text{o sea} \qquad \bar{Y} = \frac{\int y(px\, dy)}{\int px\, dy} \tag{5.26}$$

Esta segunda relación concuerda con la definición de la coordenada $\bar{Y}$ del centroide del volumen V del cilindro truncado y, por tanto, ocurre que la resultante R pasa por el centroide C del volumen definido tomando como base la superficie de la placa y como altura variable una dimensión proporcional a la presión en cada punto. El punto P de la placa en que está aplicada la resultante R recibe el nombre de *centro de presión*.

Téngase muy en cuenta que el centro de presión P y el centroide O de la superficie de la placa *no* coinciden.

(e) Empuje. La ley del empuje hidrostático, atribuida a Arquímedes, se explica sin dificultad del modo siguiente con validez para cualquier fluido, líquido o gas, que esté en equilibrio. Consideremos la porción de fluido limitada por una superficie cerrada imaginaria, tal como la ilustrada en la figura 5.35*a* mediante el contorno irregular de trazos. Si fuera posible desalojar la masa de fluido del interior de la cavidad y sustituirla a la vez por las fuerzas que la misma ejerce sobre el contorno de la cavidad (fig. 5.35*b*), no se perturbaría el equilibrio del fluido circundante. En la figura 5.35*c* se representa el diagrama de sólido libre del fluido antes de extraerlo de la cavidad y vemos en él que la resultante de la presión actuante en la superficie debe ser igual y opuesta al peso mg del fluido y debe pasar por el centro de masa de esa porción de fluido. Si ésta la sustituimos por un cuerpo de las mismas dimensiones, las fuerzas que se ejercerían sobre la superficie de ese cuerpo mantenido en la misma posición serían iguales a las que sufría la masa de fluido antes de desalojarla. Esto nos dice que la fuerza resultante que actúa sobre la superficie de un objeto sumergido en un fluido es igual y opuesta al peso del fluido desplazado y pasa por el centro de masa de ese fluido desplazado. Esa *fuerza resultante* es la llamada *fuerza de empuje*, o simplemente *empuje*,

$$F = \rho g V \tag{5.27}$$

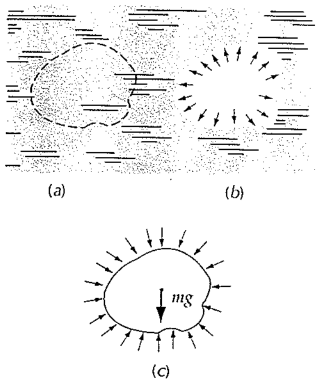
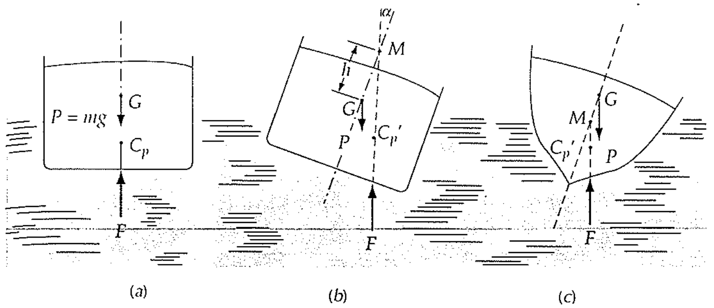


Figura problema 5.35



(a) (b) (c)

Figura 5.36

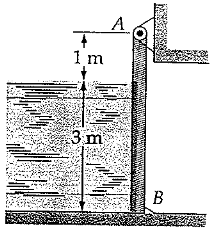
donde ρ es la densidad del fluido, g es la aceleración de la gravedad y V es el volumen del fluido desplazado. Si el fluido es un líquido de densidad constante, el centro de masa del líquido desalojado coincidirá con el centroide del volumen desalojado.

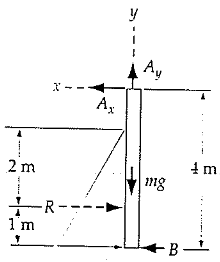
De la discusión anterior se deduce que, cuando la densidad de un objeto sea menor que la del fluido en que esté completamente sumergido, no habrá equilibrio de fuerzas en la dirección vertical y el objeto subirá. Si el fluido es un líquido, el objeto seguirá subiendo hasta llegar a la superficie del líquido, donde se quedará en reposo en una posición de equilibrio, en el supuesto de que la densidad del fluido existente sobre la superficie del líquido sea menor que la del objeto. En el caso de la superficie límite entre un líquido y un gas, tales como agua y aire, el efecto de la presión del gas sobre la porción del objeto emergente por encima del líquido queda equilibrada por la presión adicional en el líquido debida a la acción del gas sobre su superficie.

Uno de los problemas más importantes en los que interviene el empuje es la determinación de la estabilidad de los cuerpos flotantes. Podemos ilustrar esta cuestión considerando el casco de un buque cuya sección transversal se representa en la figura 5.36*a*. El punto C_p es el centroide del volumen desalojado y recibe el nombre de *centro de empuje* o de *presión*. La resultante de las fuerzas ejercidas sobre el casco por el agua es la fuerza de empuje resultante F. Esta fuerza F pasa por C_p y es igual y opuesta al peso P del buque. Si éste, tal como se representa en la figura 5.36*b*, se escora un ángulo α, la forma del volumen desalojado varía y el centro de empuje pasa a ocupar una nueva posición C_p'. El punto de corte de la vertical de C_p' con el plano de simetría del buque se llama *metacentro M*, y la altura h por encima del centro de gravedad G se conoce como *altura metacéntrica*. Para la mayoría de las formas de cascos se encuentra que la altura metacéntrica GM es constante para inclinaciones de hasta 20°. Cuando M está más arriba que G, como ocurre en la figura 5.36*b*, se ve enseguida que se genera un par adrizante que tiende a llevar al buque a su posición vertical. El momento de ese par, para cualquier ángulo de inclinación, constituye una medida de la estabilidad del buque. Si M se hallara más abajo que G (altura GM negativa), como ocurre en la figura 5.36*c*, el momento que acompaña a un giro cualquiera es de un sentido tal que tiende a hacer aumentar la inclinación. Es ésta, evidentemente una condición de inestabilidad que debe evitarse en el proyecto de buques.

PROBLEMA TIPO 5.16

Una placa rectangular, cuya sección vertical AB se representa, tiene una altura de 4 m y una anchura de 6 m (perpendicular al plano del papel) y bloquea la salida de una canalización de agua dulce de 3 m de profundidad. La placa está engoznada por su borde superior en torno a un eje que pasa por A y hace tope, por su borde inferior, contra el resalto B. Hallar la fuerza que ejerce el resalto B contra la placa.





Solución. El diagrama de sólido libre de la sección de la placa incluye las componentes vertical y horizontal de la fuerza en A, el peso no especificado $P = mg$ de la placa, la fuerza horizontal desconocida B y la resultante R de la distribución triangular de la presión contra la placa.

La densidad del agua dulce es $\rho = 1{,}000\ \mathrm{Mg/m^3}$ y, por tanto, la presión media es

① $[p_{\text{med}} = \rho g \bar{h}]$ $\qquad (p_{\text{med}} = 1{,}000(9{,}81)(\tfrac{3}{2})) = 14{,}72\ \text{kPa}$

La resultante R de la presión contra la placa es

$[R = p_{\text{med}}A]$ $\qquad R = (14{,}72)(3)(6) = 265\ \text{kN}$

Esta fuerza actúa en el centroide de la distribución triangular de presión, situado a 1 m del borde inferior de la placa. Anulando la suma de momentos respecto A se obtiene la fuerza desconocida B. O sea,

$[\Sigma M_A = 0]$ $\qquad 3(265) - 4B = 0 \qquad B = 198{,}7\ \text{kN}$ *Resp.*

① **Observese que la unidad de presión es:**

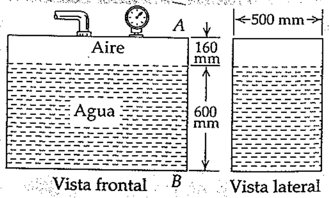
$$\left(10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(\mathrm{m}) =$$

$$\left(10^3\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s}^2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{m}^2}\right) =$$

$$= \mathrm{kN/m^2} = \mathrm{kPa}$$

PROBLEMA TIPO 5.17

La masa de aire confinado en el depósito cerrado de agua dulce se mantiene a una presión de 5,5 kPa (por encima de la atmosférica). Hallar la resultante R de las fuerzas que ejercen el aire y el agua contra la pared lateral del depósito.



Solución. Se representa la distribución de presiones sobre la pared lateral, en la que $p_0 = 5{,}5$ kPa. El peso específico del agua dulce es $\mu = \rho g = 1{,}000(9{,}81) = 9{,}81\ \mathrm{kN/m^3}$ y, por ello, el incremento de presión Δp debido al agua es

$$\Delta p = \mu\,\Delta h = 9{,}81(0{,}6) = 5{,}89\ \text{kPa}$$

① Las resultantes R_1 y R_2 debidas, respectivamente, a las distribuciones de presión rectangular y triangular son

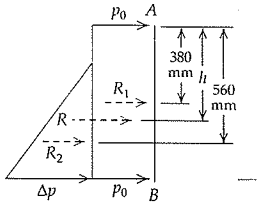
$$R_1 = p_0 A_1 = 5{,}5(0{,}760)(0{,}5) = 2{,}09\ \text{kN}$$

$$R_2 = \Delta p_{\text{med}} A_2 = \frac{5{,}89}{2}(0{,}6)(0{,}5) = 0{,}883\ \text{kN}$$

La resultante será $R = R_1 + R_2 = 2{,}09 + 0{,}883 = 2{,}97$ kN *Resp.*

La posición de R la determinamos tomando momentos respecto a A, teniendo en cuenta que R_2 actúa en el centro de la altura de 760 mm y R_1 en el centroide de la distribución triangular de presión, situado a 400 mm de la superficie del agua y a 400 + 160 mm por debajo de A. Entonces,

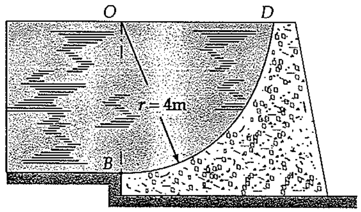
$[Rh = \Sigma M_A]$ $\qquad 2{,}97h = 2{,}09(380) + 0{,}883(560) \qquad h = 433\ \text{mm}$ *Resp.*



① **Sin duda, el mejor procedimiento para los cálculos es dividir la distribución de presiones en estas dos partes.**

PROBLEMA TIPO 5.18

Determinar por completo la fuerza resultante R que el agua ejerce sobre la superficie cilíndrica de la presa. La densidad del agua dulce es 1,000 Mg/m³ y la presa tiene una longitud b de 30 m normal al papel.

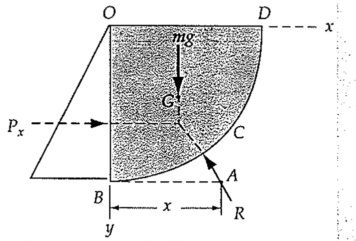


Solución. Se representa el diagrama de sólido libre del bloque de agua BDO aislado. La fuerza P_x es

① $$P_x = \rho g \bar{h} A = \frac{\rho g r}{2} b r = \frac{(1{,}000)(9{,}81)(4)}{2}(30)(4) = 2350\ \text{kN}$$

El peso P del agua está aplicado en el centro de masa G de la sección cuarto-circular y vale

$$mg = \rho g V = (1{,}000)(9{,}81)\frac{\pi(4)^2}{4}(30)(4) = 3700\ \text{kN}$$



① **Si hay dudas acerca de las unidades de $\rho g \bar{h}$, véase la nota ① del problema tipo 5.16.**

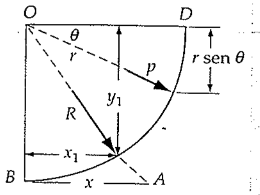
Para que la masa de agua de la sección esté en equilibrio tiene que ser

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad R_x = P_x = 2350 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad R_y = mg = 3700 \text{ kN}$$

La fuerza resultante R que el fluido ejerce sobre la presa es igual y opuesta a la que se representa actuando sobre el fluido y vale

$$[R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}] \qquad R = \sqrt{(2350)^2 + (3700)^2} = 4380 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$



La coordenada x del punto A por el que pasa R puede determinarse mediante el principio de los momentos. Tomando B como polo resulta

$$P_x\frac{r}{3} + mg\frac{4r}{3\pi} - R_y x = 0 \qquad x = \frac{2350\left(\frac{4}{3}\right) + 3700\left(\frac{16}{3\pi}\right)}{3700} = 2,55 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

② **En este caso es viable el procedimiento por integración más que nada por la sencillez de la geometría del arco circular.**

② ***Otro procedimiento.*** La fuerza actuante sobre la superficie de la presa puede obtenerse por integración directa de las componentes

$$dR_x = p\,dA\cos\theta \qquad \text{y} \qquad dR_y = p\,dA \operatorname{sen}\theta$$

donde $p = \rho g h = \rho g r \operatorname{sen}\theta$ y $dA = b(r\,d\theta)$. O sea,

$$R_x = \int_0^{\pi/2} \rho g r^2 b \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = -\rho g r^2 b\left[\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\rho g r^2 b$$

$$R_y = \int_0^{\pi/2} \rho g r^2 b \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \rho g r^2 b\left[\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{4}\pi\rho g r^2 b$$

Entonces, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{1}{2}\rho g r^2 b\sqrt{1 + \pi^2/4}$. Introduciendo aquí los valores numéricos resulta

$$R = \tfrac{1}{2}(1{,}000)(9{,}81)(4^2)(30)\sqrt{1 + \pi^2/4} = 4380 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Como dR pasa siempre por el punto O, resulta que R pasará también por O y, por tanto, los momentos de R_x y R_y respecto a O se anularán entre si por lo que podremos escribir $R_x y_1 = R_y x_1$ y tendremos entonces,

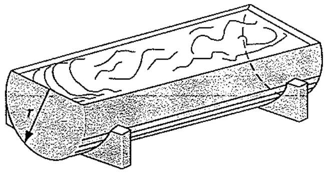
$$x_1/y_1 = R_x/R_y = (\tfrac{1}{2}\rho g r^2 b)/(\tfrac{1}{4}\pi\rho g r^2 b) = 2/\pi \qquad \textit{Resp.}$$

Por semejanza de triángulos vemos que

$$x/r = x_1/y_1 = 2/\pi \qquad \text{y} \qquad x = 2r/\pi = 2(4)/\pi = 2,55 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 5.19

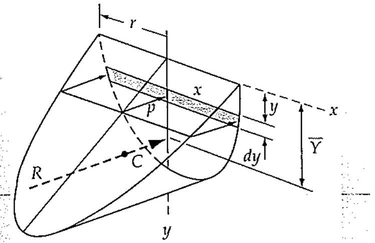
Hallar la fuerza resultante R que se ejerce sobre la pared lateral semicircular del tanque de agua de la figura cuando se encuentra totalmente lleno. Expresar el resultado en función del radio r y de la densidad ρ del agua.



Solución I. Obtendremos R primero por integración. Tomando una franja horizontal de área $dA = 2x\,dy$, sobre la que actúa la presión $p = \rho g y$, la fuerza resultante elemental será $dR = p\,dA$ y, entonces,

$$R = \int p\,dA = \int \rho g y(2x)\,dy = 2\rho g \int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$$

Integrando resulta $\qquad R = \frac{2}{3}\rho g r^3 \qquad$ *Resp.*



La posición de R se determina aplicando el principio de los momentos. Tomando momentos respecto al eje x resulta

$$[R\overline{Y} = \int y\,dR] \qquad \tfrac{2}{3}\rho g r^3\overline{Y} = 2\rho g\int_0^r y^2\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$$

Integrando resulta $\frac{2}{3}\rho g r^3\overline{Y} = \frac{\rho g r^4}{4}\frac{\pi}{2}$ y $\overline{Y} = \frac{3\pi}{16}r$ *Resp.*

① **Hay que tener cuidado en no cometer el error de suponer que *R* pasa por el centroide de la superficie sobre la que actúa la presión.**

Solución II. Para hallar R puede emplearse directamente la expresión 5.25, en la que la $\rho g\bar{h}$ es la presión media y $\bar{h}$ es la coordenada del centroide de la superficie sobre la cual actúa la presión. En el caso de una superficie semicircular es $\bar{h} = 4r/(3\pi)$.

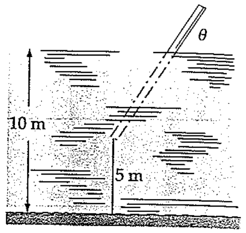
$$[R = \rho g\bar{h}A] \qquad \left(R = \rho g\frac{4r}{3\pi}\frac{\pi r^2}{2}\right) = \tfrac{2}{3}\rho g r^3 \qquad \textit{Resp.}$$

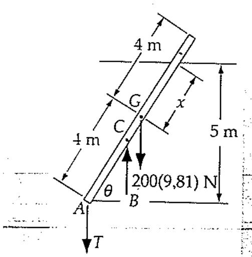
que es el "volumen" de la distribución de presiones.

① La resultante R actúa en el centroide C del "volumen" de la distribución de presiones. Para calcular la coordenada centroidal $\overline{Y}$ hay que efectuar la misma integración que en la *solución I.*

PROBLEMA TIPO 5.20

Una boya, cuya forma es la de un poste uniforme de 8 m y 0,2 m de diámetro, tiene una masa de 200 kg y está sujeta por su extremo inferior al fondo de un lago de agua dulce mediante 5 m de cable. Si la profundidad del agua es de 10 m, calcular el ángulo θ que forma el poste con la horizontal.





Solución. En el diagrama de sólido libre de la boya vemos su peso aplicado en G, la tensión vertical T del cable de anclaje y la fuerza de empuje E aplicada al centroide C de la porción sumergida. Sea x la distancia de G a la superficie del agua. La densidad de ésta es $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$, con lo que la fuerza de empuje será

$$[E = \rho g V] \qquad E = 10^3(9{,}81)\pi(0{,}1)^2(4+x)\ \text{N}$$

El equilibrio de los momentos respecto a A ($\Sigma M_A = 0$) da

$$200(9{,}81)(4\cos\theta) - [10^3(9{,}81)\pi(0{,}1)^2(4+x)]\frac{4+x}{2}\cos\theta = 0$$

$$\text{Así pues,} \quad x = 3{,}14\ \text{m} \quad \text{y} \quad \theta = \text{arcsen}\left(\frac{5}{4+3{,}14}\right) = 44{,}5° \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.163 Determinar la altura máxima h hasta la cual puede subir el agua dulce por acción de una bomba de vacío. Tómese una presión atmosférica tipo de $1{,}0133(10^5)$ Pa. Repítanse los cálculos para el mercurio.

Resp. $h = 10{,}33$ m (agua)
$h = 0{,}761$ m (mercurio)

5.164 Especificar la intensidad y la posición de la fuerza resultante que actúa en cada pared y el fondo del acuario debida al agua dulce que contiene.

5.165 La cámara sumergible tiene una masa total de 6,7 Mg, incluidos personal, equipo y lastre. Cuando se hace descender a una profundidad de 1,2 km dentro del océano, la tensión del cable es de 8 kN. Calcular el volumen total V que desplaza.

Resp. $V = 5{,}71\ \text{m}^3$

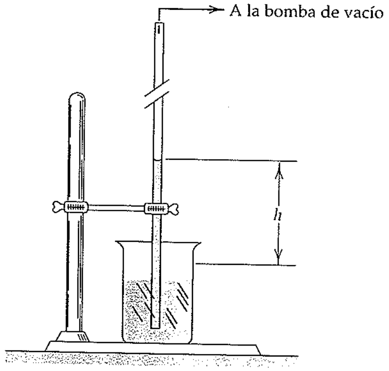


Figura problema 5.163

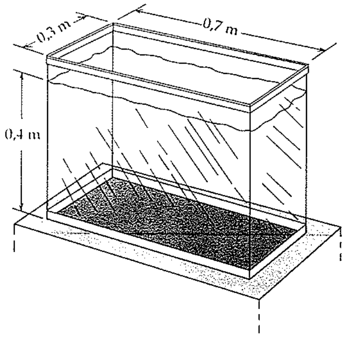


Figura problema **5.164**

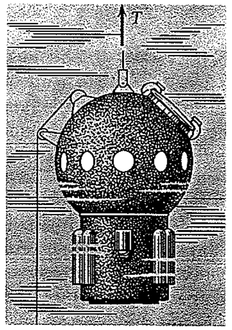


Figura problema **5.165**

5.166 Una cámara de inmersión profunda, en forma de cáscara esférica de 1,5 m de diámetro, se lastra con plomo para que su peso exceda ligeramente al empuje hidrostático. Durante una inmersión oceánica a 3000 metros de profundidad, en su interior se mantiene la presión atmosférica. El espesor de la cáscara es de 25 mm. Para esa profundidad, calcular el esfuerzo de compresión σ que actúa en una sección diametral como la representada en la ilustración derecha de la figura.

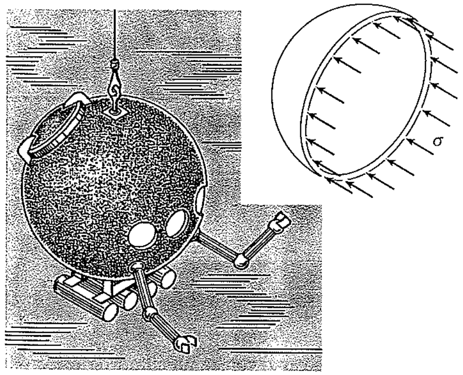


Figura problema **5.166**

5.167 En la figura se representa en sección el encofrado de un pequeño muro de contención de hormigón. Si por cada metro de longitud de muro se dispone un puntal BC, calcular la compresión en cada uno de éstos suponiendo que las uniones A, B y C pueden considerarse conexiones articuladas. El hormigón puede tratarse como un líquido de densidad 2400 kg/m³.

Resp. $C = 95{,}5$ kN

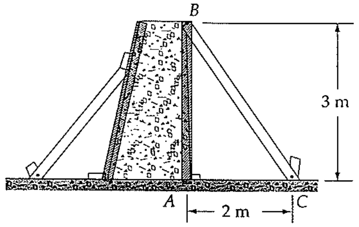


Figura problema 5.167

5.168 El agua dulce canalizada es retenida por la placa de 2,5 m engoznada en A. Si la compuerta está diseñada para abrirse cuando la altura del agua sea de 0,8 m, tal como se muestra, ¿cuál debe ser el peso p de la placa (en newtons por metro de longitud horizontal normal al papel)?

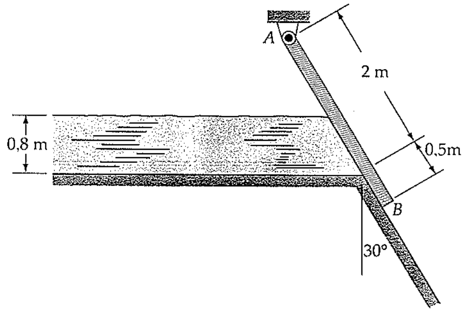


Figura problema 5.168

5.169 Se representa la sección transversal de un tanque de agua dulce con el fondo inclinado. La compuerta rectangular del fondo (normal al plano de la figura), de 1,6 m por 0,8 m, está engoznada en A y se abre venciendo la presión del agua por acción de la tracción P del cable. Hallar P.

Resp. P = 12,57 kN

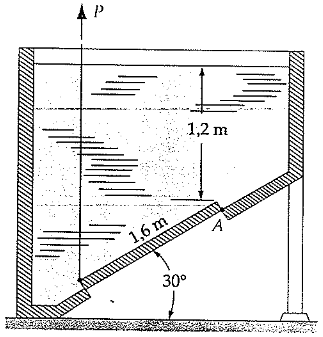


Figura problema 5.169

Problemas representativos

5.170 El bloque homogéneo de densidad ρ flota entre dos líquidos de densidades $\rho_1 < \rho$ y $\rho_2 > \rho$. Hallar la expresión de la distancia b que el bloque penetra dentro del líquido superior.

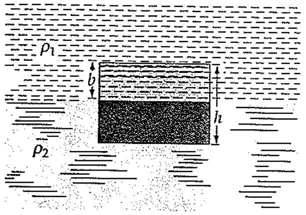


Figura problema 5.170

5.171 Cuando el nivel del agua marina alcanza los 0,6 m indicados en la figura, dentro de la cámara hemisférica la válvula se alza y deja pasar una descarga de agua marina al tubo vertical. Para ese nivel del fluido determinar (*a*) la presión media σ que soporta la superficie de cierre de la válvula antes de que actúe la fuerza que alza la válvula y (*b*) la fuerza P (adicional a la necesaria para igualar el peso) requerida para elevar la válvula. Supóngase que reina la presión atmosférica en todos los espacios de aire y en la superficie del plato cuando cesa el contacto bajo la acción de P.

Resp. σ = 10,74 kPa $\qquad$ P = 1,687 kN

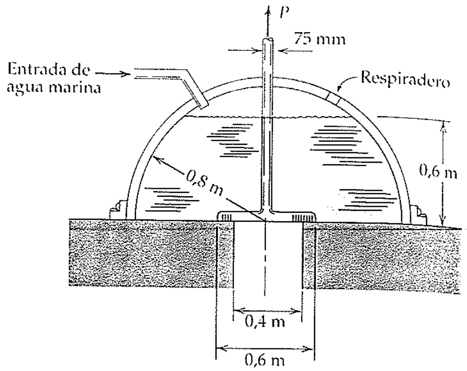


Figura problema 5.171

5.172 La tela, obenques, cesta, combustible, quemador y lastre de arena de un globo de aire caliente tienen una masa de 500 kg y los cuatro pasajeros con su impedimenta tienen una masa de 400 kg. El volumen del globo inflado es de 5600 m^3. Si en el momento de la suelta la temperatura y densidad del aire son, respectivamente, 15°C y 1,222 kg/m^3, determinar la temperatura media T_h que debe alcanzar el aire caliente dentro del globo para producir una tensión de 1200 N en el cable de anclaje antes de la suelta. (Recuérdese que en condiciones de presión constante, la densidad varía en proporción inversa a la temperatura absoluta en kelvins (K) y que K es igual a 273 + °C.)

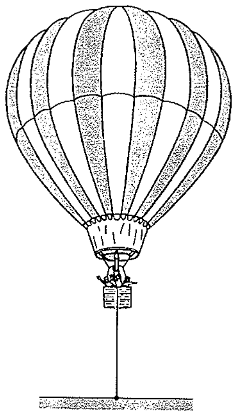


Figura problema 5.172

5.173 Una baliza de canal consta un cilindro de acero hueco de 300 mm de diámetro y 90 kg de masa, que se ancla en el fondo con un cable como se indica. Con la marea alta, h = 0,6 m; calcular la tensión T en el cable. Hallar asimismo el valor de h cuando el cable se afloja al bajar la marea. La densidad del agua marina es de 1030 kg/m^3. Supóngase que la baliza está lastrada en la base para que se mantenga vertical.

Resp. T = 403 N $\qquad$ h = 1,164 m

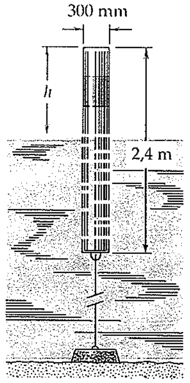


Figura problema 5.173

5.174 Si el centro de masa de la baliza del problema 5.173 coincide con el centro geométrico del cilindro, calcular el ángulo θ que formaría el eje de la baliza con la vertical si la superficie del agua estuviese a 1,5 m por encima del extremo inferior del cilindro. Al localizar el centro de empuje, despréciese el diámetro comparado con la longitud.

5.175 El cilindro de hormigón macizo de 2,4 m de longitud y 1,6 m de diámetro cuelga del cable que pasa por la polea fija A en posición semisumergida en agua dulce. Calcular la tensión T del cable. El cilindro está impermeabilizado por un recubrimiento plástico. (En caso necesario, consultar la tabla D.1 del apéndice D.)

Resp. T = 89,9 kN

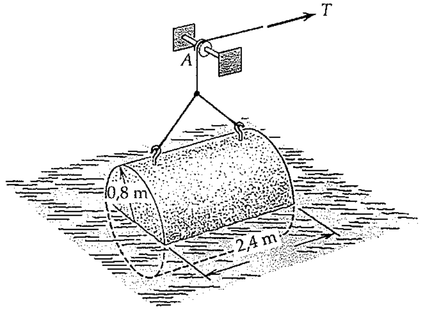


Figura problema 5.175

5.176 Para construir una pequeña presa de hormigón para agua dulce se están considerando las secciones triangular y rectangular. Desde el punto de vista de la resistencia al derrumbamiento, ¿qué sección requerirá menos hormigón, y cuánto menos por metro de longitud de presa? La densidad del hormigón es de 2400 kg/m^3.

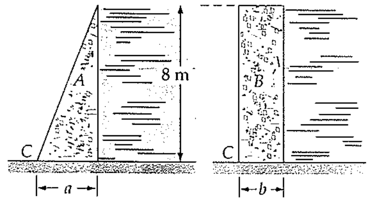


Figura problema 5.176

5.177 Un canal de agua dulce de 3 m de anchura (normal al plano del papel) está cerrado en su extremo por una barrera rectangular, cuya sección ABD se muestra. Cada 0,6 m a lo largo de los 3 m de anchura se colocan puntales. Hallar la compresión C en éstos. Despréciese el peso de los miembros.

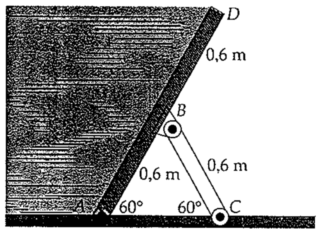


Figura problema 5.177

5.178 La válvula de fundición obtura el tubo de desagüe de un tanque de agua dulce abierto lleno hasta una altura de 7,2 m.

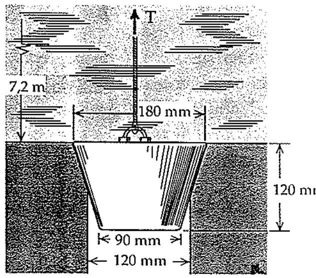


Figura problema 5.178

Determinar la tensión T necesaria para separar la válvula de su asiento cónico. Cuando la válvula se mueve, en el tubo de desagüe y en la superficie del asiento reina la presión atmosférica. Despréciese el rozamiento mecánico entre la válvula y la superficie donde se asienta.

5.179 El cilindro hidráulico acciona la palanca articulada que cierra la compuerta vertical venciendo la presión del agua dulce represada al otro lado. La compuerta es rectangular con una anchura de 2 m perpendicular al plano del papel. Para una altura de agua h = 3 m, calcular la presión p del aceite actuante sobre el pistón de 150 mm del cilindro hidráulico.

Resp. p = 7.49 MPa

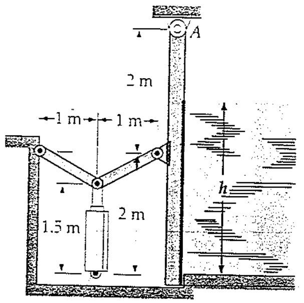


Figura problema 5.179

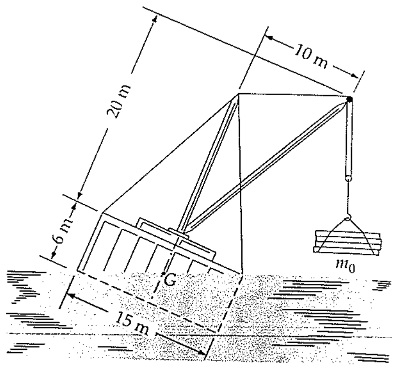


Figura problema 5.180

5.180 La grúa flotante de proporciones rectangulares tiene una sección transversal de 6 por 15 m en toda su longitud de 40 m. Si la inmersión e inclinación máximas permitidas en agua de mar están representadas en la posición que se muestra, determinar la correspondiente masa máxima de seguridad m_0 que el pontón puede maniobrar para la posición extendida a 10 m de la pluma. Hallar también el desplazamiento total m_0, en toneladas métricas, del pontón sin carga. La distribución de maquinaria y lastre hace que el centro de gravedad del pontón, sin contar la masa m_0, se encuentre en el centro del casco.

5.181 El barracón representado en la figura está sometido a un viento horizontal y la presión p sobre el techo circular puede aproximarse a $p_0 \cos \theta$. La presión es positiva a barlovento y negativa a sotavento. Determinar la fuerza cortante horizontal V sobre los cimientos por unidad de longitud del techo medida normalmente al papel.

Resp. $V = \frac{1}{2} \pi r p_0$

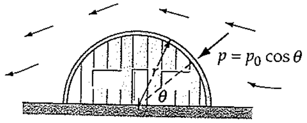
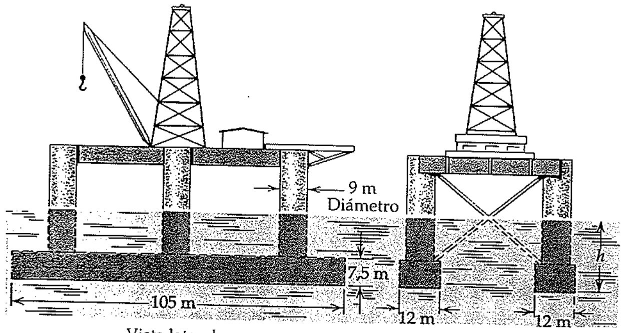


Figura problema 5.181



Vista lateral

Vista frontal

Figura problema 5.182

5.182 El casco de una plataforma perforadora se compone de dos flotadores rectangulares y seis columnas cilíndricas sobre las que descansa la plataforma. La estructura completa lastrada desplaza 26 000 toneladas métricas. Calcular el calado total h de la estructura una vez amarrada en el mar. La densidad del agua salada es de 1030 kg/m^3. Despréciense las componentes verticales de las fuerzas de amarre.

5.183 El costado correspondiente al agua de una presa de hormigón tiene forma de parábola de vértice en A. Determinar la posición b del punto B de la base en que actúa la fuerza resultante del agua contra el frente C de la presa.

Resp. b = 28,1 m

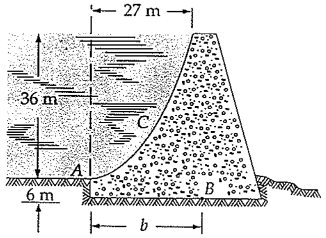


Figura problema 5.183

5.184 La cáscara de acero semicilíndrica con los extremos cerrados tiene una masa de 26,6 kg. Hallar la masa m del lastre de plomo que debe colocarse en la cáscara para que ésta sobresalga del agua la mitad de su radio de 150 mm.

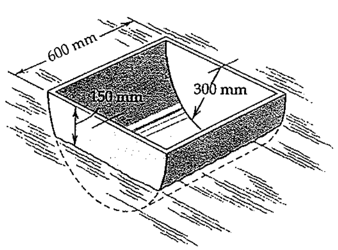


Figura problema 5.184

5.185 Una presa está formada por las dos placas planas de barrera A y B de masas pequeñas. Los soportes de puntal C y D se colocan espaciados cada 3 m a lo largo de la presa. Una muestra de lodo tomada del fondo presenta una densidad de 1,6 Mg/m^3. Hallar la compresión que sufren C y D. Supóngase que todas las uniones son articuladas.

Resp. D = 88,3 kN $\quad$ C = 474 kN

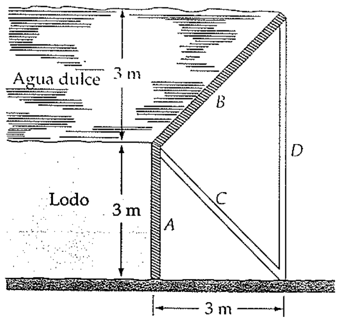


Figura problema 5.185

5.186 La compuerta rectangular de la figura tiene 3 m de largo (perpendicularmente al papel) y está engoznada en su borde superior B. La compuerta divide en dos un canal que conduce a un lago de agua dulce por la izquierda y a un dique de marea de agua de mar por la derecha. Calcular el par M que es preciso aplicar en el punto B de la compuerta para que ésta no se abra cuando el nivel de agua salada descienda h = 1 m.

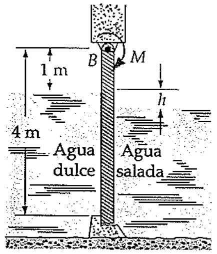


Figura problema 5.186

5.187 Una estructura para observación de la vida marina bajo el hielo polar consiste en una cámara cilíndrica de observación unida a la superficie a través del pozo cilíndrico abierto por arriba para facilitar el acceso y la salida. Bajo la cámara hay un cesto con lastre. Para asegurar la estabilidad de la estructura, es necesario que las patas aprieten contra el hielo con una fuerza que sea al menos el 15 por ciento de la fuerza de empuje total que sufre la parte sumergida de la estructura. Si la masa de ésta, sin lastre, es de 5.7 Mg, calcular la masa m del plomo de lastre. La densidad del plomo es 11,37 Mg/m^3.

Resp. m = 4,24 Mg

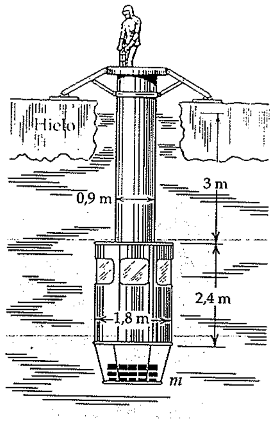


Figura problema 5.187

5.188 El sumergible para investigaciones a gran profundidad posee un compartimento de pasajeros consistente en una cáscara de acero esférica cuyo radio medio es de 1 m y su espesor de 35 mm. Calcular la masa del lastre de plomo que debe llevar la nave para que el peso combinado de la cáscara de acero y el lastre contrarresten exactamente la fuerza de empuje combinada que actúa sobre ambos. (En la tabla D.1 del apéndice D se encontrarán los datos necesarios.)

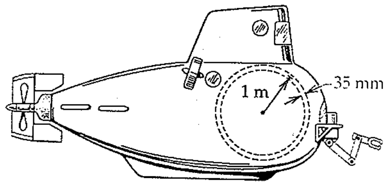


Figura problema 5.188

5.189 La tapa de registro del depósito de agua dulce se atornilla en su posición y se llena el depósito hasta el nivel indicado. Calcular el aumento de tracción que experimenta cada perno a causa del llenado del depósito. (Supóngase que no varía la presión en la junta entre tapa y depósito por lo que la fuerza creada por la presión del agua es soportada completamente por el incremento de la tracción en los pernos.)

Resp. T_A = 80 N T_B = 96,6 N

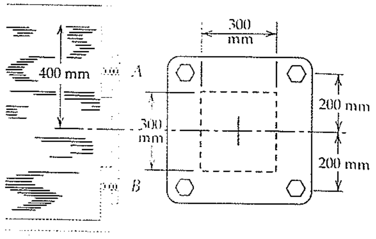


Figura problema 5.189

5.190 La ventana trapezoidal de contemplación de una acuario marino tiene las dimensiones que se indican. Con ayuda de los dibujos y coordenadas adecuados, describir dos procedimientos para hallar la resultante *R* de la presión del agua sobre el vidrio y la posición vertical de *R*, si se dispusiera de datos numéricos.

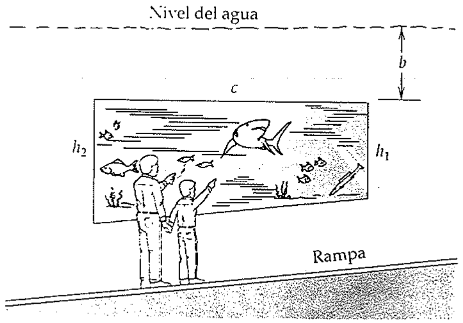


Figura problema 5.190

5.191 El tablón de 3 m, cuya sección se representa, tiene una densidad de 800 kg/m^3 y está engoznado al torno por el eje horizontal y a lo largo de su borde superior *O*. Hallar el ángulo que forma con la horizontal para el nivel de agua indicado.

Resp. θ = 48,2°

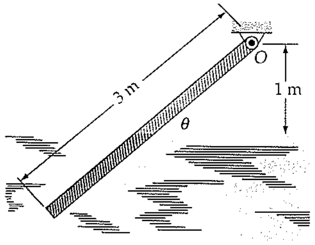


Figura problema 5.191

5.192 Determinar la fuerza total *R* que ejerce sobre la ventana triangular el agua dulce del depósito. El nivel de la superficie libre del agua coincide con el vértice superior de la ventana. Determinar también la distancia *H* desde *R* al nivel de la superficie libre.

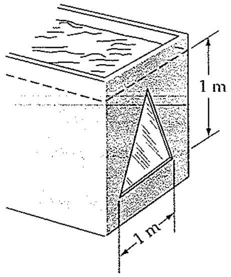


Figura problema 5.192

5.193 La esfera se emplea como válvula para cerrar el orificio del tanque de agua dulce. A medida que *h* disminuye, decrece la tracción *T* requerida para abrir la válvula puesto que la fuerza descendente de la esfera decrece al disminuir la presión. Determinar la altura *h* para la cual son iguales *T* y el peso de la esfera.

Resp. *h* = 0,233 m

5.194 Resulta difícil determinar de manera precisa la posición vertical del centro de masa *G* de un buque mediante cálculos. Se obtiene más fácilmente de forma experimental inclinando el buque cargado. Con referencia a la figura, se coloca una masa exterior conocida m_0 a una distancia *d* del plano de simetría y se mide el ángulo de escora θ con una plomada. Se conocen el desplazamiento del buque y la posición del metacentro *M*. Calcular la altura metacéntrica $\overline{GM}$ de un buque de 12000 toneladas inclinado por una carga de 27 toneladas situada a 7,8 m del plano de simetría, sabiendo que una plomada de 6 m se desvía una distancia *a* = 0,2 m. La masa m_0 se halla a una distancia *b* = 1,8 m por encima de *M*.

Resp. $\overline{GM}$ = 0,530 m

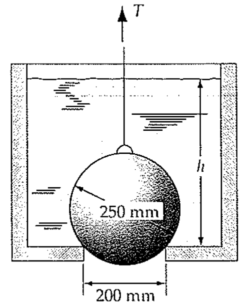


Figura problema 5.193

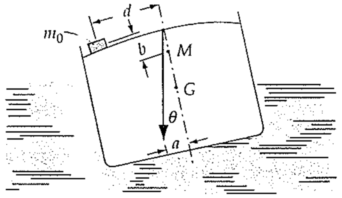


Figura problema 5.194

5.10 REPASO Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo 5 hemos tratado algunos ejemplos corrientes de fuerzas distribuidas en volúmenes, sobre superficies y a lo largo de líneas. En este tipo de problemas nos interesan fundamentalmente dos cosas: la resultante de las fuerzas distribuidas y su posición.

Para hallar la resultante comenzamos multiplicando la intensidad de la fuerza por el adecuado elemento de volumen, superficie o línea en función del cual se expresa la intensidad. A continuación, sumamos (integramos) las fuerzas elementales que actúan en toda la región en cuestión y hallamos su resultante.

Para hallar la recta soporte de la resultante hemos de apoyarnos en el principio de los momentos. Así pues, igualamos la suma de los momentos de todas las fuerzas elementales, respecto a un eje conveniente, al momento de la fuerza resultante respecto a ese mismo eje y, después, despejamos el brazo del momento de la resultante.

Cuando la fuerza está distribuida por toda una masa, como es el caso de la atracción gravitatoria, la intensidad es la fuerza de atracción ρg por unidad de volumen, siendo ρ la densidad y g la aceleración de la gravedad. Para los cuerpos de densidad constante, vimos en la sección A que ρg desaparece cuando se aplica el principio de los momentos. Ello deja el problema reducido al problema estrictamente geométrico de hallar el centroide de la figura, que entonces coincide con el centro de masa del cuerpo material cuyos límites define la figura geométrica. Para placas planas y cáscaras homogéneas y de espesor constante, el problema se transforma en poder determinar las propiedades de una superficie. Para barras delgadas y alambres de densidad uniforme y sección normal constante, el problema se transforma en hallar las propiedades de un segmento lineal.

Para los problemas que requieran integrar relaciones diferenciales, citamos cuatro consideraciones a tener en cuenta. Primero, elegir un sistema de coordenadas que describa del modo más sencillo los límites de la región de integración. Segundo, eliminar los infinitésimos de orden superior siempre que queden cantidades diferenciales de orden inferior. Tercero, tomar un elemento diferencial de primer orden antes que un elemento diferencial de segundo orden, y un elemento diferencial de segundo orden antes que un elemento diferencial de tercer orden. Cuarto, siempre que sea posible tomar un elemento diferencial que evite discontinuidades dentro de la región de integración.

En la sección *B* de este capítulo, aplicamos las observaciones anteriores junto con las condiciones de equilibrio para determinar los efectos de fuerzas repartidas sobre vigas, cables y fluidos. Para vigas y cables, la intensidad se expresaba como fuerza por unidad de longitud, y para fluidos, como fuerza por unidad de superficie o presión. Aunque estos tres problemas sean físicamente muy diferentes, en su planteamiento incorporan los elementos comunes citados.

PROBLEMAS DE REPASO

5.195 Hallar las coordenadas x e y del centroide de la superficie sombreada.

Resp. $\bar{x} = 37/84$ $\bar{y} = 13/30$

5.196 El disco de espesor uniforme se compone de los tres sectores de los materiales indicados. Determinar su centro de masa.

5.197 El conjunto se compone de cuatro trozos cortados de la misma varilla. El miembro curvo es un arco de circunferencia de radio b. Hallar las coordenadas y y z del centro de masa del conjunto.

Resp. $\bar{Y} = 0{,}461b$ $\bar{Z} = 0{,}876b$

5.198 Un cartel está sujeto por dos postes empotrados en hormigón en *A* y *B*. Hallar el momento resistente *M* que el hormigon ejerce sobre cada poste en *A* y *B* durante una tormenta en que la velocidad del viento es de 100 km/h. La presión del aire (llamada presión de remanso) contra la superficie vertical, para esa velocidad del viento, es de 1,4 kPa.

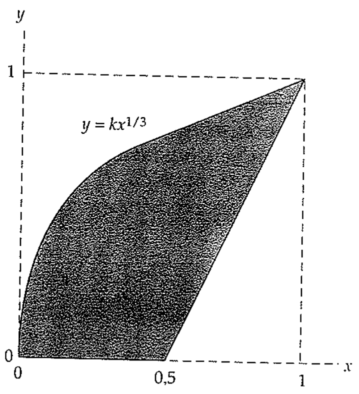


Figura problema 5.195

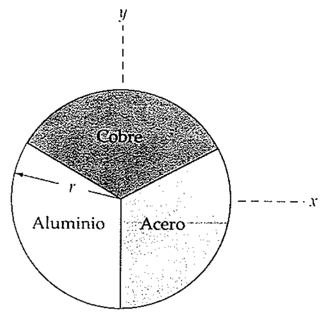


Figura problema 5.196

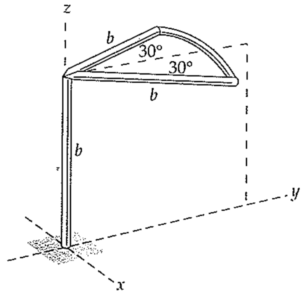


Figura problema 5.197

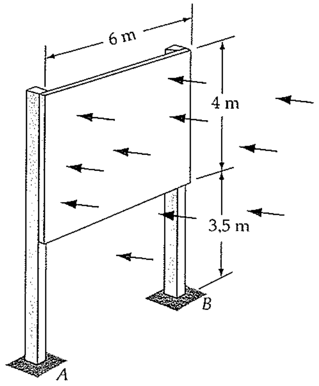


Figura problema 5.198

5.199 Calcular el volumen *V* del cuerpo generado al hacer girar el triángulo rectángulo 180° alrededor del eje z.

Resp. $V = 3619\ \text{mm}^3$

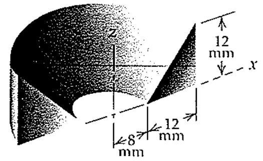


Figura problema 5.199

5.200 Hallar el área *A* de la superficie curva *ABCD* del sólido de revolución representado.

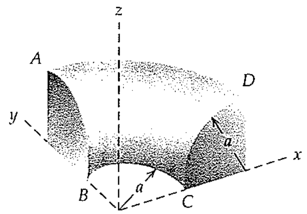


Figura problema 5.200

5.201 Hallar el volumen *V* generado al hacer girar la superficie semicircular un ángulo de 180°.

Resp. $V = 361\,000\ \text{mm}^3$

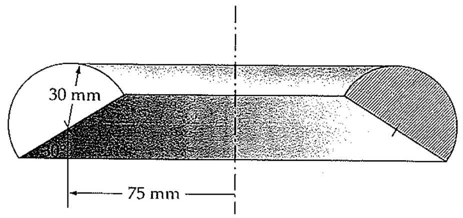


Figura problema 5.201

5.202 Esquematizar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de cada una de las cuatro vigas cargadas y apoyadas como se representa.

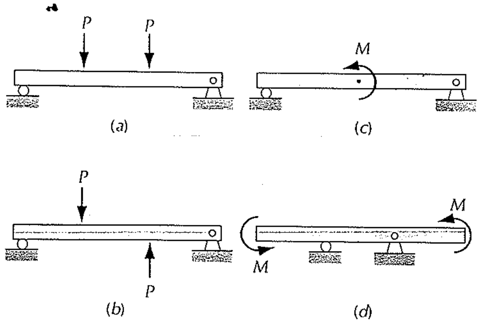


Figura problema **5.202**

5.203 Determinar la coordenada y del centroide del volumen que se obtiene haciendo girar la superficie sombreada un ángulo de 180° alrededor del eje x.

Resp. $\bar{y} = \dfrac{15a}{14\pi}$

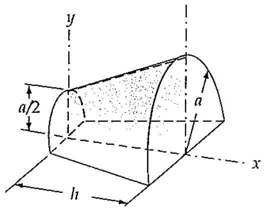


Figura problema **5.203**

5.204 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga que soporta la carga de 500 N por metro de longitud repartida a lo largo de su tramo central.

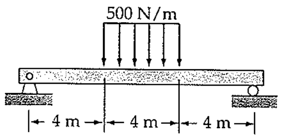


Figura problema **5.204**

5.205 Una placa rectangular uniforme tiene tres taladros circulares, uno de diámetro $3d/2$ y dos de diámetro d. Se desea hacer un cuarto taladro de diámetro d de modo que el centro de masa de la placa quede en el punto O. Determinar las coordenadas x e y del centro del cuarto taladro.

Resp. $x = 2{,}25r$ $\quad y = -0{,}250r$

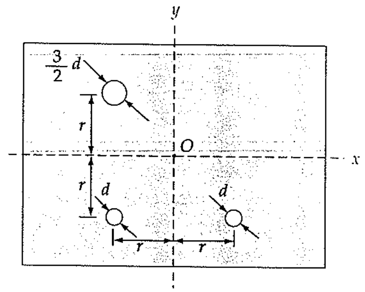


Figura problema **5.205**

5.206 El fondo y el extremo cerrado del buzón de boca abierta está formado a partir de un solo trozo de chapa de acero que se dobla a 90° por AB. Los costados y la parte superior están formados a partir de un solo trozo de lámina vitrofibra que se adhiere al acero. Localizar el centro de masa del buzón sin tener en cuenta el adhesivo y despreciando los efectos de los espesores de los materiales. La densidad del acero es 7 kg/m^2 y la de la vitrofibra 0,5 kg/m^2.

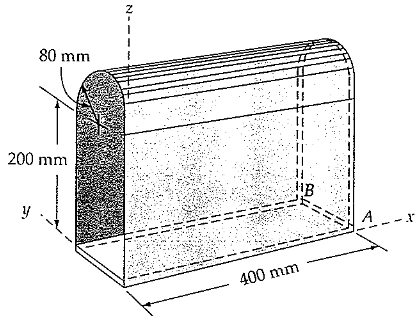


Figura problema **5.206**

5.207 El objeto macizo flotante se compone de un hemisferio y un cono de igual radio r hecho del mismo material homogéneo. Si el objeto flota con el centro del hemisferio por encima de la superficie del agua, hallar la altura máxima que puede tener el cono antes de que el objeto deje de flotar en la posición erecta ilustrada.

Resp. $h = r\sqrt{3}$

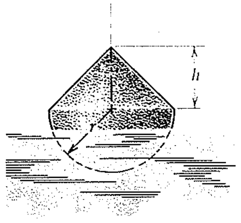


Figura problema **5.207**

5.208 Una placa plana cierra una abertura triangular existente en la pared vertical del depósito que contiene un líquido de densidad ρ. La placa está articulada por el borde superior O del triángulo. Determinar la fuerza P requerida para cerrar la compuerta venciendo la presión del líquido.

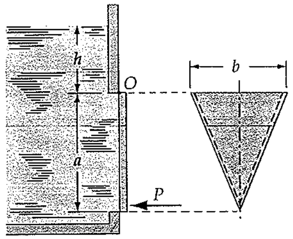


Figura problema **5.208**

5.209 En la figura se representa la sección normal de una compuerta rectangular de dimensiones 4 × 6 m que cierra el paso de un canal de agua dulce. La masa de la puerta es de 8,5 Mg y está engoznada en un eje horizontal que pasa por C. Calcular la fuerza vertical P ejercida por la cimentación sobre el borde inferior A de la compuerta. Despreciar la masa del bastidor al cual está unida la compuerta.

Resp. $P = 348$ kN

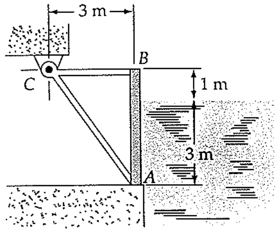


Figura problema **5.209**

5.210 Un cable cuelga de los puntos A y B, situados en la misma horizontal, y soporta una carga total W repartida uniformemente a lo largo de la horizontal. Hallar la longitud S del cable. (Recuérdese que la convergencia de las series de la ecuación 5.16a requiere que el cociente flecha/tramo sea menor que 1/4.)

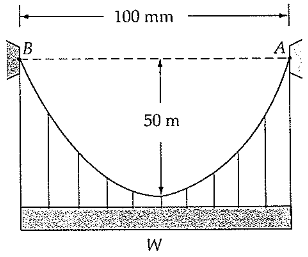


Figura problema **5.210**

5.211 Hallar el momento flector máximo M_{max} de la viga cargada y especificar a qué distancia x a la derecha del extremo A se encuentra.

Resp. $M_{max} = 186{,}4$ N · m
$x = 0{,}879$ m

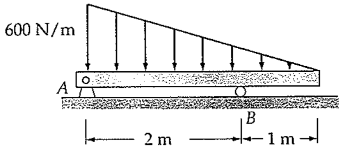


Figura problema **5.211**

5.212 Localizar el centro de masa de la cáscara esférica delgada formada cortando un octavo de una cáscara completa.

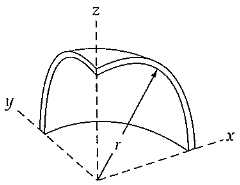


Figura problema **5.212**

5.213 Como parte de un estudio para un anteproyecto, se están investigando los efectos de las cargas eólicas sobre un edificio de 300 m. Para una distribución de la presión del viento de la forma parabólica representada, calcular la fuerza y el momento resistentes en la base A del edificio, cuya anchura es de 60 m.

Resp. $A = 7.20$ MN $\quad$ $M = -1296$ MN · m

5.214 Supongamos que el rascacielos del problema 5.213 sea una viga uniforme en posición vertical. Determinar y representar gráficamente la fuerza cortante y el momento flector en la estructura en función de la altura x sobre el suelo. Particularizar esas expresiones para $x = 150$.

Resp. $V = 7{,}2(10^6) - 1386\,x^{3/2}$ N

$M = -1296 + 7{,}20x - 5{,}54(10^{-4})x^{5/2}$ MN · m

$V|_{x=150\text{ m}} = 4{,}65$ MN

$M|_{x=150\text{ m}} = 369$ MN · m

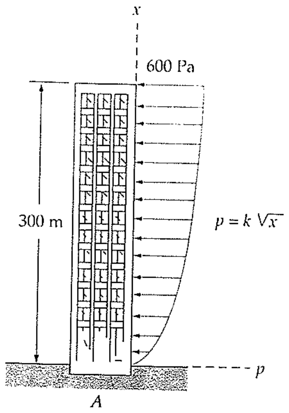


Figura problema 5.213

*PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

***5.215** Construir los diagramas de cortantes y flectores de la viga cargada del problema 5.112, cuya figura se repite aquí. Determinar los valores máximos de ambos y los puntos de la viga dónde se dan.

Resp. $V_{\max} = 6{,}84$ kN en $x = 0$,

$M_{\max} = 9{,}80$ kN · m en $x = 2{,}89$ m

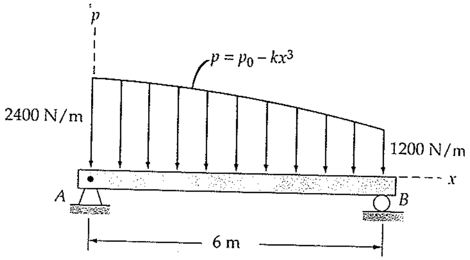


Figura problema 5.215

***5.216** Se repite aquí la figura del problema 5.32. Si $a = 2$ y $b = 8$, determinar la coordenada y del centroide de la barra delgada.

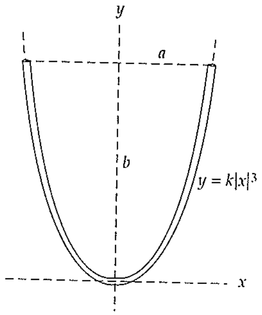


Figura problema 5.216

***5.217** El centro de empuje B del casco de un buque es el centroide de su volumen sumergido. Las áreas A de las secciones rectas bajo la flotación del casco del buque se han tabulado para cada cinco metros a lo largo de la eslora en la flotación. Representar gráficamente esos valores y determinar con un error menor que 0,5 m la distancia $\bar{x}$ a la que se halla B a popa de A.

x, m	A, m^2	x, m	A, m^2
0	0	30	23,8
5	7,1	35	19,5
10	15,8	40	12,5
15	22,1	45	5,1
20	24,7	50	0
25	25,1		

Resp. $\bar{x} = 24$ m

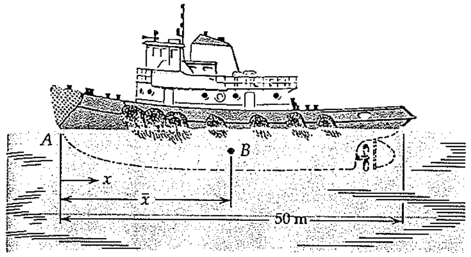


Figura problema 5.217

*5.218 Una carga homogénea de propulsante sólido para cohete tiene forma de cilindro circular, conformado con un agujero cilíndrico concéntrico de altura x. Para las dimensiones indicadas, representar gráficamente $\bar{X}$, coordenada x del centro de masa del propulsante, en función de la profundidad x del orificio, entre $x = 0$ y $x = 600$ mm. Hallar el valor máximo de $\bar{X}$ y demostrar que es igual al correspondiente valor de x.

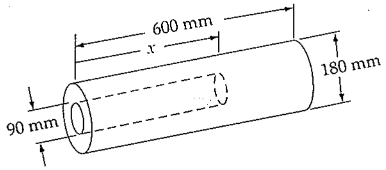


Figura problema 5.218

*5.219 Un instrumento de detección submarina está sujeto al punto medio de un cable de 100 m suspendido entre dos barcos separados 50 m. Hallar la profundidad h del instrumento cuya masa es despreciable. ¿Depende el resultado de la masa del cable o de la densidad del agua?

Resp. $h = 39{,}8$ mm

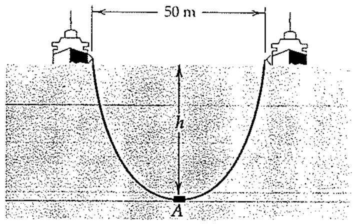


Figura problema 5.219

*5.220 Como operación preliminar a la construcción de un teleférico de un borde a otro de un desfiladero pintoresco surcado por un río, se tienden 505 m de cable, de masa 12 kg/m, entre los puntos A y B. Hallar a qué distancia x a la derecha del punto A se encuentra el punto más bajo del cable y calcular las tensiones en los puntos A y B.

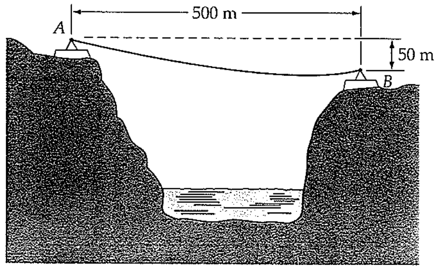
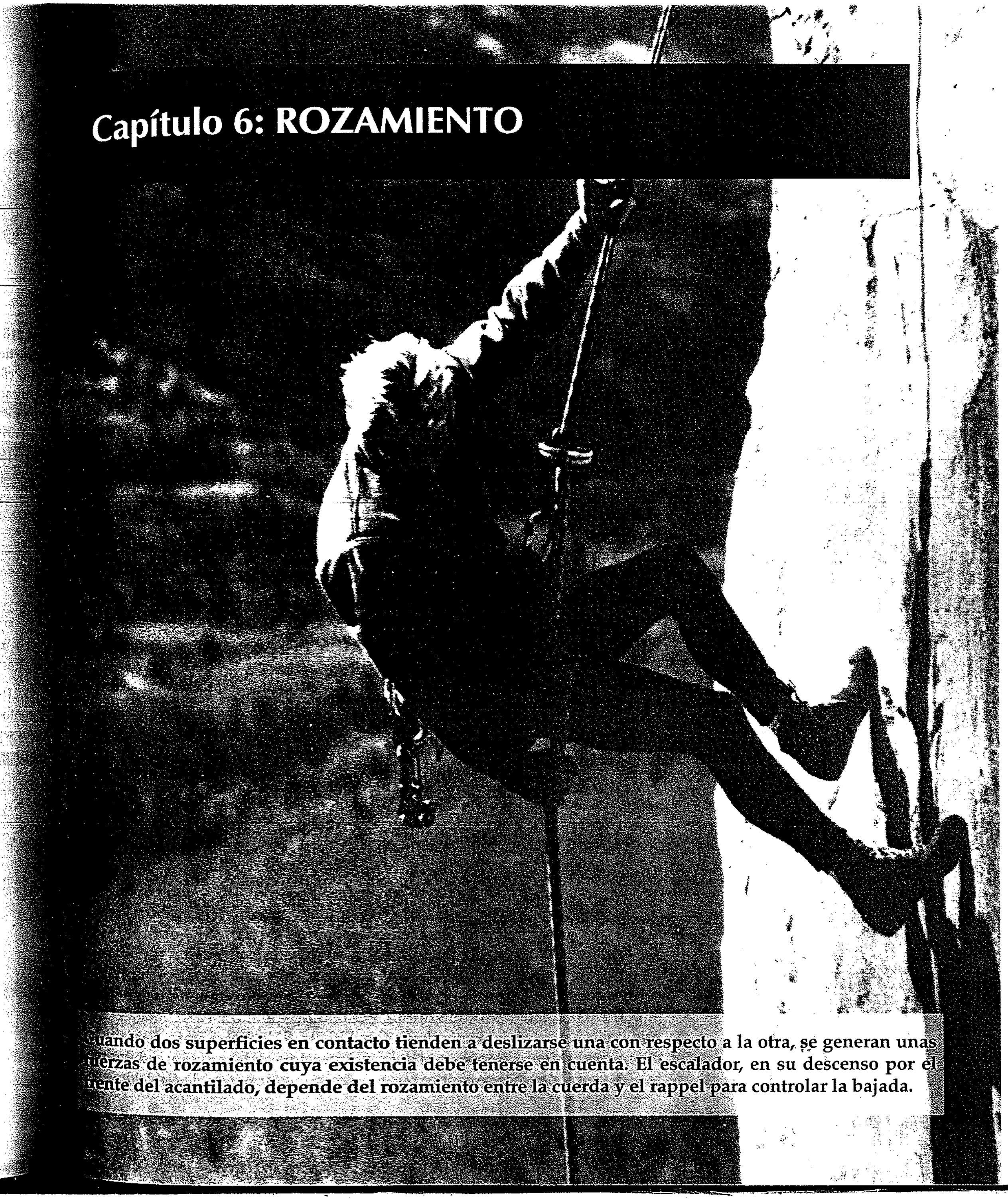


Figura problema 5.220

Capítulo 6: ROZAMIENTO



Cuando dos superficies en contacto tienden a deslizarse una con respecto a la otra, se generan unas fuerzas de rozamiento cuya existencia debe tenerse en cuenta. El escalador, en su descenso por el frente del acantilado, depende del rozamiento entre la cuerda y el rappel para controlar la bajada.

6.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes se supuso que las fuerzas de acción y reacción entre las superficies en contacto actuaban prácticamente siempre en dirección perpendicular a las superficies. Esta hipótesis caracteriza la interacción entre superficies lisas y fue ilustrada en el ejemplo 2 de la figura 3.1. Aunque en la mayoría de las circunstancias esta hipótesis ideal implica sólo un error relativamente pequeño, hay un elevado número de problemas en los que debe considerarse la capacidad de las superficies para soportar tanto fuerzas tangenciales como normales. Las fuerzas tangenciales que se generan en el contacto entre superficies acompañan siempre, en mayor o menor grado, a la interacción entre las superficies reales. Siempre que una de las superficies en contacto presente alguna tendencia a deslizarse con respecto a la otra, ocurre que las fuerzas de rozamiento que se generan tienen un sentido tal que se opone a ese deslizamiento.

En ciertos tipos de máquinas y procesos es deseable reducir lo más posible el efecto retardador de las fuerzas de rozamiento. Ejemplos de ello son los cojinetes de todas las clases, los destornilladores mecánicos, los engranajes, el movimiento de los fluidos en los tubos y la propulsión de aviones y misiles en el seno de la atmósfera. Hay otros casos en que lo deseable es aprovechar al máximo el rozamiento, tal como ocurre en frenos, embragues, poleas y cuñas. Los vehículos de ruedas dependen del rozamiento tanto para arrancar como para detenerse y nuestro caminar depende del rozamiento entre los zapatos y el suelo. Las fuerzas de rozamiento son consubstanciales a la Naturaleza y existen en medida considerable en todas las máquinas por mucha que sea la precisión con que se hayan construido o por muy cuidadosamente que se lubriquen. De toda máquina o proceso en que el rozamiento sea lo bastante pequeño para despreciarlo se dice que es *ideal*. Cuando hay que tener en cuenta el rozamiento de la máquina o proceso se dice que es *real*. En todos los casos reales en que tienen lugar deslizamientos entre partes en contacto, las fuerzas de rozamiento ocasionan una pérdida de energía disipada en calor. Además de esa pérdida de energía en forma de calor, el rozamiento entre las piezas en contacto produce desgaste en éstas.

SECCIÓN A. FENÓMENOS DE ROZAMIENTO

6.2 TIPOS DE ROZAMIENTO

Hay varios tipos distintos de resistencia por rozamiento y, antes de abordar en el apartado siguiente una exposición más detallada acerca del más corriente, describiremos brevemente cada uno de ellos.

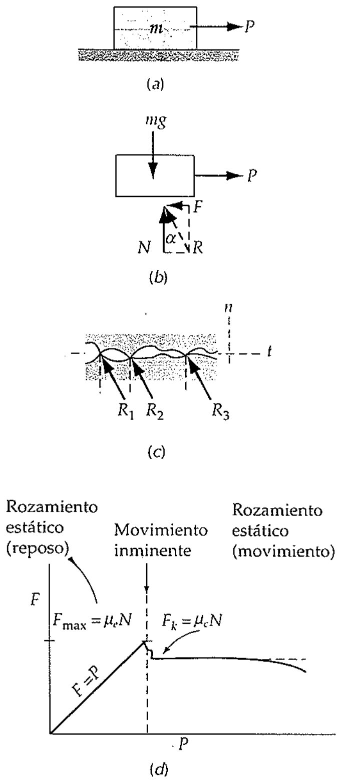
(a) ***Rozamiento seco.*** Este se presenta cuando las superficies no lubricadas de dos sólidos en contacto se deslizan una con respecto a la otra o están a punto de deslizarse. Se desarrolla entonces una fuerza de rozamiento tangente a las superficies en contacto, tanto durante el tiempo que transcurre hasta el movimiento inminente como cuando ya tiene lugar el deslizamiento. El sentido de esa fuerza es siempre opuesto al del movimiento o al del movimiento inminente. El rozamiento seco se conoce también como rozamiento de *Coulomb*. Las leyes del rozamiento seco, o de Coulomb, se desarrollaron principalmente a partir de los experimentos realizados por Coulomb en 1781 y de los trabajos de Morin entre 1831 y 1834. Aun cuando todavía no se haya desarrollado por completo una teoría comprehensiva del rozamiento seco, se dispone de un modelo analítico que basta para abordar la gran mayoría de los problemas con él relacionados; esta teoría se describe en el apartado 6.3 que sigue.

(b) ***Rozamiento fluido.*** Cuando dos capas contiguas de un fluido (líquido o gas) se mueven a distintas velocidades entre sí, se produce el rozamiento fluido. Ese movimiento da lugar a fuerzas de rozamiento entre elementos fluidos, las cuales dependen de la velocidad relativa entre las capas. Cuando no existe velocidad relativa, no hay rozamiento fluido. Este no sólo depende de los gradientes de velocidad en el seno del fluido, sino también de la viscosidad de éste, magnitud que mide su resistencia a la acción cortante entre las capas fluidas. El rozamiento fluido es un tema de la Mecánica de Fluidos y no se trata en esta obra.

*(c)****Rozamiento interno.*** El rozamiento interno se genera en todos los materiales sometidos a cargas cíclicas. Los materiales muy elásticos, después de deformados, recuperan su forma original a costa de muy poca pérdida de energía ocasionada por el rozamiento interno. En los materiales de muy bajo límite elástico y que sufren grandes deformaciones plásticas durante el proceso de carga, la cantidad de rozamiento interno que acompaña a esa deformación puede ser considerable. El mecanismo del rozamiento interno está asociado a la acción de la deformación por deslizamiento (cizalladura) y si el lector desea una descripción detallada de ese mecanismo, la encontrará en textos sobre ciencia de los materiales. Dado que este libro trata esencialmente de los efectos exteriores de las fuerzas, en lo que sigue no nos ocupamos del rozamiento interno.

6.3 ROZAMIENTO SECO

Lo que sigue de este capítulo se dedica a describir los efectos del rozamiento seco sobre las superficies exteriores de los cuerpos rígidos. El mecanismo de este fenómeno lo explicaremos basándonos en un experimento muy sencillo.



(a)

(b)

(c)

(d)

Figura 6.1

*(a)****Mecanismo del rozamiento.*** Consideremos un bloque sólido de masa m que repose sobre una superficie horizontal tal como se representa en la figura 6.1*a*. Las superficies en contacto presentan una cierta rugosidad. El experimento consiste en aplicar al bloque una fuerza horizontal P de tracción que varíe continuamente desde cero hasta un valor suficiente para ponerlo en movimiento con una velocidad apreciable. En la figura 6.1*b* se representa el diagrama de sólido libre del bloque para un valor cualquiera de la fuerza P y en él se incluye la fuerza tangencial de rozamiento F que el plano aplica al bloque. Esa fuerza de rozamiento tendrá *siempre* la dirección del movimiento y sentido opuesto a éste, o al de la tendencia al movimiento del cuerpo sobre el que actúe. Existe asimismo una fuerza normal N, que en este caso es mg, y una fuerza resultante R que la superficie de apoyo ejerce sobre el bloque y es la resultante de N y F. Nos ayudará a imaginar la acción mecánica del rozamiento la vista ampliada de las irregularidades de las superficies en contacto que se ilustra en la figura 6.1*c*. Vemos que el contacto de apoyo es necesariamente intermitente y que se produce en las crestas coincidentes. La dirección de cada una de las

reacciones R_1, R_2, R_3, etc., depende no sólo del perfil geométrico de las irregularidades sino también del grado de deformación local en cada punto de contacto. La fuerza normal N no es más que la suma de las componentes n de las reacciones y la fuerza de rozamiento total F es la suma de las componentes t de las reacciones. Cuando las superficies se hallan en movimiento relativo, los contactos se aproximan más a las crestas de las rugosidades y las componentes tangenciales t de las reacciones serán menores que cuando las superficies se hallan en reposo una respecto a otra. Esta consideración explica el conocido hecho de que la fuerza P necesaria para mantener el movimiento es menor que la requerida para poner en movimiento al bloque cuando las irregularidades están casi encajadas.

Supongamos ahora que se realiza el experimento mencionado y que se mide la fuerza de rozamiento F en función de P. En la figura 6.1d puede verse la relación experimental que se obtiene. Cuando P es nula, el equilibrio exige que no haya fuerza de rozamiento. Al crecer P, la fuerza de rozamiento deberá ser igual y opuesta a P mientras el bloque no se deslice. Durante ese tiempo el bloque está en equilibrio y todas las fuerzas que actúan sobre el mismo deberán cumplir las ecuaciones de equilibrio. Por último, se alcanza un valor de P tal que el bloque se desliza en la dirección y sentido de la fuerza aplicada P. En ese preciso instante, la fuerza de rozamiento disminuye ligera y bruscamente hasta un valor algo inferior. Luego se mantiene esencialmente constante durante un cierto intervalo, para después disminuir aún más al aumentar la velocidad.

La zona hasta el punto de inicio del deslizamiento o de movimiento inminente, es el dominio llamado de *rozamiento estático* y en él el valor de la fuerza de rozamiento queda determinado por las *ecuaciones de equilibrio*. Esa fuerza puede tener cualquier valor desde cero hasta el valor límite máximo inclusive. Para una pareja de superficies en contacto dadas, ese valor máximo de la fuerza de rozamiento estático F_{max} resulta ser proporcional a la fuerza normal. En consecuencia, podemos escribir

$$F_{\text{max}} = \mu_e N \tag{6.1}$$

donde μ_e es la constante de proporcionalidad, conocida como *coeficiente de rozamiento estático*. Debemos subrayar que esta ecuación facilita únicamente el valor *límite* o *máximo* de la fuerza de rozamiento estático, pero *no* ningún valor inferior; es decir, es aplicable *sólo* en aquellos casos en que se sepa que el movimiento es inminente y que, por tanto, la fuerza de rozamiento tiene su máximo valor. Entonces, recordemos que en un estado de equilibrio estático en que el movimiento *no* sea inminente la fuerza de rozamiento estático es

$$F < \mu_e N$$

Iniciado el deslizamiento, el movimiento subsiguiente va acompañado del *rozamiento cinético*. La fuerza de rozamiento cinético acostumbra a ser algo inferior a la máxima de rozamiento estático. Resulta aquí también que la fuerza de rozamiento cinético F_c es proporcional a la fuerza normal. Es decir,

$$F_c = \mu_c N \tag{6.2}$$

donde μ_c es el *coeficiente de rozamiento cinético*. Se deduce que, en general, μ_c será algo menor que μ_e. Al aumentar la velocidad del bloque, el coeficiente de rozamiento cinético disminuye algo y al alcanzar velocidades elevadas, puede hacerse apreciable el efecto lubricante de la capa de aire existente entre las superficies. Los coeficientes de rozamiento dependen en gran medida del estado exacto de las superficies, así como de la velocidad, y están sujetos a un gran margen de incertidumbre.

Dada la variabilidad de las condiciones que rigen la acción del rozamiento, en la práctica suele ser difícil distinguir en todos los casos entre un coeficiente estático y uno cinético, particularmente en la zona de transición entre el movimiento inminente y el movimiento. Por ejemplo, bajo cargas leves, en los filetes de rosca bien engrasados, el frenado por rozamiento que se presenta cuando están a punto de girar suele ser comparable al que sufren cuando ya se mueven. En los textos de Mecánica aplicada es frecuente que las expresiones relativas a los rozamientos estático y cinético se escriban simplemente $F = \mu N$, debiendo entenderse en cada caso si hacen referencia a un rozamiento estático máximo o a un rozamiento cinético. Aunque muchas veces distinguiremos entre los coeficientes estático y cinético, en otros casos no haremos distinción alguna y el coeficiente de rozamiento lo escribiremos simplemente μ. Entonces, el lector deberá decidir cuál es el estado de rozamiento que priva, si se trata de un rozamiento estático máximo ante un movimiento inminente, o bien si es un rozamiento cinético. Subrayamos una vez más que en numerosos problemas interviene una fuerza de rozamiento estático de valor inferior al correspondiente al movimiento inminente y que, por tanto, en tales casos, no puede emplearse la ecuación 6.1.

En la figura 6.1c puede observarse que la posibilidad de que los ángulos entre las reacciones y la dirección n sean grandes es mayor en las superficies rugosas que en las superficies más lisas. Así pues, un coeficiente de rozamiento refleja la rugosidad de una pareja de superficies en contacto e incorpora una propiedad geométrica del contacto de ambos contornos. Admitido este modelo geométrico para el mecanismo del rozamiento, diremos que unas superficies en contacto son "lisas" cuando las fuerzas de rozamiento que puedan soportar sean despreciables. Carece de sentido hablar de coeficiente de rozamiento de un superficie sola.

En la figura 6.1b, la dirección de la resultante R medida a partir de la dirección de N está dada por $\operatorname{tg} \alpha = F/N$. Cuando la fuerza de rozamiento alcanza su valor estático máximo F_{max}, el ángulo α alcanza un valor máximo ϕ_e. O sea,

$$\operatorname{tg} \phi_e = \mu_e$$

Cuando se produzca el deslizamiento, el ángulo α tendrá un valor ϕ_c correspondiente a la fuerza de rozamiento cinético. De forma análoga

$$\operatorname{tg} \phi_c = \mu_c$$

En la práctica suele emplearse la expresión $\operatorname{tg} \phi = \mu$ cuando el coeficiente de rozamiento puede referirse a una situación estática o a una cinética, según sea el problema concreto. El ángulo ϕ_c es el llamado *ángulo de rozamiento estático* y ϕ_c el *ángulo de rozamiento cinético*. Es evidente que el ángulo de rozamiento define, en cada caso, la posición límite de la reacción total R entre dos superficies en contacto. Si el movimiento es inminente, R debe coincidir con una generatriz

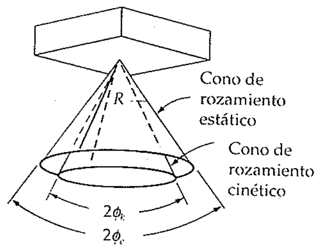


Figura 6.2

del cono circular recto de ángulo en el vértice $2\phi_e$, tal como se muestra en la figura 6.2. Si el movimiento no es inminente, R estará dentro del cono. Este cono de ángulo en el vértice $2\phi_e$ se conoce como *cono de rozamiento estático* y representa el lugar geométrico de las posiciones posibles de R ante el movimiento inminente. Si se inicia el movimiento, interviene el ángulo de rozamiento cinético y la reacción se hallará en la superficie de un cono levemente distinto de ángulo en el vértice $2\phi_c$, o *cono de rozamiento cinético*.

Experimentos adicionales muestran que la fuerza de rozamiento es esencialmente independiente del área de la superficie de contacto, aparente o proyectada. El área de contacto real es mucho menor que la proyectada, puesto que la carga la soportan nada más que las crestas de las irregularidades de las superficies en contacto. Ocurre así que cargas relativamente pequeñas pueden producir grandes esfuerzos en esos puntos de contacto. Cuando aumenta la fuerza normal, el área de contacto real también aumenta, pues entonces el material sufre cesión plástica, aplastamiento o desgarramiento. Una teoría completa del rozamiento seco debe ir más allá de la explicación mecánica que aquí se presenta. Por ejemplo, hay algunas pruebas que respaldan la teoría de que la atracción molecular podría ser una importante causa de rozamiento en situaciones en que el contacto entre ambas superficies sea muy íntimo. Otros factores que influyen en el rozamiento seco son la generación de temperaturas locales elevadas y la adhesión de los puntos de contacto, la dureza relativa de la superficies en presencia y la existencia de películas superficiales delgadas de óxido, aceite, suciedad u otras sustancias.

(b) Tipos de problemas de rozamiento. De lo expuesto hasta aquí, podemos establecer que pueden presentarse tres tipos diferenciados de problemas de rozamiento. Por tanto, el primer paso, ante un problema de rozamiento, será averiguar a qué categoría pertenece.

(1) El *primer* tipo corresponde a los casos en que se da una situación de movimiento inminente. Entonces ocurre que un cuerpo en equilibrio se encuentra a punto de iniciar el deslizamiento y que la fuerza de rozamiento es estrictamente igual al rozamiento estático límite $F_{\max} = \mu_e N$. Por supuesto, se cumplirán las condiciones de equilibrio.

(2) En el *segundo* tipo de problemas se desconoce si las condiciones son de movimiento inminente o de movimiento. Para determinar la situación real del rozamiento, se comienza suponiendo que hay equilibrio estático y se halla la fuerza F necesaria para que así sea. Entonces pueden ocurrir tres cosas:

(a) $F < (F_{\max} = \mu_e N)$: La conclusión es que la fuerza de rozamiento necesaria para que haya equilibrio puede soportarse y, por tanto, el cuerpo se halla en equilibrio tal como se supuso. Insistimos en que la fuerza de rozamiento *real* F es inferior al *valor límite* $F_{\max}$ que da la ecuación 6.1 y que F está determinada *exclusivamente* por las ecuaciones de equilibrio.

(b) $F = (F_{\max} = \mu_e N)$: Como la fuerza de rozamiento F posee su valor máximo $F_{\max}$, el movimiento es inminente, tal como se trata en el caso (1). Es válida la hipótesis de equilibrio estático.

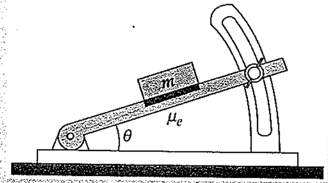
(c) $F > (F_{\max} = \mu_e N)$: Puesto que las superficies no pueden soportar una fuerza mayor que la máxima $\mu_e N$, es evidente que esta situación es imposible. Por tanto, la hipótesis de equilibrio no es válida y hay movimiento. Según la ecuación 6.2, la fuerza de rozamiento será $\mu_c N$.

(3) El tercer tipo de problemas entraña movimiento relativo entre las superficies en contacto y en tal caso se aplica el coeficiente de rozamiento cinético. En este caso, la ecuación 6.2 dará directamente siempre la fuerza de rozamiento cinético.

La discusión anterior es aplicable a todas las superficies secas en contacto y, hasta cierto límite, a superficies móviles parcialmente lubricadas. En la tabla D.1 del apéndice D se dan algunos valores típicos de coeficientes de rozamiento. Estos valores son sólo aproximados y están sujetos a variaciones considerables según las condiciones que exactamente prevalezcan. Sin embargo, pueden utilizarse como ejemplos representativos de los órdenes de magnitud de los coeficientes de rozamiento. Cuando se requiere un cálculo fiable en que intervenga algún rozamiento, lo más aconsejable suele ser determinar experimentalmente el coeficiente de rozamiento adecuado reproduciendo lo más fielmente posible el estado de las superficies en contacto.

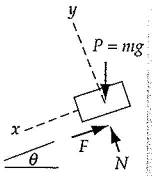
PROBLEMA TIPO 6.1

Determinar el ángulo máximo θ que puede formar con la horizontal el plano de inclinación ajustable antes de que el bloque de masa m comience a deslizar. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es μ_e.



Solución. En el diagrama de sólido libre del bloque deben representarse su peso $P = mg$, la fuerza normal N y la fuerza de rozamiento que el plano inclinado ejerce sobre el bloque. Esta última actúa en sentido opuesto al que tendría el movimiento de deslizamiento de no existir rozamiento.

① El equilibrio en las direcciones x e y requiere



$$[\Sigma F_x = 0] \qquad mg \ \text{sen}\ \theta - F = 0 \qquad F = mg\ \text{sen}\ \theta$$

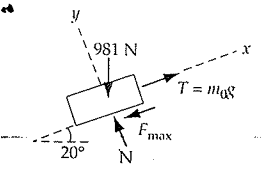
$$[\Sigma F_y = 0] \qquad -mg\ \cos\theta + N = 0 \qquad N = mg\cos\theta$$

Al dividir la primera ecuación por la segunda resulta $F/N = \text{tg}\ \theta$. Como el ángulo máximo se presenta para $F = F_{\max} = \mu_e N$, para la situación de movimiento inminente se tendrá

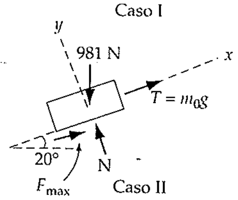
② $$\mu_e = \text{tg}\ \theta_{\max} \qquad \text{o sea} \qquad \theta_{\max} = \text{arctg}\ \mu_e \qquad \textit{Resp.}$$

① Para no tener que descomponer F y N en sus componentes, tomamos unos ejes de referencia respectivamente paralelos y perpendiculares a la dirección de F.
② En este problema se describe una manera muy sencilla para determinar coeficientes de rozamiento estático. El valor máximo de θ se conoce como ángulo de reposo natural.

PROBLEMA TIPO 6.2

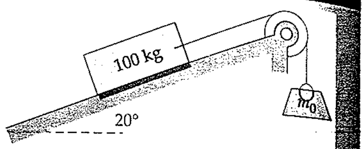


Caso I



Caso II

Determinar el intervalo de valores que puede tener la masa m para que el bloque de 100 kg de la figura ni inicie su movimiento plano arriba ni se deslice plano abajo. El coeficiente de rozamiento estático en la superficies de contacto es 0,30.



Solución. El valor máximo de m_0 vendrá dado por el requisito de movimiento inminente plano arriba. Por tanto, la fuerza de rozamiento sobre el bloque estará dirigida plano abajo, según se indica en el diagrama de sólido libre correspondiente al bloque en el caso I de la figura. Siendo $mg = 100(9{,}81) = 981$ N el peso del bloque, las ecuaciones de equilibrio dan

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad N - 981 \cos 20° = 0 \qquad N = 922$ N

$[F_{max} = \mu_e N]$ $\quad F_{max} = 0{,}30(922) = 277$ N

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad m_0(9{,}81) - 277 - 981 \text{ sen } 20° = 0 \qquad m_0 = 62{,}4$ kg *Resp.*

El valor mínimo de m_0 lo determina la condición de movimiento inminente plano abajo. ① La fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque estará dirigida plano arriba, oponiéndose a la tendencia al movimiento, según se indica en el diagrama de sólido libre del caso II. El equilibrio en la dirección x exige:

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad m_0(9{,}81) - 277 - 981 \text{ sen } 20° = 0 \qquad m_0 = 6{,}0$ kg *Resp.*

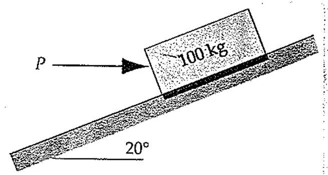
Luego m_o puede tener cualquier valor comprendido entre 6,0 y 62,4 kg, y el bloque permanecerá en reposo.

En ambos casos el equilibrio impone que la resultante de F_{max} y N sea concurrente con el peso de 981 N y la tracción aplicada T.

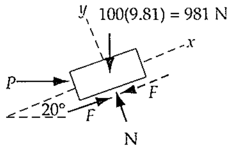
① Según los resultados del problema tipo 6.1, si no existiera la ligadura a m_0 el bloque se deslizaría plano abajo al ser tg 20° > 0,30. Por ello, m_o ha de tener el valor necesario para mantener el equilibrio.

PROBLEMA TIPO 6.3

Determinar el módulo y sentido de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque de 100 kg representado si, primero P = 500 N, y, segundo, si P = 100 N. El coeficiente de rozamiento estático vale 0,20 y el de rozamiento cinético, 0,17. Las fuerzas se aplican con el bloque inicialmente en reposo.



Solución. El enunciado del problema no permite saber si el bloque permanecerá en equilibrio o comenzará a deslizarse cuando se aplique P. Por tanto, hemos de hacer una hipótesis y, así, supondremos que la fuerza de rozamiento está dirigida plano arriba tal como indica el vector de trazo lleno. En el diagrama de sólido libre, el equilibrio de las fuerzas en las direcciones x e y da



$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad P \cos 20° + F - 981 \text{ sen } 20° = 0$

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad N - P \text{ sen } 20° - 981 \cos 20° = 0$

Caso I. $\quad P = 500$ N

Sustituyendo P por 500 en la primera de las dos ecuaciones se tiene

$$F = -134 \text{ N}$$

El signo negativo revela que *si* el bloque está en equilibrio, la fuerza de rozamiento que actúa sobre él tiene el sentido contrario al supuesto y, por tanto, apunta plano abajo tal como representa el vector de trazos. Ahora bien, no podemos sacar ninguna conclusión acerca del módulo de F hasta comprobar si las superficies pueden soportar una fuerza de rozamiento de 134 N. Esto podemos hacerlo sustituyendo P por 500 N en la segunda ecuación, con lo cual

$$N = 1093 \text{ N}$$

La fuerza máxima de rozamiento estático que las superficies pueden soportar será

$[F_{max} = \mu_e N]$ $\quad F_{max} = 0{,}20(1093) = 219$ N

Como esta fuerza es mayor que la necesaria para el equilibrio, resulta que la hipótesis de equilibrio era correcta. Así pues, la solución es

$F = 134$ N, plano abajo *Resp.*

Caso II. $\quad P = 100$ N

Sustituyendo en las dos ecuaciones de equilibrio P por 500 se tiene

$$F = 231 \text{ N} \qquad N = 956 \text{ N}$$

Pero la fuerza máxima de rozamiento estático es

$[F_{max} = \mu_e N]$ $\quad F_{max} = 0{,}20(956) = 191$ N

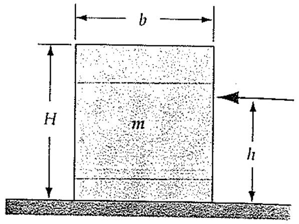
① Es decir, la fuerza de 231 N no puede ser soportada. Por tanto, no puede haber equilibrio y el valor correcto de la fuerza de rozamiento lo obtenemos empleando el coeficiente de rozamiento con el movimiento plano abajo. Luego el resultado será

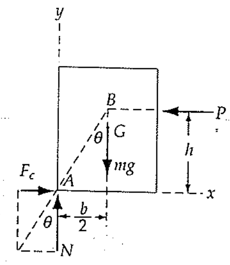
$[F_c = \mu_c N]$ $\quad F = 0{,}17(956) = 163$ N, plano arriba *Resp.*

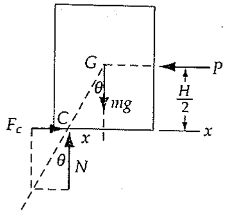
① Debemos observar que aunque ΣF_x ya no sea igual a cero, se conserva el equilibrio en la dirección y, por lo que $\Sigma F_y = 0$. Por tanto, la fuerza normal será 956 N, esté o no el bloque en equilibrio.

PROBLEMA TIPO 6.4

El bloque homogéneo rectangular de masa m, anchura b y altura H está situado sobre la superficie horizontal y sometido a una fuerza horizontal P que lo hace moverse por la superficie a velocidad constante. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es μ_c. Determinar (a) el valor máximo que puede tener h para que el bloque se deslice sin volcar y (b) la posición del punto C de la superficie inferior del bloque por donde pasa la resultante de las fuerzas normal y de rozamiento si $h = H/2$.







Solución. (a) Si el bloque está a punto de volcar, toda la reacción entre el bloque y el plano estará en A. En el diagrama de sólido libre se representa esa situación. Como hay deslizamiento, la fuerza de rozamiento es el valor límite $\mu_c N$ y el ángulo θ se hace $\theta = \text{arctg}\ \mu_c$. La resultante de F y N pasa por un punto B por el que ① también debe pasar P, puesto que se trata del equilibrio de tres fuerzas coplanares. Luego de la geometría del bloque

$$\text{tg}\ \theta = \mu_c = \frac{b/2}{h} \qquad h = \frac{b}{2\mu_c} \qquad \textit{Resp.}$$

Si h fuese mayor que este valor, no habría equilibrio de momentos respecto a A y el bloque volcaría.

También puede hallarse h escribiendo las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas en las direcciones x e y la ecuación de momentos respecto a A. O sea,

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad N - mg = 0 \qquad N = mg$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad F_c - P = 0 \qquad P = F_c = \mu_c N = \mu_c mg$$

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad Ph - mg\,\frac{b}{2} = 0 \qquad h = \frac{mgb}{2P} = \frac{mgb}{2\mu_c mg} = \frac{b}{2\mu_c} \qquad \textit{Resp.}$$

(b) Para $h = H/2$ el diagrama de sólido libre del caso (b) muestra que la resultante de F_c y N pasa por un punto C situado a la distancia x a la izquierda del eje de simetría vertical que pasa por G. El ángulo θ sigue siendo $\theta = \phi = \text{arctg}\ \mu_c$ en tanto se deslice el bloque. Entonces, teniendo en cuenta la geometría del bloque,

$$\frac{x}{H/2} = \text{tg}\ \theta = \mu_c \qquad \text{de modo que} \qquad x = \mu_c H/2 \qquad \textit{Resp.}$$

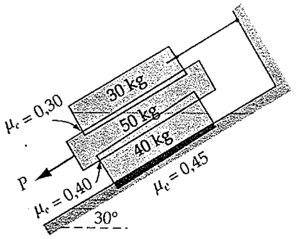
② Si sustituyéramos μ_c por el coeficiente de rozamiento estático μ_e, estas soluciones describirían la situación correspondiente a encontrarse el bloque (a) a punto de volcar y (b) a punto de deslizarse, ambas desde el reposo.

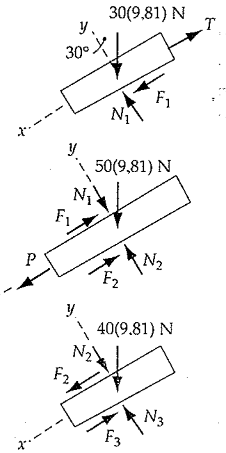
① **Recuérdese que las ecuaciones de equilibrio son aplicables a todo cuerpo que se mueva a velocidad constante (aceleración nula) tanto como a los cuerpos en reposo.**

② **Otra posibilidad sería igualar a cero la suma de los momentos respecto a C, lo que nos daría $F(H/2) - Nx = 0$. Entonces, con $F_c = \mu_c N$, se tendría $x = \mu_c H/2$.**

PROBLEMA TIPO 6.5

Los tres bloques se encuentran, tal como se representa, colocados sobre el plano inclinado 30°, estando una fuerza P paralela al mismo aplicada al bloque central. El movimiento del bloque superior está impedido por un alambre rígido que lo une al soporte rígido y en la figura se indican los coeficientes de rozamiento estático para cada una de las tres parejas de superficies en contacto. Determinar el valor máximo que puede tener P antes de que tenga lugar algún deslizamiento.





Solución. Se representan los diagramas de sólido libre de cada bloque, en los que a las fuerzas de rozamiento se han asignado sentidos opuestos a los movi- ① mientos relativos que tendrían lugar en ausencia de rozamiento. Existen dos situaciones posibles de movimiento inminente. O se desliza el bloque de 50 kg permaneciendo en reposo el de 40 kg, o se mueven ambos juntos deslizándose el de 40 kg sobre el plano.

La fuerzas normales, de dirección y, pueden determinarse con independencia de las fuerzas de rozamiento, pues éstas tiene todas la dirección x. Así pues,

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad (30\ \text{kg}) \qquad N_1 - 30(9{,}81)\cos 30° = 0 \qquad N_1 = 255\ \text{N}$$

$$(50\ \text{kg}) \qquad N_2 - 50(9{,}81)\cos 30° - 255 = 0 \qquad N_2 = 680\ \text{N}$$

$$(40\ \text{kg}) \qquad N_3 - 40(9{,}81)\cos 30° - 680 = 0 \qquad N_3 = 1019\ \text{N}$$

Supongamos, arbitrariamente, que sólo se deslice el bloque de 50 kg, mientras que el de 40 kg permanece inmóvil. Entonces, para que en ambas superficies del bloque de 50 kg el deslizamiento sea inminente, tenemos

$$[F_{\max} = \mu_e N] \qquad F_1 = 0{,}30(255) = 76{,}5\ \text{N} \qquad F_2 = 0{,}40(680) = 272\ \text{N}$$

La hipótesis de equilibrio del bloque de 50 kg con movimiento inminente da

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad P - 76{,}5 - 272 + 50(9{,}81)\ \text{sen}\ 30° = 0 \qquad P = 103{,}1\ \text{N}$$

Comprobemos ahora la validez de la hipótesis inicial. Para el bloque de 40 kg, siendo $F_2 = 272$ N, la fuerza de rozamiento F_3 vendría dada por

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad 272 + 40(9{,}81)\ \text{sen}\ 30° - F_3 = 0 \qquad F_3 = 468\ \text{N}$$

Pero como el valor máximo de F_3 es $F_3 = \mu_e N_3 = 0{,}45(1019) = 459$ N, la fuerza de 468 N no puede ser soportada y la hipótesis inicial era errónea. Concluimos, pues, que se produce deslizamiento entre el bloque de 40 kg y el plano. Con el valor corregido de $F_3 = 459$ N el equilibrio del bloque de 40 kg para esta situación de movimiento inminente requiere

① **En ausencia de rozamiento, el bloque central, bajo la influencia de P, se movería más rápido que el bloque de 40 kg y el sentido de la fuerza de rozamiento F_2 sería, tal como se indica, contrario a ese movimiento.**

② **Véase que ahora F_2 es menor que $\mu_c N_2$ = 272 N.**

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad F_2 + 40(9{,}81)\ \text{sen}\ 30° - 459 = 0 \qquad F_2 = 263\ \text{N}$$

② Finalmente, el equilibrio del bloque de 50 kg nos da

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad P + 50(9{,}81)\ \text{sen}\ 30° - 263 - 76{,}5 = 0$$

$$P = 93{,}8\ \text{N}$$

Resp.

O sea, con P = 93,8 N, hay movimiento inminente para el conjunto de los bloques de 50 kg y 40 kg.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

6.1 El embalaje de 100 kg se encuentra inmóvil cuando se le aplica la fuerza P de 400 N. Hallar el módulo y la dirección de la fuerza de rozamiento F que la superficie horizontal ejerce sobre el embalaje.

Resp. F = 400 N (hacia la izquierda)

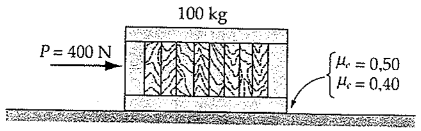


Figura problema 6.1

6.2 El bloque de 100 kg se encuentra inmóvil cuando se le aplica la fuerza *P* de 700 N. Hallar el módulo y la dirección de la fuerza de rozamiento *F* que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque.

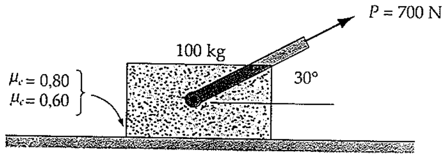


Figura problema 6.2

6.3 El diseñador de una estación de esquí desea que un tramo de una pista para principiantes tenga una pendiente tal que la velocidad de descenso de los esquiadores permanezca prácticamente constante. Los ensayos indican que los coeficientes de rozamiento medios entre los esquíes y la nieve son μ_e = 0,10 y μ_c = 0,80. ¿Cuál debe ser el ángulo de pendiente del tramo de velocidad constante?

Resp. θ = 4,57°

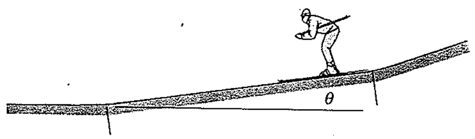


Figura problema 6.3

6.4 Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque de 100 kg y el plano inclinado son 0,30 y 0,20, respectivamente. Determinar (*a*) la fuerza *F* de rozamiento que se ejerce sobre el bloque cuando se aplica a éste en reposo una fuerza *P* de 200 N, (*b*) la fuerza *P* que se necesita para iniciar el movimiento hacia arriba del plano inclinado partiendo del reposo, y (*c*) la fuerza *F* de rozamiento que se ejerce sobre el bloque si *P* = 600 N.

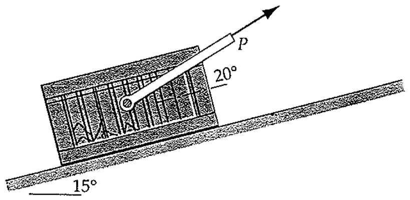


Figura problema 6.4

6.5 El eje de acero de 80 mm de diámetro se ajusta forzadamente en el orificio del bloque de fundición. Si para iniciar el giro del eje dentro del bloque inmovilizado hay que aplicar un par de momento *M* = 40 N · m, calcular el esfuerzo de compresión (presión) σ entre las superficies en contacto. Se sabe que el coeficiente de rozamiento estático entre ambas piezas es 0.35.

Resp. σ = 162,4 kPa

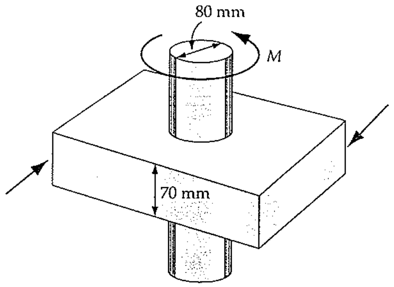


Figura problema 6.5

6.6 El taco de madera de 1,2 kg se emplea para mantener horizontal el bote de 9 kg de pintura. Hallar el módulo y la dirección de (*a*) la fuerza de rozamiento que ejerce el tejado sobre el taco y (*b*) la fuerza total que sobre él ejerce el tejado .

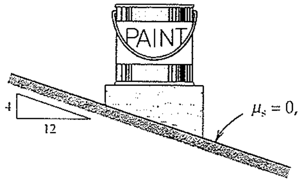


Figura problema 6.6

6.7 El poste uniforme de longitud *l* se apoya en la pared vertical tal como se indica. Si el coeficiente de rozamiento estático entre las superficies de apoyo y los extremos del poste vale 0.25, calcular el ángulo máximo θ bajo el que puede colocarse el poste sin que éste comience a resbalar.

Resp. θ = 28,1°

6.8 La barra liviana se usa como apoyo del bloque de 50 kg en sus guías verticales. Si el coeficiente de rozamiento estático vale 0,30 en el extremo superior de la barra, y 0,40 en su extremo inferior, hallar la fuerza de rozamiento que actúa en cada extremo si *x* = 75 mm. Hallar asimismo el valor máximo de *x* para el que la barra no resbala.

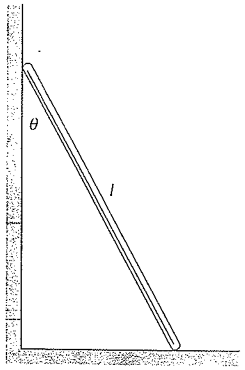


Figura problema 6.7

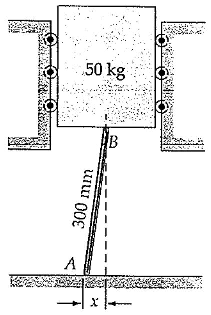


Figura problema 6.8

6.9 Las tenazas se utilizan para manejar tubos de acero calientes que se tratan en un baño de aceite. Para una apertura de las mordazas igual a 20°, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático mínimo entre las mordazas y el tubo que permita a las tenazas sujetar el tubo sin deslizamiento?

Resp. μ_c = 0,176

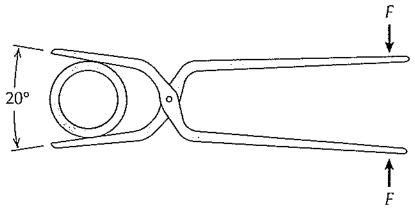


Figura problema 6.9

Problemas representativos

6.10 Un carrete de cable de 80 kg se coloca contra la pared tal como se muestra en la figura. Si en ambas superficies de contacto los coeficientes de rozamiento estático y cinético son, respectivamente, 0,30 y 0,25, calcular la fuerza horizontal P a aplicar al cable para que el carrete se mantenga girando a velocidad constante.

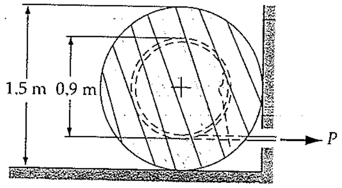


Figura problema **6.10**

6.11 La fuerza P se aplica tangencialmente a la periferia de la rueda de 25 kg, en la posición que se indica, para evitar que ruede hacia abajo. El coeficiente de rozamiento entre la rueda y el plano es de 0,30. Determinar la fuerza F de rozamiento que ejerce el plano sobre la rueda.

Resp. $F = 34{,}0$ N

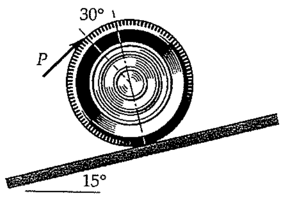


Figura problema **6.11**

6.12 Para introducir el tapón cilíndrico de diámetro d en el collarín inmóvil hasta una profundidad h, se requiere una fuerza P que venza el rozamiento de un ajuste forzado. Demostrar que para rotar el tapón dentro del collarín hace falta un par de momento $M = Pd/2$.

6.13 Calcular la fuerza P requerida para que el bloque de 24 kg empiece a subir por el plano inclinado 10°. El coeficiente de rozamiento estático de cada pareja de superficies es de 0,30.

Resp. $P = 224$ N

6.14 El puntal AB de masa despreciable está articulado en A a la superficie horizontal y en B a la rueda uniforme de 25 kg. Determinar el par mínimo M aplicado a la rueda que haga que ésta resbale si el coeficiente de rozamiento estático entre ella y la superficie vale 0,40.

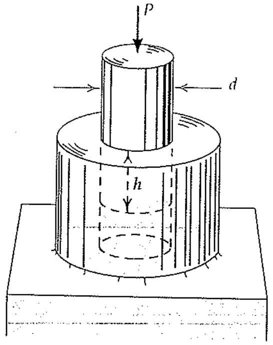


Figura problema **6.12**

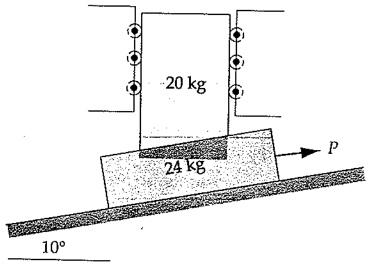


Figura problema **6.13**

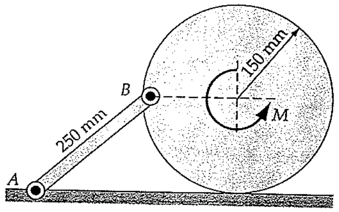


Figura problema **6.14**

6.15 Si el sentido del par m del problema 6.14 fuese horario y no antihorario, calcular cuál sería su valor mínimo para que la rueda resbalara.

Resp. $M = 36{,}8$ N · m

6.16 El hombre de 80 kg de centro de gravedad G sujeta como se muestra el bidón de 34 kg. Hallar a qué distancia máxima x puede situarse el hombre, sin resbalar, si el coeficiente de rozamiento estático entre sus zapatos y el suelo es de 0,40.

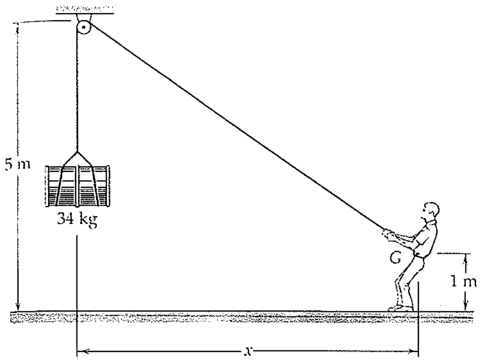


Figura problema **6.16**

6.17 Los dos hombres arrastran rampa arriba el embalaje de 100 kg. Si el de abajo empuja horizontalmente con una fuerza de 500 N, siendo 0,40 el coeficiente de rozamiento cinético, hallar la tracción T que el de arriba debe ejercer en la cuerda para mantener el embalaje en movimiento.

Resp. $T = 465$ N

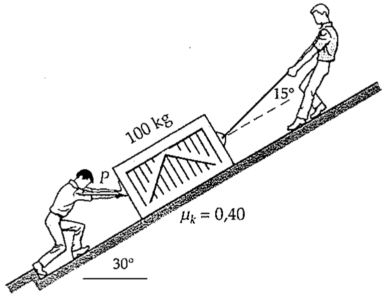


Figura problema **6.17**

6.18 El embalaje de 200 kg de centro de masa en G se apoya sobre las superficies horizontales mediante un patín en A y un rodillo en B. Si para iniciar el movimiento del embalaje se requiere una fuerza P de 400 N, hallar el coeficiente de rozamiento estático en A.

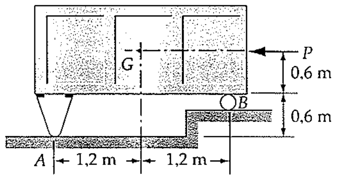


Figura problema **6.18**

6.19 La puerta corrediza se desplaza sobre las dos ruedecitas inferiores A y B. En condiciones normales las ruedas superiores no están en contacto con su guía horizontal. (*a*) Calcular la fuerza P necesaria para correr la puerta a velocidad constante si la rueda A "se agarrota" y no gira en su cojinete. (*b*) Rehacer el cálculo para el caso en que sea B la rueda agarrotada y no la A. El coeficiente de rozamiento cinético entre una rueda agarrotada y la superficie en que se apoya es 0,30 y el centro de masa de la puerta de 64 kg coincide con su centro geométrico. Despréciense los diámetros de las ruedecitas.

Resp. (*a*) $P = 65{,}9$ N (*b*) $P = 164{,}8$ N

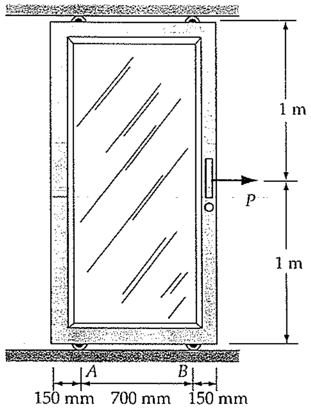


Figura problema **6.19**

6.20 En la figura se muestra la sección transversal de un soporte horizontal cargado que se sujeta al árbol vertical mediante el rodillo B y en la esquina A merced al rozamiento. El

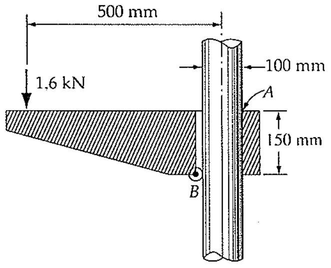


Figura problema **6.20**

coeficiente de rozamiento estático vale 0.40. Despréciese el peso del soporte y comprobar que éste permanece en su sitio. Hallar la fuerza de rozamiento F.

6.21 Un tramo de verja de masa m encaja holgadamente en las ranuras verticales de los postes laterales y puede ser extraído alzándolo con una fuerza P mayor que mg. Cuando P se aplica a una distancia x del centro, el tramo de verja rota ligeramente en sentido antihorario al comenzar a elevarse y las esquinas A y C se ponen en contacto con los fondos de las ranuras, mientras que las esquinas B y D quedan libres. Si el coeficiente de rozamiento estático entre las esquinas y los fondos de las ranuras es μ_e, determinar el valor máximo de x para que el tramo de verja no se trabe. (Si x sobrepasa ese valor, el ángulo entre la fuerza en cada esquina y la normal horizontal a las ranuras se hace inferior a $\phi_e = \operatorname{arctg} \mu_e$ y no podrá haber deslizamiento por grande que sea P.)

Resp. $x = \frac{b}{2\mu_e}\left(1 - \frac{mg}{P}\right)$

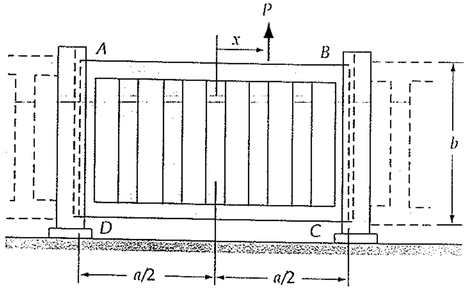


Figura problema 6.21

6.22 Dos automóviles, los dos con el centro de masa situado como se indica equidistante de los puentes delantero y trasero, son iguales salvo por el hecho de que uno es de tracción delantera y el otro es de tracción trasera. Ambos vehículos son conducidos por pendientes de inclinaciones diversas. Desde un punto de vista teórico, ¿cuál de ellos podría subir por la pendiente de mayor ángulo de inclinación θ? Justificar la respuesta.

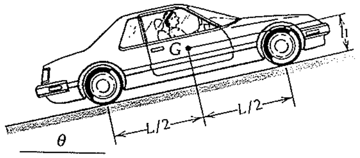


Figura problema 6.22

6.23 La brida rectangular de acero se emplea para evitar los deslizamientos entre los tablones a causa de fuerzas de tracción como las P. Si el coeficiente de rozamiento estático vale 0,30 en los contactos de la brida con los tablones y en los contactos entre los tablones, determinar qué valor máximo puede tener h para que no haya deslizamiento. Para P = 800 N, determinar la correspondiente fuerza normal N entre los dos tablones si en todas las superficies el movimiento es inminente.

Resp. h = 156,6 mm N = 1333 N

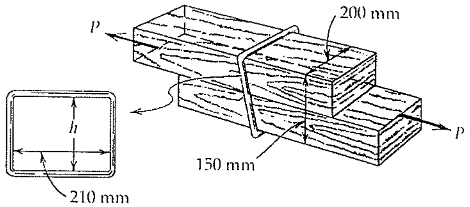


Figura problema 6.23

6.24 El cilindro macizo de 50 kg es obligado a rodar lentamente plano arriba por la fuerza P aplicada paralelamente al plano inclinado a una cuerda arrollada al cilindro. Calcular la fuerza de rozamiento F entre el cilindro y el plano inclinado. El coeficiente de rozamiento estático μ_e vale 0,20.

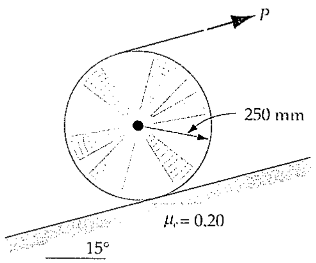


Figura problema 6.24

6.25 Determinar la distancia s hasta la que puede subir el pintor de 90 kg sin que la escalera de 4 m resbale sobre su extremo inferior A. El extremo superior de la escalera de 15 kg está provisto de un pequeño rodillo y, en el suelo, el coeficiente de rozamiento estático es de 0,25. El centro de masa del pintor está exactamente en la vertical de sus pies.

Resp. s = 2,55 m

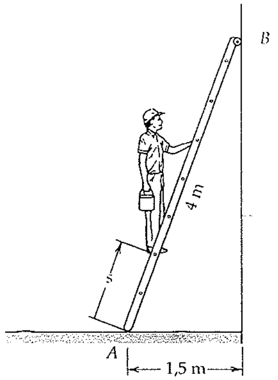


Figura problema 6.25

6.26 La rueda de la figura rodará hacia la izquierda cuando sea pequeño el ángulo α que forma la cuerda con la vertical. Cuando α es grande, la rueda gira hacia la derecha. Determinar, examinando la geometría del diagrama de sólido libre, el ángulo α para el cual la rueda no avanzará en ningún sentido. Si el coeficiente de rozamiento estático es μ_e y la masa de la rueda m, calcular el valor de P para el cual la rueda se deslizará para el valor crítico de α.

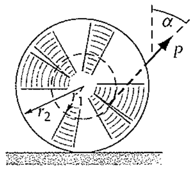


Figura problema 2.26

6.27 Calcular la fuerza T que hará girar el carrete de cable telefónico de 200 kg apoyado sobre sus cubos y que se halla en contacto con una pared vertical. El coeficiente de rozamiento cinético en cada pareja de superficies de contacto vale 0,60.

Resp. T = 727 N

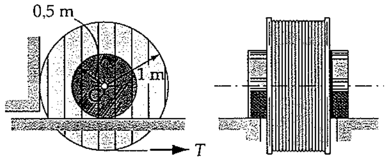


Figura problema 6.27

6.28 La barra uniforme, cuyo centro de masa está en G, se apoya en las espigas A y B que están fijas a la rueda. Si es μ el coeficiente de rozamiento entre la barra y las espigas, determinar el ángulo θ que puede girarse lentamente la rueda alrededor de su eje horizontal que pasa por O, a partir de la posición representada, sin que se deslice la barra. Despréciese el diámetro de la barra en comparación con las otras dimensiones.

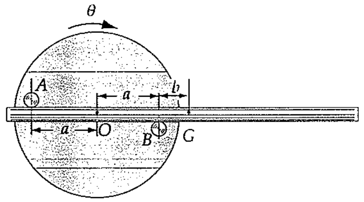


Figura problema 6.28

6.29 La barra delgada uniforme de masa m y longitud L se encuentra inicialmente en reposo en posición horizontal centrada sobre la superficie circular fija de radio $R = 0{,}6L$. Si en el extremo de la barra comienza a aplicarse poco a poco una fuerza P normal a la misma, el deslizamiento se inicia para $\theta = 20°$. Determinar el coeficiente de rozamiento estático μ_e.

Resp. μ_e = 0.212

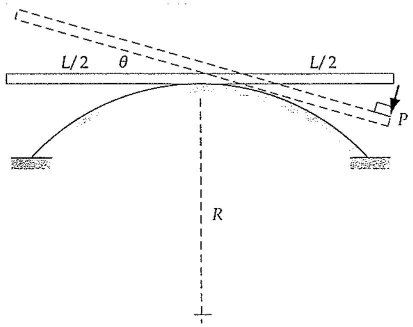


Figura problema 6.29

6.30 Calcular el módulo del par horario M necesario para μ_e rotar el cilindro de 50 kg dentro del bloque de apoyo representado. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,30.

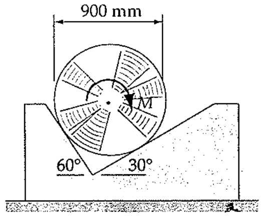


Figura problema 6.30

6.31 El semicilindro de masa m y radio r rueda un ángulo θ por efecto de la fuerza horizontal P. Si es μ_e el coeficiente de rozamiento estático, hallar el ángulo θ para que el cilindro comience a resbalar sobre la superficie horizontal al ir aumentando gradualmente P ¿Qué valor de μ_e permitiría que θ llegara a los 90°?

Resp. $\theta = \text{arcsen}\left(\dfrac{\pi\mu_e}{2 - \pi\mu_e}\right) \qquad \mu_{90^\circ} = 0{,}318$

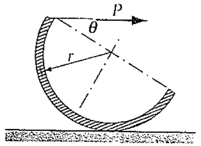


Figura problema 6.31

6.32 Los tres rodillos iguales están apilados como se muestra sobre una superficie horizontal. Si el coeficiente de rozamiento estático μ_e es el mismo en todas las parejas de superficies en contacto, hallar el valor mínimo de μ_e para que los rodillos no resbalen.

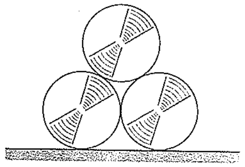


Figura problema 6.32

6.33 El freno simple de zapata actúa contra la rotación del volante de inercia sometido a un par antihorario M. Siendo μ_e el coeficiente de rozamiento estático, hallar la fuerza P necesaria para impedir la rotación. Explicar que ocurriría si la geometría permitiera que b fuese iguala a μ_e.

Resp. $P = \dfrac{M}{rl}\left(\dfrac{b}{\mu_e} - e\right)$

6.34 Determinar la fuerza P necesaria para mover el tablón uniforme de 50 kg a partir de su posición de equilibrio, representada en la figura, si el coeficiente de rozamiento estático en los dos contactos es 0,50.

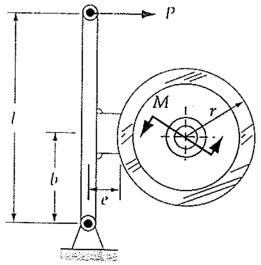


Figura problema 6.33

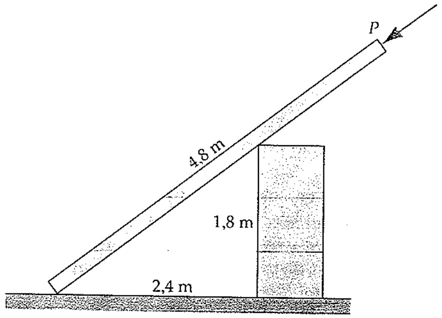


Figura problema 6.34

6.35 La barra delgada uniforme se hace bajar lentamente desde la posición vertical (θ = 90°) mediante la cuerda sujeta a su extremo superior que pasa por la pequeña polea fija. Si se observa que el extremo inferior de la barra resbala cuando θ = 40°, determinar el coeficiente de rozamiento estático en la superficie horizontal.

Resp. $\mu_e = 0{,}761$

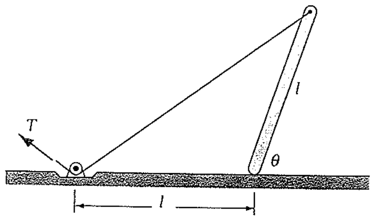


Figura problema 6.35

6.36 La viga en doble T de masa m está apoyada sobre dos carriles horizontales en la forma que se indica. Calcular la carga aplicada mínima P que sea suficiente para hacer deslizar la viga y determinar la fuerza de rozamiento correspondiente en A al iniciarse el deslizamiento. El coeficiente de rozamiento estático entre la viga y los carriles es μ_e. Tómese, además, $b < l/2$.

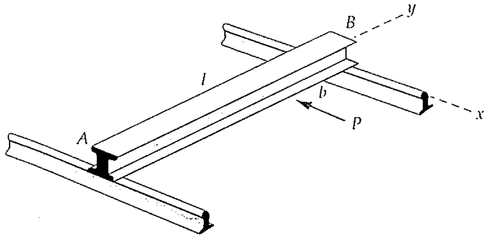


Figura problema 6.36

6.37 ¿Qué fuerza P deben ejercer sobre la cuerda los dos hombres para hacer que el tablón de 6 m se deslice sobre los soportes elevados? El tablón tiene una masa de 100 kg y el coeficiente de rozamiento cinético entre el mismo y cada soporte vale 0,50.

Resp. P = 796 N

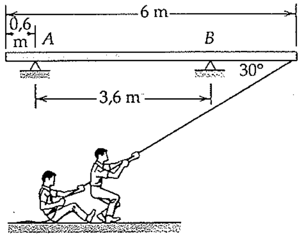


Figura problema 6.37

6.38 Determinar el valor máximo del ángulo θ bajo el que el cilindro de masa m y radio r puede mantenerse en equilibrio por acción de una fuerza vertical T como la representada. El coeficiente de rozamiento estático aplicable es μ_e. Calcular la fuerza normal N y la tracción T en la cuerda para el valor máximo de θ.

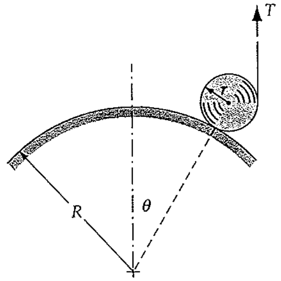


Figura problema 6.38

6.39 El hombre sube pedaleando en su bicicleta a velocidad constante por una pendiente resbaladiza del 5%. El hombre y la bicicleta tienen una masa total de 82 kg con centro en G. Si la rueda trasera está a punto de resbalar, hallar el coeficiente de rozamiento μ_e entre el neumático y la calzada. Si se duplicase el coeficiente de rozamiento, ¿qué fuerza de rozamiento actuaría sobre la rueda trasera? (¿Por qué podemos despreciar el rozamiento bajo la rueda delantera?)

Resp. $\mu_e = 0.082 \qquad F = 40{,}2$ N

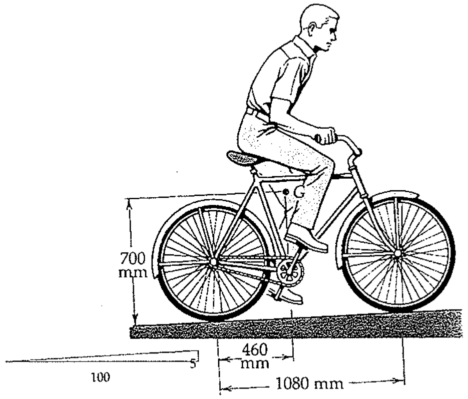


Figura problema 6.39

6.40 El poste liviano de 3,2 m tiene su extremo C apoyado en la superficie horizontal rugosa del plano x-y y está, además, sujeto por los dos vientos que van desde D a A y a B. Determinar

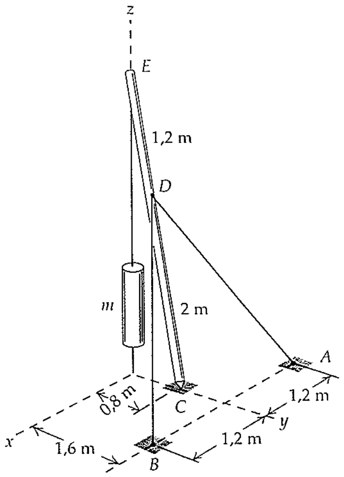


Figura problema 6.40

el coeficiente de rozamiento estático mínimo μ_e entre el poste y la superficie de apoyo necesario para que el poste no resbale. Resuélvase algebraicamente y comprobar luego gráficamente.

6.41 La carretilla se utiliza para impulsar por la rampa de 30° el rollo de papel macizo de 1200 kg. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el rollo y el espaldón vertical de la carretilla y entre el rollo y la rampa son todos 0,40, calcular la fuerza P de tracción que debe ejercerse entre los neumáticos de la carretilla y la superficie horizontal.

Resp. $P = 22{,}1$ kN

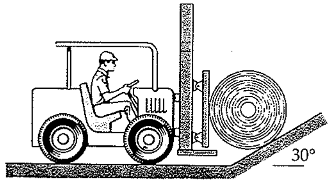


Figura problema 6.41

6.42 Dos operarios transportan un tablero de 50 mm de grueso valiéndose de asideros uno de los cuales se muestra en las ilustraciones de detalle. El tablero está inmovilizado por sendas fuerzas horizontales iguales que aplican los operarios con la mano izquierda. Determinar el coeficiente de rozamiento estático mínimo entre el tablero y el útil portador para que no haya deslizamiento. Los rodillos A, B y C son solidarios del armazón del asidero y no giran. Adviértase que cada operario debe aplicar una fuerza a la vez vertical y horizontal a la empuñadura del útil. Supóngase que cada operario deba soportar la mitad del peso del tablero.

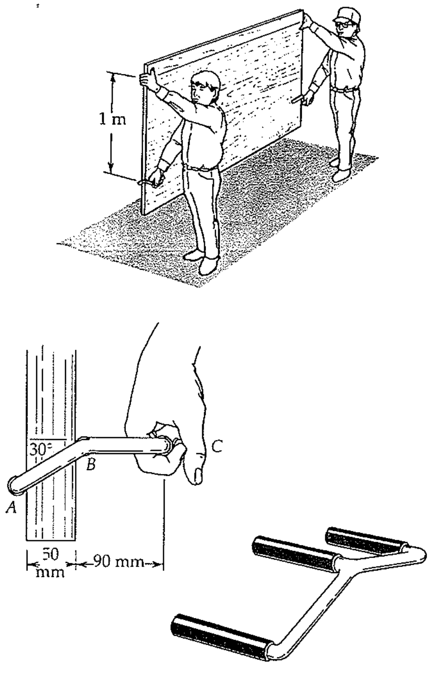


Figura problema 6.42

6.43 La barra uniforme de masa m y longitud l descansa sobre una superficie horizontal con su masa repartida uniformemente a lo largo de aquélla. Si es μ_e el coeficiente de rozamiento estático entre la barra y la superficie de apoyo, escribir las expresiones de la fuerza horizontal P que hay que aplicar al extremo de la barra para moverla y de su distancia a al eje O alrededor del cual se observa que gira la barra. (*Sugerencia*: La fuerza normal que actúa en la superficie inferior de la barra se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud. Por tanto, la fuerza de rozamiento se distribuirá uniformemente a lo largo de las dos partes situadas a cada lado de O.)

Resp. $P = 0{,}414\mu_e mg \qquad a = 0{,}293l$

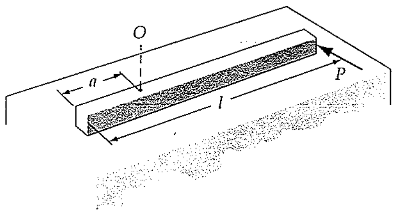


Figura problema 6.43

6.44 Un cubo de cemento de masa m se halla en reposo sobre la rampa de 10° cuando una grúa desde arriba comienza a aumentar la tracción en el cable no vertical. Si el coeficiente de rozamiento estático entre cubo y rampa vale 0,70 y no hay posibilidad de vuelco, determinar la tracción T para la que se inicia el deslizamiento y la dirección inicial β del movimiento del cubo.

6.45 En la figura se representan los elementos de un embrague mecánico unidireccional. Un par de momento M aplicado al anillo exterior se transmite el árbol de salida merced a la interacción de rozamiento entre el anillo exterior y las bolas y entre éstas y el miembro interior conducido. Si se invierte la rotación del anillo exterior, desaparece el efecto de acuñamiento de las bolas y ya no puede transmitirse el par de fuerzas al árbol de salida. Para unos valores dados de r, r_0 y del coeficiente de rozamiento μ aplicable a las dos parejas de superficies interactuantes, especificar la dimensión mínima b del miembro interior que permita transmitir el par sin resbalamiento.

Resp. $b = 2[(r - r_0)\cos 2\phi - r_0]$, donde $\phi = \operatorname{arctg} \mu$

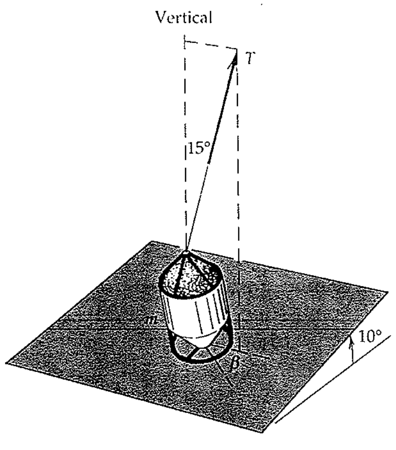


Figura problema 6.44

6.46 En la figura se representan los elementos de un embrague unidireccional que permite transmitir un par de fuerzas antihorario desde el disco (círculo) de entrada mediante la interacción por rozamiento de los segmentos oscilantes, llamados cuñas. La inversión del giro desacopla las cuñas y ya no puede transmitirse el par. Calcular el coeficiente de rozamiento mínimo μ_{min} que debe existir entre las superficies en contacto para que el embrague se acople sin patinar.

Resp. $\mu_{min} = 0{,}354$

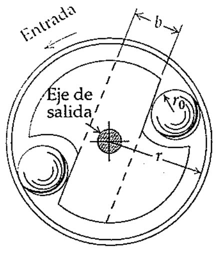


Figura problema 6.45

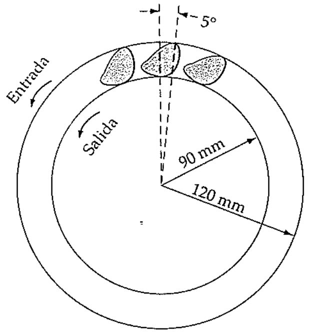


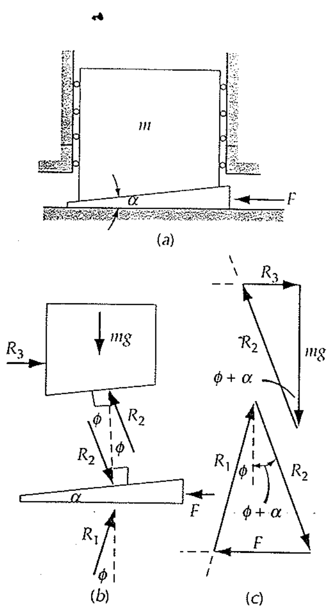
Figura problema 6.46

SECCIÓN B. APLICACIONES DEL ROZAMIENTO A LAS MÁQUINAS

En esta sección B se estudia el papel del rozamiento en distintas aplicaciones a las máquinas. Normalmente las condiciones podrán ser de rozamiento límite estático o cinético; por ello, en las expresiones de carácter general que siguen emplearemos simplemente el símbolo μ (y no μ_e ni μ_c). Así pues, según que el movimiento sea inminente o esté de hecho produciéndose, μ deberá interpretarse que representa el coeficiente de rozamiento estático o cinético.

6.4 CUÑAS

La cuña es una de las máquinas más sencillas y útiles y se emplea como medio para efectuar pequeños ajustes en la posición de un cuerpo o para aplicar grandes fuerzas. Su actuación se basa esencialmente en el fenómeno del rozamiento. Cuando el deslizamiento de una cuña es inminente, la fuerza resultante en cada cara estará inclinada respecto a la normal a esa cara un ángulo igual al de rozamiento. La componente de la resultante paralela a la superficie es la fuerza de rozamiento, la cual está siempre dirigida en sentido opuesto al del movimiento de la cuña con relación a la superficie con ella en contacto.



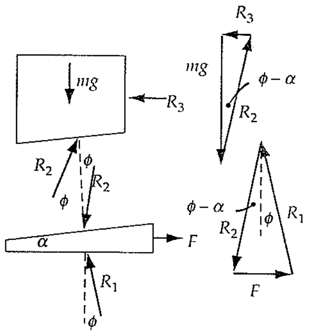
Fuerzas para elevar la carga

Figura 6.3

En la figura 6.3*a* se representa una cuña que se emplea para colocar o levantar una masa *m* grande cuya carga vertical vale *mg*. En cada pareja de superficies el coeficiente de rozamiento es $\mu = \tan \phi$. La fuerza *F* necesaria para iniciar el movimiento de la cuña se determina con ayuda de los triángulos de fuerzas en equilibrio correspondientes a la cuña y a la carga. En la figura 6.3*b* se representan los diagramas de sólido libre, en los que vemos que las reacciones están inclinadas un ángulo ϕ respecto a las normales respectivas y en un sentido tal que se oponen al movimiento. Se desprecia la masa de la cuña. Con estos diagramas podemos escribir las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas igualando a cero la suma de las fuerzas (vectores) que actúan sobre cada cuerpo. Las soluciones a estas ecuaciones se muestran en la parte *c* de la figura, donde se halla primeramente R_2 en el diagrama superior empleando el valor conocido de *mg*. Se halla después la fuerza *F* en el triángulo inferior, una vez establecido el valor de R_2.

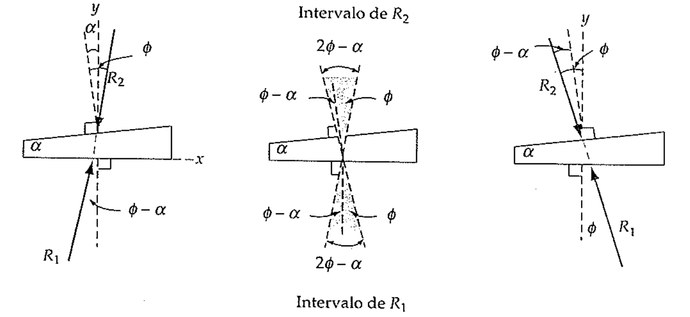
Si retiramos *F* y la cuña sigue en su sitio, el equilibrio de la cuña exige que R_1 y R_2 sean colineales, tal como se muestra en la figura 6.4, donde el ángulo α se toma como menor que ϕ. La parte *a* de la figura representa deslizamiento inminente en la superficie superior, mientras que la parte *c* representa deslizamiento inminente en la superficie inferior. Para que la cuña se deslice hacia el exterior saliéndose de la posición que ocupa, la situación de deslizamiento inminente debe presentarse en *ambas* superficies a la vez; de no ser así, la cuña es *irreversible* y existe un intervalo finito de inclinaciones de R_1 y R_2 para las que la cuña no se moverá. Ese intervalo se ilustra en la figura 6.4*b* y se ve que el deslizamiento simultáneo es imposible si $\alpha < 2\phi$. Animamos al lector a que construya los diagramas correspondientes al caso en que $\alpha > \phi$ y compruebe que la cuña es irreversible mientras sea $\alpha < 2\phi$.

Si la cuña es irreversible y se desea retirarla, habrá que ejercer sobre ella una tracción *T*. En este caso, para oponerse al nuevo movimiento inminente, las reacciones R_1 y R_2 actuarían del lado de las normales contrario al que actuaban cuando se introdujo la cuña. La resolución de este caso seguiría entonces una marcha similar a la descrita para el caso en que se quiere elevar la carga. En la figura 6.5 se representan los diagramas de sólido libre y polígonos de fuerzas para esta situación.



Fuerzas para hacer descender la carga

Figura 6.5



(*a*) Deslizamiento inminente en la superficie superior

(*b*) Deslizamiento de $R_1 = R_2$ para ausencia de deslizamiento

(*c*) Deslizamiento inminente en la superficie inferior

Figura 6.4

Los problemas de cuñas se prestan a resoluciones gráficas como las descritas en las tres figuras. La precisión de los procedimientos gráficos se mantiene fácilmente dentro de las tolerancias compatibles con la incertidumbre de los coeficientes de rozamiento. La trigonometría permite también obtener soluciones algebraicas de los polígonos de equilibrio.

6.5 TORNILLOS

Los tornillos se utilizan para fijaciones y para transmitir potencia o movimiento. Cualquiera que sea el caso, su acción se basa esencialmente en el rozamiento desarrollado en los hilos, o filetes. Para transmitir potencia o movimiento el filete cuadrado es más eficaz que el filete en *V* y este estudio se limita al filete cuadrado.

Consideremos el tornillo de filete cuadrado de la figura 6.6, sometido a la acción de la carga axial *W* y de un momento *M* aplicado en torno al eje del tornillo. El tornillo tiene un paso *L* (avance por vuelta) y un radio medio *r*. En el diagrama de sólido libre del tornillo puede verse la fuerza *R* ejercida por el filete del bastidor del gato sobre una pequeña porción representativa del filete del tornillo. En todos los segmentos del filete del tornillo que estén en contacto con el filete de la base existen reacciones análogas. Si *M* es justamente suficiente para hacer girar el tornillo, el filete de éste se deslizará en sentido ascendente sobre el filete fijo del bastidor. El ángulo ϕ que forma *R* con la normal al filete será el ángulo de rozamiento, con lo que $\operatorname{tg} \phi = \mu$. El momento de *R* respecto al eje vertical del tornillo es Rr sen $(\alpha + \phi)$ y el momento total debido a todas las reacciones sobre los filetes del tornillo es ΣRr sen $(\alpha + \phi)$. Como en ambos términos aparece *r* sen $(\alpha + \phi)$, puede despejarse el factor común. La ecuación del equilibrio de momentos para el tornillo es, pues,

$$M = [r \operatorname{sen}(\alpha + \phi)]\Sigma R$$

Por el equilibrio de las fuerzas en sentido axial, se ha de verificar, además,

$$W = \Sigma R \cos(\alpha + \phi) = [\cos(\alpha + \phi)]\Sigma R$$

Combinando estas expresiones de *M* y *W* resulta

$$M = Wr \operatorname{tg}(\alpha + \phi) \tag{6.3}$$

El ángulo de hélice α se determina desarrollando una vuelta completa del filete del tornillo y de ese modo se ve enseguida que $\alpha = \operatorname{arctg}(L/2\pi r)$.

El filete desarrollado del tornillo puede emplearse como otra manera de simular la acción de todo el tornillo, lo cual se muestra en la figura 6.7*a*. La fuerza equivalente necesaria para impulsar el filete móvil plano inclinado arriba es $P = M/r$ y el triángulo de fuerzas nos da inmediatamente la ecuación 6.3.

Si se suprime el momento *M*, la fuerza de rozamiento cambia de dirección y ϕ habrá que medirlo al otro lado de la normal al filete. El tornillo permanecerá en su sitio y será irreversible, con tal que $\phi > \alpha$, y estará a punto de desenroscarse si $\phi = \alpha$.

Para hacer que descienda la carga desenroscando el tornillo, debe invertirse el sentido de *M* en tanto sea $\alpha < \phi$. En la figura 6.7*b* se representa esta situación

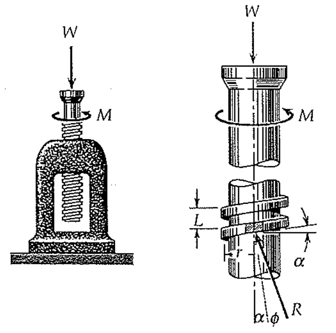
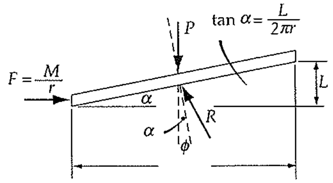
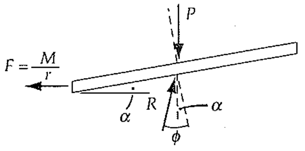


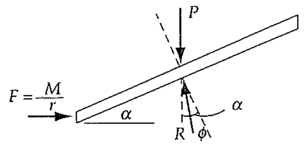
Figura 6.6



(*a*) Elevar la carga



(*b*) Bajar la carga ($\alpha < \phi$)



(*c*) Bajar la carga ($\alpha > \phi$)

Figura 6.7

con referencia al filete simulado sobre el plano inclinado fijo, y se ve que debe aplicarse al filete una fuerza equivalente $P = M/r$ al objeto de impulsarlo plano abajo. Por consiguiente, el momento del par necesario para hacer descender el tornillo se obtiene del triángulo de fuerzas y es

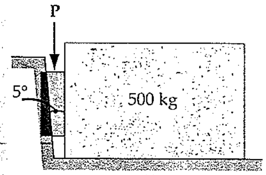
$$M = Wr\ \mathrm{tg}\ (\phi - \alpha) \tag{6.3a}$$

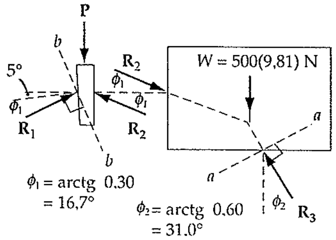
Si $\alpha > \phi$, el tornillo volverá atrás por si solo y vemos en la figura 6.7c que si se deseara que permaneciera inmóvil habría que aplicar un momento

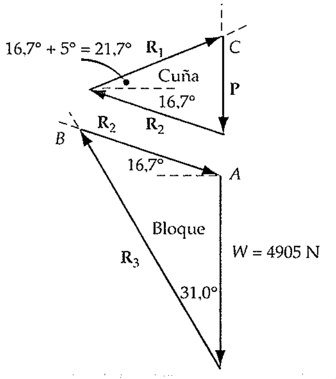
$$M = Wr\ \mathrm{tg}\ (\alpha - \phi) \tag{6.3b}$$

PROBLEMA TIPO 6.6

La posición horizontal del bloque de hormigón de 500 kg se ajusta mediante la cuña de 5° que actúa bajo la acción de la fuerza **P**. *Si el coeficiente de rozamiento estático en las dos superficies de la cuña es 0,30 y si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la superficie horizontal es 0,60, determinar la fuerza mínima P capaz de mover el bloque.*







Solución. En los diagramas de sólido libre del bloque y de la cuña se representan las reacciones $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ inclinadas respecto a sus normales un ángulo igual ① al correspondiente al movimiento inminente. El ángulo de rozamiento para el rozamiento estático límite es $\phi = \mathrm{arctg}\ \mu$. Se han calculado ambos ángulos y se han llevado a los diagramas.

Comencemos construyendo el diagrama vectorial que expresa el equilibrio del bloque a partir de un punto *A* convenientemente elegido, sobre el que llevamos el único vector conocido, o sea el peso **W** del bloque. A continuación añadimos $\mathbf{R}_3$, cuya inclinación de 31,0° respecto a la vertical ya conocemos. Con el vector $\mathbf{R}_2$, cuya inclinación de 16,7° respecto a la horizontal es también conocida, cerramos el polígono imponiendo así la condición de equilibrio. De esta forma queda determinada la posición del punto *B* en la figura inferior mediante la intersección de las direcciones conocidas de $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$, con lo cual quedan determinados los módulos de éstas.

Para la cuña empezamos trazando $\mathbf{R}_2$, que ya conocemos, y añadimos $\mathbf{R}_1$, cuya dirección conocemos. Las direcciones de $\mathbf{R}_1$ y **P** se cortan en *C* y así obtenemos el módulo de **P**.

Solución algebraica. A efectos de cálculo, los ejes de referencia más cómodos son, para el bloque, la dirección *a-a* normal a $\mathbf{R}_3$ y, para la cuña la dirección *b-b* normal ② a $\mathbf{R}_1$. El ángulo que forman $\mathbf{R}_2$ y la dirección *a* es 16,7° + 31,0° = 47,7°. Entonces, para el bloque

$$[\Sigma F_a = 0] \qquad 500(9{,}81)\ \mathrm{sen}\ 31{,}0° - R_2 \cos 47{,}7° = 0$$
$$R_2 = 3747\ \mathrm{N}$$

Para la cuña, el ángulo que forman $\mathbf{R}_2$ y la dirección *b* es 90° – ($2\phi_1$ + 5°) = 51,6° y el que forman **P** y la dirección *b* es ϕ_1 + 5° = 21,7°. Así pues

$$[\Sigma F_b = 0] \qquad 3747 \cos 51{,}6° - P \cos 21{,}7° = 0$$
$$P = 2505\ \mathrm{N} \qquad \textit{Resp.}$$

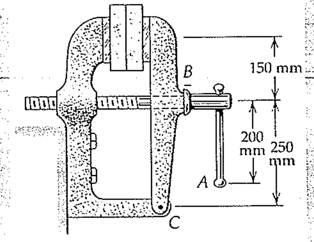
Solución gráfica. La precisión de los procedimientos gráficos cae perfectamente dentro de la incertidumbre con que se conocen los coeficientes de rozamiento y constituyen un método de resolución sencillo y directo. Trazando los vectores a una escala razonable y siguiendo la secuencia de operaciones descrita, los módulos de **P** y de **R** se miden fácilmente a escala sobre el diagrama.

① **Obsérvese que las inclinaciones de las reacciones respecto a sus normales corresponden a direcciones que se oponen al movimiento. Asimismo, obsérvense las reacciones iguales y opuestas $\mathbf{R}_2$.**

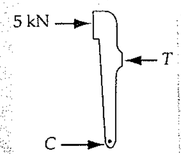
② **Debe quedar claro que se evitan sistemas de ecuaciones eliminando la referencia a $\mathbf{R}_3$ en el bloque y a $\mathbf{R}_1$ en la cuña.**

PROBLEMA TIPO 6.7

El husillo del tornillo de banco es de rosca sencilla y filete cuadrado con un diámetro medio de 25 mm y un paso (avance por vuelta) de 5 mm. El coeficiente de rozamiento estático en los filetes es 0,20. Una fuerza de 300 N aplicada normalmente a la palanca en A produce una fuerza de agarre de 5 kN entre las mordazas. (a) Determinar el momento M_B debido al rozamiento que se desarrolla en B a causa del empuje de la rosca contra el cuerpo de la mordaza. (b) Determinar la fuerza Q que es necesario aplicar en A normalmente para aflojar el tornillo de la palanca.



Solución. Empezamos por obtener la tracción *T* sobre el husillo a partir del diagrama de sólido libre de la mordaza



$$[\Sigma M_C = 0] \qquad 5(400) - 250T = 0 \qquad T = 8\ \mathrm{kN}$$

El ángulo de hélice α y el ángulo de rozamiento ϕ en el fileteado son

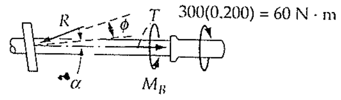
① $$\alpha = \mathrm{arctg}\ \frac{L}{2\pi r} = \mathrm{arctg}\ \frac{5}{2\pi(12{,}5)} = 3{,}64°$$

$$\phi = \mathrm{arctg}\ \mu = \mathrm{arctg}\ 0{,}20 = 11{,}31°$$

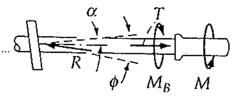
donde r = 12,5 mm es el diámetro medio de la rosca.

(a) Apretar. El diagrama de sólido libre de la figura representa el husillo aislado, y en él todas las fuerzas que actúan sobre los filetes se han sustituido por una única fuerza *R* que forma un ángulo igual al de rozamiento ϕ con la normal al filete. El momento aplicado al eje del husillo vale 300(0,200) = 60 N · m y su sentido es horario visto desde el frente del tornillo. El momento M_B producido por las fuerzas de rozamiento en el cuello *B* es de sentido antihorario para oponerse

① **Préstese atención para calcular correctamente el ángulo de hélice. Su tangente es el paso *L* (avance por vuelta) dividido por el perímetro medio $2\pi r$ y no por el diámetro $2r$.**



(*a*) Apretar



(*b*) Aflojar

al movimiento inminente. Sustituyendo W por T en la ecuación 6.3, resulta para el momento total actuante sobre el husillo

$$\begin{aligned} M &= Tr \operatorname{tg}(\alpha+\phi) \\ 60 - M_B &= 8000(0{,}0125) \operatorname{tg}(3{,}64^\circ + 11{,}31^\circ) \\ M_B &= 33{,}3\ \mathrm{N \cdot m} \end{aligned}$$

Resp.

(b) Aflojar. En el diagrama de sólido libre del husillo a punto de aflojarse, la ② fuerza R aparece formando con la normal el ángulo de rozamiento y en la dirección correcta para oponerse al movimiento inminente. Se representa asimismo el momento debido al rozamiento $M_B = 33{,}3$ N · m con sentido horario para oponerse al movimiento. Ahora, el ángulo entre R y el eje del husillo es $\phi - \alpha$ y la ecuación 6.3*a* la empleamos sustituyendo el momento total por el momento aplicado M' menos M_B. O sea,

$$\begin{aligned} M &= Tr \operatorname{tg}(\phi-\alpha) \\ M' - 33{,}3 &= 8000(0{,}0125) \operatorname{tg}(11{,}31^\circ - 3{,}64^\circ) \\ M' &= 46{,}8\ \mathrm{N \cdot m} \end{aligned}$$

Entonces, la fuerza que hay que ejercer en la palanca para aflojar el tornillo es

$$Q = M'/d = 46{,}8/0{,}2 = 234\ \mathrm{N}$$

Resp.

② **Obsérvese que *R* pasa a situarse al otro lado de la normal cuando el movimiento inminente cambia de sentido.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

6.47 A causa de que las bisagras de la puerta están cargadas por resortes (no se muestra el detalle), para mantener abierta la puerta la cuña debe aplicar una componente de fuerza horizontal (hacia la derecha). Determinar el coeficiente de rozamiento necesario μ_c entre la cuña y el piso. Supóngase que la cuña no pesa y que la superficie entre ésta y la puerta es lisa.
Resp. $\mu_c = 0{,}176$

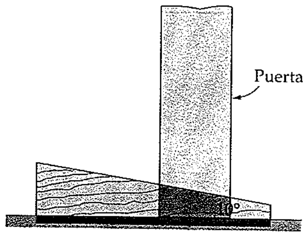


Figura problema **6.47**

6.48 Si el coeficiente de rozamiento entre la cuña de acero y las fibras húmedas del tocón recién cortado es 0,20, determinar el ángulo máximo α que puede tener la cuña para no ser despedida de la madera una vez hincada por el mazo.

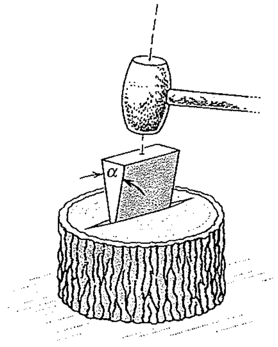


Figura problema **6.48**

6.49 Se representa el mecanismo que se emplea para ajustar en grueso la altura de un aparato experimental sin alterar su posición horizontal. Merced a la unión deslizante *A*, al girar el tornillo no gira el miembro cilíndrico situado encima de *A*. El diámetro medio de la rosca es 12 mm y el coeficiente de rozamiento es 0,15. Para un planteamiento prudente en que se desprecie el rozamiento en la unión deslizante, ¿cuál debería ser el número mínimo *N* de hilos por centímetro que garantice que el tornillo no gire solo bajo el peso del aparato?
Resp. $N = 1{,}768$

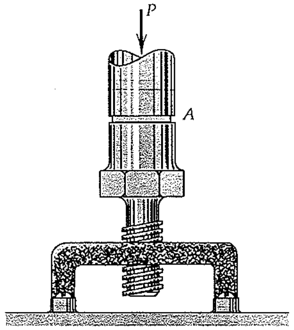


Figura problema **6.49**

6.50 Hallar la fuerza *P* necesaria para introducir la cuña de 10° bajo la caja uniforme de 90 kg que hace tope contra el pequeño resalte *A*. El coeficiente de rozamiento vale 0,40 en todas las superficies.

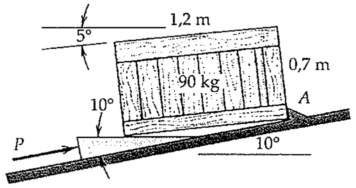


Figura problema **6.50**

6.51 El tornillo de doble rosca de 40 mm de diámetro tiene una distancia entre hilos de 12 mm y un paso de 24 mm. El tornillo y su rosca conjugada del bloque fijo están lubricados con grafito y tienen un coeficiente de rozamiento igual a 0,15. Si a la parte derecha del eje se aplica un par $M = 60$ N · m, determinar (*a*) la fuerza *P* necesaria para que el eje avance hacia la derecha y (*b*) la fuerza *P* que haría que el eje se moviera hacia la izquierda a velocidad constante.
Resp. (*a*) $P = 75{,}3$ kN (*b*) $P = 8{,}55$ kN

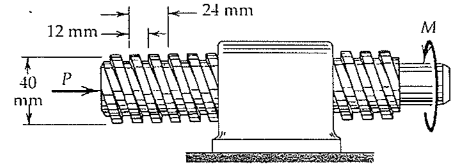


Figura problema **6.51**

Problemas representativos

6.52 Las dos cuñas de 5° de la figura se utilizan para ajustar la posición de la columna sometida a una carga vertical de 5 kN. Determinar el módulo de las fuerzas *P* necesarias para elevar la columna si el coeficiente de rozamiento en todas las superficies es igual a 0,40.

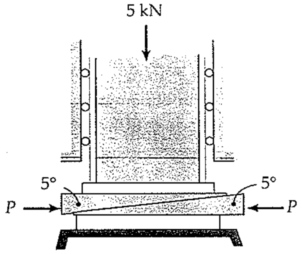


Figura problema **6.52**

6.53 Si se quiere hacer bajar la columna cargada del problema 6.52, calcular las fuerza horizontales *P′* necesarias para extraer las cuñas.
Resp. $P' = 3{,}51$ kN

6.54 Determinar el módulo y sentido de la fuerza *P* necesaria para (*a*) elevar y (*b*) bajar la masa de 200 kg. El coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}10$ en todas las superficies de contacto. ¿Cuál es el mínimo valor $\mu_{\min}$ para que la cuña sea irreversible? La masa de la cuña es despreciable.

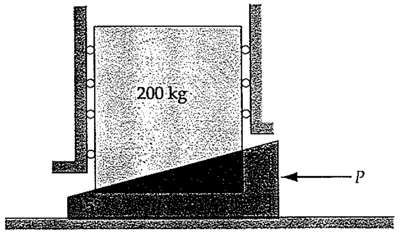


Figura problema **6.54**

6.55 Hallar la fuerza P necesaria para elevar el bloque de 200 kg. El coeficiente de rozamiento en todas las superficies vale 0.40.

Resp. $P = 2870$ N

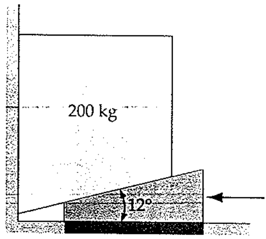


Figura problema 6.55

6.56 El manguito roscado se emplea para conectar dos árboles, ambos con los extremos roscados a derechas. Los árboles están sometidos a una tracción $T = 8$ kN. Si las roscas tienen un diámetro medio de 16 mm y un paso de 4 mm, calcular el par M necesario para hacer girar el manguito en cualquier sentido con los árboles inmovilizados. El coeficiente de rozamiento vale 0,24.

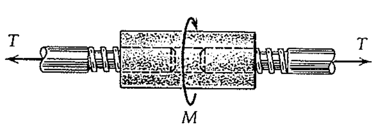


Figura problema 6.56

6.57 Calcular la fuerza P a ejercer sobre la cuña liviana de 10° para iniciar el movimiento del cilindro de 40 kg. El coeficiente de rozamiento estático en las dos parejas de superficies en contacto vale 0,25. Determinar asimismo la fuerza de rozamiento F_B en el punto B. (*Advertencia*: Asegúrese bien acerca del lugar donde se supone que tiene lugar el deslizamiento.)

Resp. $P = 98{,}6$ N $\quad F_B = 24{,}6$ N

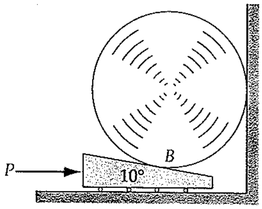


Figura problema 6.57

6.58 El cabezal móvil de una máquina de ensayos universal tiene una masa de 2.2 Mg y se eleva a la posición de trabajo mediante dos tornillos sin fin de 78 mm de diámetro, ambos de rosca simple de paso 13 mm. Si el coeficiente de rozamiento en las roscas es 0.25, ¿cuál ha de ser el momento M del par que hay que aplicar a cada tornillo (*a*) para elevar el cabezal y (*b*) para bajarlo? Las columnas de carga interiores no son solidarias del cabezal durante el posicionamiento de éste.

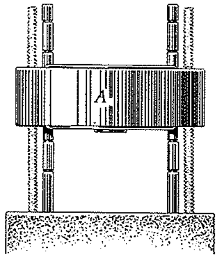


Figura problema 6.58

6.59 Las dos cuñas de 4° se emplean para ajustar la posición de la columna vertical sometida a una carga L ¿Qué valor mínimo μ_2 debe tener el coeficiente de rozamiento entre la pareja de superficies del fondo para que la columna pueda elevarse aplicando sólo una fuerza P a la cuña de encima?

Resp. $\mu_2 = 0{,}378$

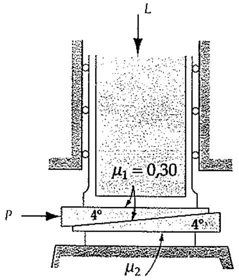


Figura problema 6.59

6.60 Dos ejes conectados por una chaveta plana conificada a 5°, tal como se muestra en las dos ilustraciones, están bajo una tracción constante T de 900 N. Hallar la fuerza P requerida para desplazar la chaveta y compensar los huelgos que pudiera haber en la conexión. El coeficiente de rozamiento entre la chaveta y los costados de las ranuras vale 0.20. Despreciar los rozamientos horizontales entre los ejes.

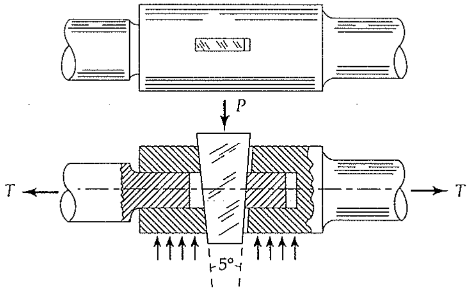


Figura problema 6.60

6.61 El mecanismo de retenida está compuesto por el pestillo cargado por resorte cuyo extremo es esférico y que deja en posición el trinquete horizontal introduciéndose en las ranuras convenientemente espaciadas. Si, para la posición de la figura, el resorte ejerce una fuerza de 40 N sobre el pestillo y se necesita una fuerza $P = 60$ N para mover el trinquete en contra del pestillo, calcular el coeficiente de rozamiento entre el pestillo y el trinquete. Por ensayos anteriores se conoce que el coeficiente de rozamiento entre el trinquete, de masa despreciable, y la superficie horizontal es 0,30. Se supondrá que el pestillo está perfectamente lubricado y montado con precisión, por lo que puede despreciarse el rozamiento entre el mismo y su guía.

Resp. $\mu = 0{,}368$

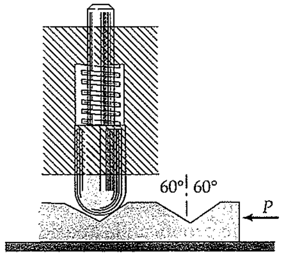


Figura problema 6.61

6.62 El gato de la figura sirve para alzar pequeños automóviles monocasco. La rosca del husillo es conjugada del roscado del manguito que pivota en B y el eje gira en un cojinete de empuje a bolas A. La rosca tiene un diámetro medio de 10 mm y un paso (avance por vuelta) de 2 mm. Hallar la fuerza P normal a la empuñadura en D necesaria (*a*) para elevar una masa de 500 kg desde la posición representada y (*b*) para bajar esa carga desde la misma posición. Despréciense los rozamiento en el pivote del manguito y en el cojinete A.

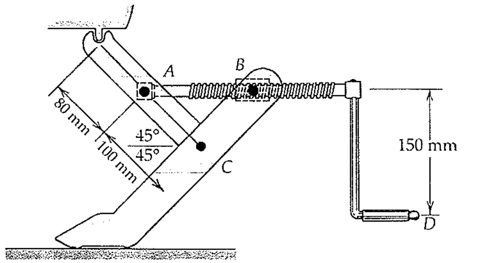


Figura problema 6.62

6.63 La prensa de banco especial se está empleando para comprimir dos tablas mientras se encolan ¿Qué par M hay que aplicar al tornillo para producir una compresión de 900 N entre las tablas? El tornillo, de 12 mm de diámetro, es de rosca simple con dos filetes cuadrados por centímetro, en los que el coeficiente de rozamiento puede admitirse que vale 0,20. Despréciese el rozamiento en el contacto de rótula A y supóngase que la fuerza de contacto en ese punto está dirigida según el eje del tornillo. ¿Qué par M' hace falta para aflojar el tornillo?

Resp. $M = 6{,}52$ N · m $\quad M' = 1{,}253$ N · m

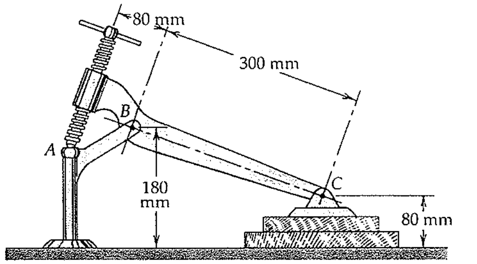


Figura problema 6.63

6.64 La posición vertical del bloque de 100 kg se ajusta mediante la cuña accionada por el husillo. Calcular el momento M del par que debe aplicarse al mango del husillo para elevar el bloque. El husillo es de filete simple cuadrado, de 30 mm de diámetro medio y avanza 10 mm por cada vuelta completa. El coeficiente de rozamiento en la rosca es 0,25 y el coeficiente de rozamiento en todas las superficies de contacto entre bloque y cuña es 0.40. Despréciese el rozamiento en la unión de rótula A.

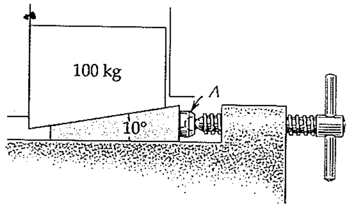


Figura problema 6.64

6.65 Calcular el momento M' del par que debe aplicarse al mango del husillo del problema 6.64 para que la cuña retroceda y la carga descienda.

Resp. $M' = 3{,}02\ \mathrm{N \cdot m}$

6.66 Sustitúyase el filete cuadrado del gato de husillo de la figura 6.66 por un filete en V como el representado y determínese el momento M que hay que aplicar al tornillo para elevar la carga W. La fuerza R que actúa sobre un tramo representativo de la rosca se muestra con sus proyecciones pertinentes. El vector R_1 es la proyección de R en el plano de la figura que contiene al eje del tornillo. Se inicia el análisis con una suma de fuerzas axiales y de momentos que incluye la expresión de los ángulos γ y β en función de θ, α y el ángulo de rozamiento $\phi = \operatorname{arctg} \mu$. Para mayor claridad se ha exagerado el ángulo de hélice de la rosca simple.

$$Resp.\ M = Wr\,\frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\alpha}}{1-\mu\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\alpha}}$$

$$\text{donde } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{L}{2\pi r}$$

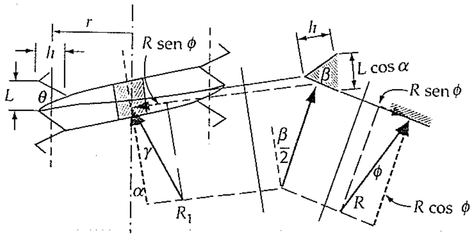


Figura problema 6.66

6.6 COJINETES DE APOYO

Los cojinetes de apoyo, o chumaceras, proporcionan soporte lateral a los árboles, en contraste con los cojinetes de empuje que proporcionan soporte axial. Para los cojinetes secos, y para muchos de los cojinetes parcialmente lubricados, es posible aplicar las leyes del rozamiento seco, las cuales ofrecen una aproximación suficiente a efectos de diseño. En la figura 6.8 se representa un cojinete seco o parcialmente lubricado, donde entre el eje y el cojinete hay contacto o casi contacto y donde el huelgo entre ambos se presenta exagerado para clarificar la acción. Cuando el eje comienza a girar en el sentido indicado, sube rodando por la superficie interior del cojinete hasta que sobreviene el deslizamiento. A partir de entonces permanecerá en una posición más o menos fija mientras dure la rotación. El par de momento M, necesario para mantener la rotación, y la carga axial L aplicados al eje provocan la aparición de una fuerza de reacción R en el punto de contacto A. El equilibrio de las fuerzas (verticales) exige que R sea igual a L, pero no obliga a que sean colineales. R será tangente a un pequeño círculo de radio r_r llamado *círculo de rozamiento*. El ángulo que forman R y su componente normal N es el ángulo de rozamiento ϕ. Igualando a cero la suma de los momentos respecto a A resulta

$$M = Lr_r = Lr \operatorname{sen}\phi \tag{6.4}$$

Si el coeficiente de rozamiento es pequeño, el ángulo ϕ es pequeño y el error que se comete al cambiar el seno por la tangente es muy pequeño. Entonces, como $\mu = \operatorname{tg}\phi$, un valor muy aceptable para el momento del par es

$$M = \mu Lr \tag{6.4a}$$

Esta relación establece el valor del momento del par a aplicar a un eje para vencer el rozamiento en un cojinete seco o parcialmente lubricado.

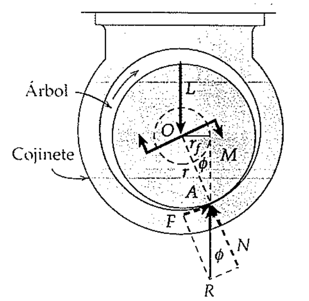


Figura 6.8

6.7 COJINETES DE EMPUJE; ROZAMIENTO CIRCULAR

Se da rozamiento entre superficies circulares sometidas a presiones normales uniformes en los cojinetes de gorrones, platos de embrague y frenos de disco. Para estudiar este caso, consideremos los dos discos circulares planos de la figura 6.9 cuyos árboles están montados en cojinetes (no representados) de manera que pueden ponerse en contacto por acción de la fuerza axial P. El par máximo que puede transmitir este embrague será igual al par M necesario para hacer que un disco resbale contra el otro. Si es p la presión normal en cualquier punto situado entre los platos, la fuerza de rozamiento sobre una superficie elemental será $\mu p\, dA$, donde μ es el coeficiente de rozamiento y dA es el área $r\, dr\, d\theta$ del elemento. El momento de esta fuerza de rozamiento elemental respecto al eje del árbol es $\mu pr\, dA$, y el momento total del rozamiento será

$$M = \int \mu pr\, dA$$

donde la integración abarca toda la superficie del disco. Para calcular esta integral, debemos conocer la variación de μ y p con r.

En los ejemplos que siguen supondremos que μ es constante. Además, si las superficies son nuevas y planas y están bien sujetas, es aceptable admitir que la presión p sea constante y esté uniformemente repartida de modo que $\pi R^2 p = P$. Esta igualdad nos da un valor constante de p que, llevado a la expresión de M, nos da, a su vez,

$$M = \frac{\mu P}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 dr\, d\theta = \tfrac{2}{3}\mu PR \tag{6.5}$$

Este resultado podemos interpretarlo como si fuera equivalente al momento debido a una fuerza de rozamiento μP que actuase a una distancia $\frac{2}{3}$R del centro del árbol.

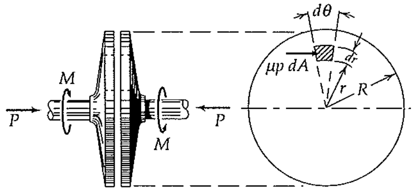


Figura 6.9

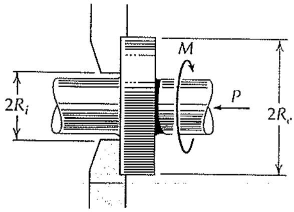


Figura 6.10

Si los discos de rozamiento son anillos, como en el cojinete radial de la figura 6.10, los límites de integración son los radios interior R_i y exterior R_e, respectivamente, y el par de rozamiento tiene un momento

$$M = \tfrac{2}{3}\mu P \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \tag{6.5a}$$

Transcurrido el periodo de desgaste inicial, las superficies retienen su nueva configuración relativa y el desgaste ulterior es, por tanto, constante en toda la superficie. Este desgaste depende tanto de la distancia circular recorrida como de la presión p. Como la distancia recorrida es proporcional a r, podremos escribir $rp = K$, donde K es una constante. El valor de K se determina igualando a cero las fuerzas axiales, o sea

$$P = \int p\,dA = K\int_0^{2\pi}\int_0^R dr\,d\theta = 2\pi KR$$

Con $pr = K = P/(2\pi R)$, la expresión de M podrá escribirse en la forma

$$M = \int \mu pr\,dA = \frac{\mu P}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\,dr\,d\theta$$

la cual da

$$M = \tfrac{1}{2}\mu PR \tag{6.6}$$

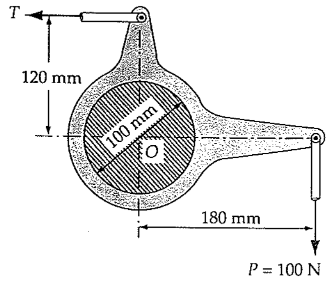
El par de rozamiento en los platos usados es, pues, solamente $(\frac{1}{2})/(\frac{2}{3})$, o sea, $\frac{3}{4}$ del correspondiente a superficies nuevas. Si los discos fueran anillos de radio interior R_i y radio exterior R_e, sustituyendo por estos valores en los límites de integración resulta para el par de rozamiento

$$M = \tfrac{1}{2}\mu P(R_e + R_i) \tag{6.6a}$$

El lector debe prepararse para resolver otros problemas de rozamiento circular en que la presión p sea función de r.

PROBLEMA TIPO 6.8

La palanca acodada está montada sobre un eje de 100 mm de diámetro que es fijo y no puede girar. Para mantenerla en equilibrio bajo la acción de la fuerza vertical P = 100 N se aplica la fuerza horizontal T. Determinar los valores máximo y mínimo de T para que la palanca no gire en ninguno de los dos sentidos. El coeficiente de rozamiento estático μ entre el eje y la superficie de contacto es 0,20.



Solución. El movimiento inminente aparece cuando la reacción R del eje fijo sobre la palanca acodada forma un ángulo $\phi = \operatorname{arctg}\mu$ con la normal a la superficie de contacto y es, por tanto, tangente al círculo de rozamiento. Además, el equilibrio exige que las tres fuerzas que actúan sobre la palanca concurran en un punto C. Todo esto se reseña en los diagramas de sólido libre correspondientes a los dos casos de movimiento inminente.

Necesitamos los siguientes cálculos:
Ángulo de rozamiento $\phi = \operatorname{arctg}\mu = \operatorname{arctg} 0{,}20 = 11{,}31°$
Radio del círculo de rozamiento $r_f = r \operatorname{sen}\phi = 50 \operatorname{sen} 11{,}31° = 9{,}81$ mm

$$\text{Angulo } \theta = \operatorname{arctg}\frac{120}{180} = 33{,}7°$$

$$\text{Angulo } \beta = \operatorname{arcsen}\frac{r_f}{\overline{OC}} = \operatorname{arcsen}\frac{9{,}81}{\sqrt{(120)^2 + (180)^2}} = 2{,}60°$$

(*a*) ***Movimiento inminente en sentido antihorario.*** Una vez trazado el polígono de fuerzas, resulta del mismo

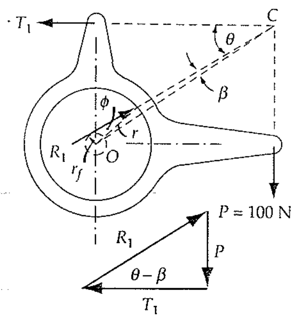
$$T_1 = P\operatorname{cotg}(\theta - \beta) = 100\operatorname{cotg}(33{,}7° - 2{,}60°)$$

$$T_1 = T_{\max} = 165{,}8\text{ N}$$ *Resp.*

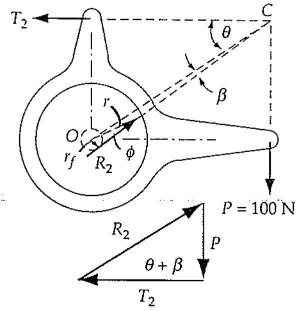
(*b*)***Movimiento inminente en sentido horario.*** En este caso, según el triángulo de fuerzas resulta

$$T_2 = P\operatorname{cotg}(\theta - \beta) = 100\operatorname{cotg}(33{,}7° + 2{,}60°)$$

$$T_2 = T_{\min} = 136{,}2\text{ N}$$ *Resp.*



(*a*) Movimiento inminente en sentido antihorario



(*b*) Movimiento inminente en sentido horario

PROBLEMAS

Problemas introductorios

6.67 Los dos volantes de inercia están montados en un eje común soportado por un cojinete situado entre ambos. La masa de cada volante es de 40 kg y el eje tiene un diámetro de 40 mm. Si para mantener girando el conjunto de volantes y eje a velocidad constante reducida se precisa un par de momento $M = 3$ N · m, calcular (*a*) el coeficiente de rozamiento μ en el cojinete y (*b*) el radio r_f del círculo de rozamiento.

Resp. (*a*) $\mu = 0{,}1947$ (*b*) $r_f = 3{,}82$ mm

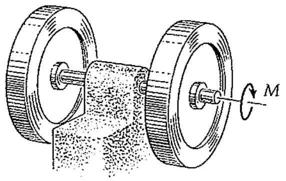


Figura problema 6.67

6.68 El disco A está colocado encima del disco B sometido a una fuerza compresiva de 400 N. Los diámetros de A y B son, respectivamente, 225 y 300 mm y la presión bajo cada uno es constante en toda su superficie. Si el coeficiente de rozamiento entre A y B vale 0,40, hallar el par M capaz de hacer que A se deslice sobre B. Además, ¿qué coeficiente de rozamiento mínimo μ debe existir entre B y la superficie de apoyo para que B no gire?

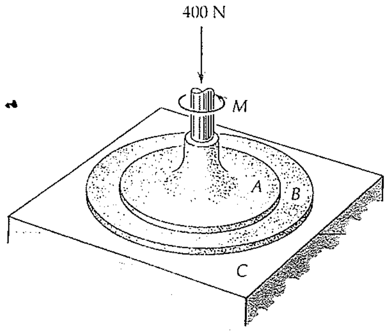


Figura problema 6.68

6.69 Un freno de disco de automóvil se compone de un rotor de caras planas y una mordaza que alberga una pastilla para cada cara del rotor. Si en cada pastilla actúan sendas fuerzas iguales P produciendo la misma presión p uniforme en toda la pastilla, demuéstrese que el par aplicado al cubo es independiente del ángulo β subtendido por las pastillas ¿Variaría el momento del par si la presión fuese función de θ?

$$Resp.\ M = \frac{4\mu P}{3}\,\frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$$

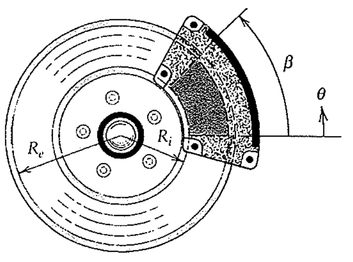


Figura problema 6.69

6.70 Para elevar la carga de 500 kg a velocidad constante con el torno cuyo eje es de 50 mm de diámetro, hay que aplicar al eje un par de momento 1510 N · m. El torno con eje tiene una masa de 100 kg. Calcular el coeficiente de rozamiento μ del cojinete.

6.71 Calcular el momento M del par que hay que aplicar al eje del torno del problema 6.70 para hacer bajar a velocidad constante la carga de 500 kg. Tomar como coeficiente de rozamiento el valor $\mu = 0{,}271$ calculado en el problema 6.70.
Resp. $\overline{M} = 1{,}433$ kN · m

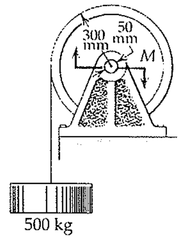


Figura problema 6.70

Problemas representativos

6.72 La polea de radio r se emplea para izar la carga W. Deducir la expresión de la tracción T necesaria *(a)* para elevar la carga y *(b)* para bajarla, a velocidad constante en ambos casos. El coeficiente de rozamiento en el cojinete de la polea de radio r_0 es μ, de valor muy pequeño y que permite sustituir μ por sen ϕ, siendo ϕ el ángulo de rozamiento.

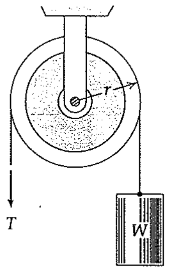


Figura problema 6.72

6.73 El bulón A se ajusta con huelgo en el cojinete de muñequilla de la biela de centro de gravedad G. Con la biela inicialmente en posición vertical se hace girar lentamente el bulón hasta que aquella se desplaza el ángulo α antes de resbalar. Escribir una expresión exacta del coeficiente de rozamiento.

$$Resp.\ \mu = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d/2}{\bar{r}\ \mathrm{sen}\ \alpha}\right)^2 - 1}}$$

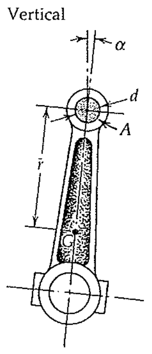


Figura problema 6.73

6.74 El anillo de acero A tiene una masa de 20 kg y sus radios interior y exterior son, respectivamente, 50 y 60 mm. Se apoya sobre un árbol horizontal de 40 mm de radio. Si se aplica una fuerza $P = 150$ N a la periferia del anillo, éste estará a punto de deslizarse. Calcular el coeficiente de rozamiento μ y el ángulo θ.

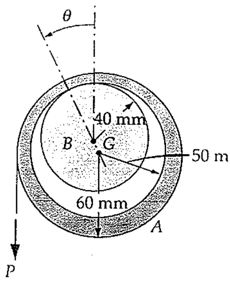


Figura problema 6.74

6.75 En la lijadora de disco, la presión p desarrollada entre el disco de radio a y la superficie de lija subyacente disminuye linealmente con r desde un valor p_0 en el centro hasta $p_0/2$ en $r = a$. Si es μ el coeficiente de rozamiento, deducir la expresión del momento M del par necesario para hacer girar el disco cuando éste se halla sometido a la fuerza axial L.
Resp. $M = \frac{5}{8}\mu La$

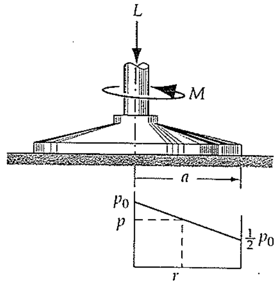


Figura problema 6.75

6.76 Se representa la sección longitudinal de dos discos en contacto. Deducir la expresión del momento M del par necesario para hacer girar el disco de arriba sobre el de abajo, que está inmovilizado, si la presión entre ambos obedece a la relación $p = k/r^2$, donde k es una constante a determinar. El coeficiente de rozamiento μ es constante en toda la superficie.

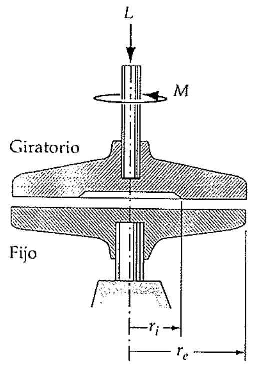


Figura problema 6.76

6.77 La lijadora de disco está trabajando un extremo de la tabla delgada sometida ésta a la fuerza axial P. Si el coeficiente efectivo de rozamiento cinético es μ y si la presión es prácticamente constante en todo el extremo de la tabla, determinar el momento M del par que debe aplicar el motor para que el disco gire a velocidad angular constante. El extremo de la tabla está centrado sobre un radio del disco.
Resp. $M = \frac{1}{2}\mu PR$

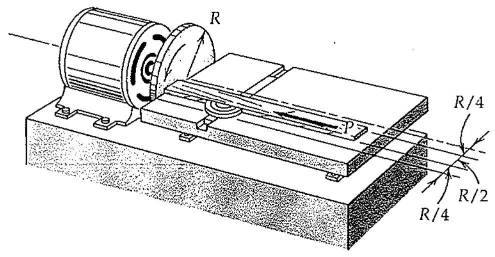


Figura problema 6.77

6.78 Las ecuaciones 6.5*a* y 6.6*a* establecen las expresiones del momento en el rozamiento circular de la figura 6.9, donde la presión es respectivamente constante e inversamente proporcional a r. Para ambas situaciones, expresar el momento de rozamiento en forma adimensional como $M' = M/(\mu PR_e)$ para valores dados de μ, P y R_e y representar gráficamente M' en función de R_i/R_e desde 0 (disco macizo) hasta 1 (anillo infinitamente delgado).

6.79 En la figura puede verse el embrague de discos múltiples de un motor marino. Los discos motrices A están montados sobre el eje motor B de manera que puedan deslizarse libremente a lo largo de él, si bien deben girar conjuntamente. Los discos C accionan la carcasa D por medio de los pasadores E a lo largo de los cuales pueden deslizarse libremente. En el embrague representado hay cinco parejas de superficies con rozamiento. Suponer que la presión se distribuye uniformemente sobre la superficie de los discos y determinar el momento máximo M del par que se puede transmitir si el coeficiente de rozamiento es 0,15 y P = 500 N.
Resp. M = 335 N · m

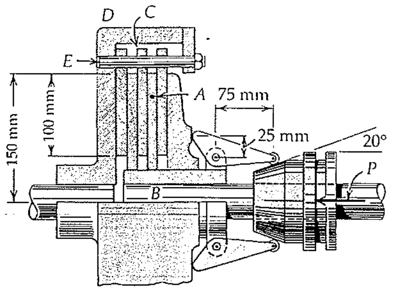


Figura problema **6.79**

6.80 Calcular el par M necesario para hacer girar en sentido horario el carrete de cable telefónico de 280 kg venciendo la tracción de 1,6 kN ejercida en el cable. El diámetro del cojinete es 62,5 mm y el coeficiente de rozamiento en el mismo vale 0,30.

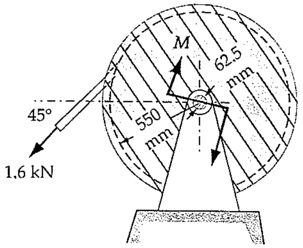


Figura problema **6.80**

6.81 El aparejo de la figura se emplea para izar el bloque de 200 kg. El diámetro del cojinete de la polea de arriba mide 20 mm y 12 mm el de la polea de abajo. Para un coeficiente de rozamiento μ = 0,25 en ambos cojinetes, calcular las tensiones T, T_1 y T_2 en los tres cables si el bloque se hace subir lentamente.
Resp. T = 1069 N T_1 = 1013 N T_2= 949 N

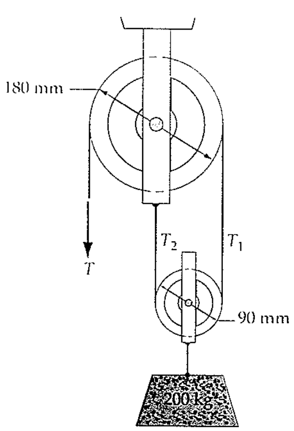


Figura problema **6.81**

6.82 Calcular las tensiones T, T_1 y T_2 en los cables del problema 6.81 si el bloque se hace descender lentamente.

6.83 Cada una de las cuatro ruedas del vehículo tiene una masa de 20 kg montada en un cojinete de 80 mm de diámetro interior. La masa total del vehículo es 480 kg, incluidas las ruedas, y se distribuye por igual entre las cuatro ruedas. Si se necesita una fuerza P = 80 N para mantener el vehículo rodando a velocidad constante moderada, calcular el coeficiente de rozamiento existente en los cojinetes de las ruedas. (*Sugerencia*: Dibujar el diagrama de sólido libre completo de una rueda.)
Resp. μ = 0,208

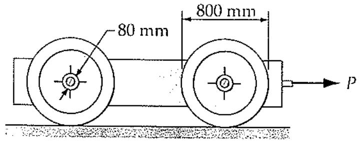


Figura problema **6.83**

6.84 El embalaje de 10 Mg se baja a un almacén en un sótano mediante el montacargas de doble husillo. Cada husillo tiene una masa de 0,9 Mg, un diámetro de 120 mm y una rosca cuadrada simple de 11 mm de paso. Los husillos giran sincrónicamente merced a un grupo motor situado en la base de la instalación. La masa total del embalaje, los husillos y la plataforma elevadora de 3 Mg es soportada a partes iguales por los cojinetes radiales A, cada uno de cuales tiene un diámetro exterior de 250 mm y un diámetro interior de 125 mm. Se supone que la presión en los cojinetes es uniforme en toda la superficie portante. Si el coeficiente de rozamiento en los cojinetes radiales y en los husillos en B es 0,15, calcular el momento M del par que debe aplicarse a cada husillo (a) para elevar el montacargas y (b) para bajarlo.

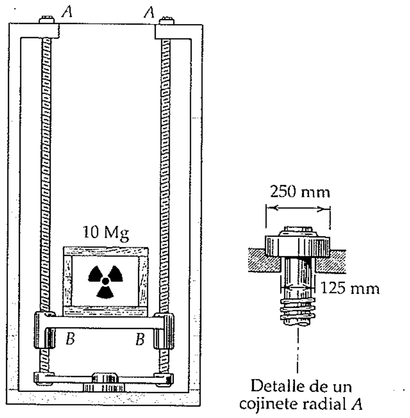


Figura problema **6.84**

6.85 Determinar la expresión del momento M del par que hay que aplicar para girar el árbol cuyo empuje L lo soporta un cojinete cónico de pivote. El coeficiente de rozamiento es μ y la presión del cojinete es constante.

$$Resp.\ M = \frac{\mu L}{3\ \mathrm{sen}\ \frac{\alpha}{2}}\ \frac{d_2^3 - d_1^3}{d_2^2 - d_1^2}$$

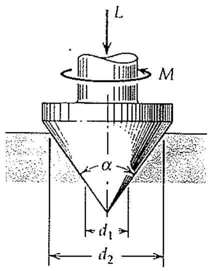


Figura problema **6.85**

6.86 El cojinete de empuje de un árbol sometido a una carga axial L consiste en una copa esférica de radio r. Si la presión en cualquier punto entre las superficies portantes varía según $p = p_0 \cos\theta$, deducir la expresión del momento M del par necesario para mantener una velocidad de rotación constante. El coeficiente de rozamiento es μ.

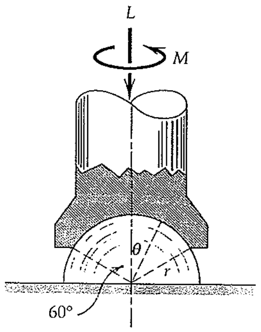


Figura problema **6.86**

6.8 CABLES FLEXIBLES

El deslizamiento inminente de los miembros flexibles tales como correas y cuerdas sobre poleas y tambores es de gran importancia para el diseño de todo tipo de transmisiones por correa, frenos de cinta y aparejos elevadores. En la figura 6.11a puede verse un tambor sometido a las dos tensiones T_1 y T_2 de la correa, al par M necesario para impedir la rotación y a la reacción R del cojinete. Si M tiene el sentido indicado, T_2 es mayor que T_1. Se incluye también en la parte b de la figura el diagrama de sólido libre de un elemento de correa $r\,d\theta$. Vamos a estudiar las fuerzas que actúan sobre este elemento de manera similar a como se ha hecho en otros problemas de fuerzas variables estableciendo el equilibrio de un elemento diferencial. La tensión se incrementa desde T, para el ángulo θ, hasta $T + dT$, para el ángulo $\theta + d\theta$. La fuerza normal es la infinitesimal dN puesto que actúa sobre un elemento de superficie infinitesimal. Análogamente, la fuerza de rozamiento, que debe actuar sobre la correa en el sentido opuesto al deslizamiento es infinitesimal e igual a $\mu\, dN$ para el movimiento inminente. El equilibrio en la dirección tangencial t da,

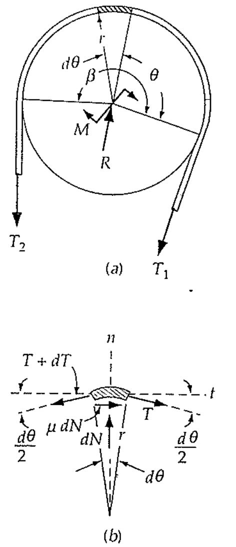


Figura 6.11

$$T \cos \frac{d\theta}{2} + \mu\, dN = (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2}$$

o sea
$$\mu\, dN = dT$$

ya que el coseno de una cantidad infinitesimal es uno. El equilibrio en la dirección normal n exige que

$$dN = (T + dT) \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} + T \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2}$$

o sea
$$dN = T\, d\theta$$

En esta reducción debe recordarse que el seno de un ángulo infinitesimal es equivalente al ángulo y que el producto de dos diferenciales puede despreciarse por ser infinitésimo de orden superior al de los términos que quedan. Combinando las dos relaciones de equilibrio resulta

$$\frac{dT}{T} = \mu\, d\theta$$

Integrando entre los límites correspondientes se tiene

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu\, d\theta$$

o sea
$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\beta$$

donde $\ln(T_2/T_1)$ es un logaritmo natural (de base e). Despejando T_2 se tiene

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \tag{6.7}$$

Debe observarse que β es el ángulo total de contacto y debe expresarse en radianes. Si se arrollara n veces una cuerda en torno a un tambor, el ángulo β sería $2\pi n$ radianes. La ecuación 6.7 es igualmente válida para una sección no circular en la que el ángulo total de contacto sea β. Esta conclusión resulta evidente del hecho de que el radio r del tambor de la figura 6.11 no interviene en las ecuaciones que establecen el equilibrio del elemento diferencial de correa.

La relación que expresa 6.7 se aplica también a transmisiones por correa en las que ésta y la polea giren a velocidad constante. En tal caso, la ecuación describe el cociente entre las tensiones de la correa para la situación de deslizamiento o de deslizamiento inminente. Cuando la velocidad de giro crece mucho, la correa tiende a separarse de la llanta y, entonces, la ecuación 6.7 conlleva un cierto error.

6.9 RESISTENCIA A LA RODADURA

Mencionaremos sólo brevemente la resistencia que introduce la deformación que se produce en el punto de contacto entre una rueda y la superficie sobre la que rueda. Esta resistencia no se debe a fuerzas de rozamiento tangenciales y, por tanto, es un fenómeno completamente diferente al rozamiento seco.

Para describir la resistencia a la rodadura consideremos la rueda representada en la figura 6.12, que está sometida a una carga L en su eje y a una fuerza P en su centro, la cual produce la rodadura. Se han exagerado mucho las deformaciones de las rueda y de la superficie de apoyo. La distribución de la presión p sobre la zona de contacto es análoga a la indicada y la resultante R de esa distribución estará aplicada en un punto A y pasará por el centro de la rueda si la situación es de equilibrio. La fuerza P necesaria para iniciar y mantener la rodadura puede hallarse igualando a cero los momentos de todas las fuerzas respecto a A. Se tiene así

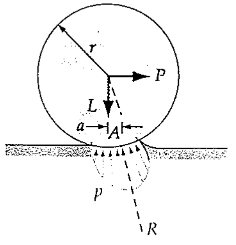


Figura 6.12

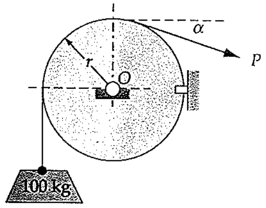
$$P = \frac{a}{r} L = \mu_r L \tag{6.9a}$$

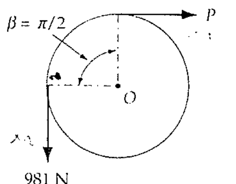
donde el brazo de momento de P se toma igual a r y $\mu_r = a/r$ recibe el nombre de coeficiente de rozamiento por rodadura. El coeficiente μ_r es el cociente entre la fuerza resistente y la carga normal y en este sentido es análogo a los coeficientes de rozamiento estático y cinético. Por otra parte, en la interpretación de μ_r no interviene ningún deslizamiento ni deslizamiento inminente.

La cantidad a depende de muchos factores difíciles de cuantificar, por lo que no se dispone de una teoría general de la rodadura. La distancia a es función de las propiedades elásticas y plásticas de los materiales que se acoplan, del radio de la rueda, de la velocidad de marcha y de la rugosidad de las superficies. Algunas pruebas indican que varía muy poco con el radio de la rueda y a menudo se toma a como independiente del radio de rodadura. Desgraciadamente, en algunos casos se ha hecho referencia a la cantidad a como coeficiente de rozamiento por rodadura; no obstante, a es dimensionalmente una longitud y, por tanto, no es un coeficiente adimensional en el sentido corriente.

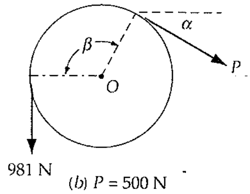
PROBLEMA TIPO 6.9

El cable flexible del que cuelga la carga de 100 kg pasa por el tambor y se somete a la fuerza P para mantenerlo en equilibrio. El coeficiente de rozamiento estático μ entre el cable y el tambor inmóvil es 0,30. (a) Para $\alpha = 0$, determinar los valores máximo y mínimo que puede tener P para que la carga no ascienda ni descienda. (b) Para P = 500 N, determinar el valor mínimo que debe tener el ángulo α antes de que la carga comience a deslizarse.





(a) $\alpha = 0$



(b) $P = 500$ N

Solución. El deslizamiento inminente del cable sobre el tambor inmóvil está dado por la ecuación 6.7, que es $T_2/T_1 = e^{\mu\beta}$.

① (a) Siendo $\alpha = 0$. el ángulo de contacto será $\beta = \pi/2$ radianes. Para el movimiento ascendente inminente de la carga, $T_2 = P_{\max}$, $T_1 = 981$ N y se tiene

② $$P_{\max}/981 = e^{0{,}30(\pi/2)} \qquad P_{\max} = 981(1{,}602) = 1572 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Para el movimiento inminente de la carga hacia abajo, $T_2 = 981$ N, $T_1 = P_{\min}$. Entonces

$$981/P_{\min} = e^{0{,}30(\pi/2)} \qquad P_{\min} = 981/1{,}602 = 612 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

(b) Con $T_2 = 981$ N y $T_1 = 500$ N, la ecuación 6.7 nos da

$$981/500 = e^{0{,}30\beta} \qquad 0{,}30\beta = \ln(981/500) = 0{,}674$$

$$\beta = 2{,}247 \text{ rad} \qquad \text{o sea} \qquad \beta = 2{,}247\left(\frac{360}{2\pi}\right) = 128{,}7°$$

③ $$\alpha = 128{,}7° - 90° = 38{,}7°$$

① **Ha de tenerse muy en cuenta que β debe expresarse en radianes.**

② **Al aplicar la fórmula 6.7, hay que comprobar que sea $T_2 > T_1$.**

③ **Como se hizo observar al deducir la fórmula 6.7, el radio del tambor no interviene en los cálculos. Las únicas condiciones que limitan el movimiento inminente del cable flexible sobre el tambor son el ángulo de contacto y el coeficiente de rozamiento.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

6.87 Hallar la fuerza P necesaria para (*a*) elevar y (*b*) bajar el cilindro de 40 kg lentamente a velocidad constante. El coeficiente de rozamiento entre la cuerda y la superficie en que se apoya es 0,30.

Resp. (*a*) $P = 1007$ N (*b*) $P = 152{,}9$ N

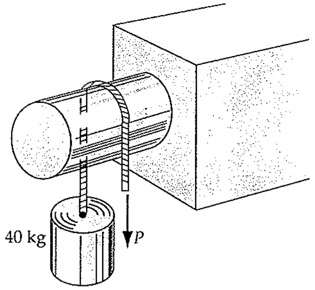


Figura problema 6.87

6.88 Para que el cilindro descienda a velocidad constante, con la cuerda dando una vuelta y cuarto alrededor del eje inmóvil, hace falta una fuerza $P = mg/6$. Calcular el coeficiente de rozamiento μ entre la cuerda y el eje.

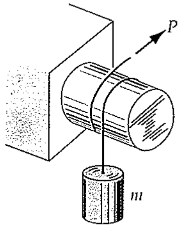


Figura problema 6.88

6.89 Para que una embarcación no corra a lo largo del muelle, un amarrador tensa el cabo de spring. Si ejerce una tracción de 200 N en el cabo, que da una vuelta y cuarto al noray, ¿qué fuerza T podrá aguantar el amarrador? El coeficiente de rozamiento entre la estacha y el noray de fundición de acero vale 0.30.

Resp. $T = 2.11$ kN

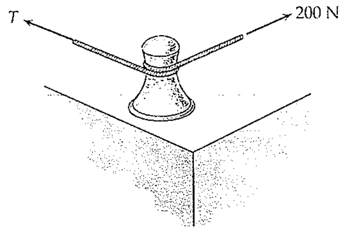


Figura problema 6.89

6.90 El operario del problema 6.89 debe aguantar la tracción de 18 kN de la porción de estacha que va al barco. ¿Cuántas vueltas tendrá que darle al cabo en el noray si él ejerce una fuerza de 240 N en el extremo libre? El coeficiente de rozamiento entre la soga y el noray es 0,30.

6.91 En las películas del Oeste vemos muchas veces que los cowboys atan el caballo como se muestra en la ilustración, dando descuidadamente dos o tres vueltas a las riendas en torno a un palo horizontal y dejan que cuelguen sin anudarlas. Si el trozo de rienda que cuelga suelto tiene una masa de 0,060 kg y el número de vueltas es el que se muestra ¿qué tracción T tiene que ejercer el caballo en la dirección indicada para liberarse? El coeficiente de rozamiento entre las riendas y el palo de madera vale 0,70.

Resp. $T = 8{,}10$ kN

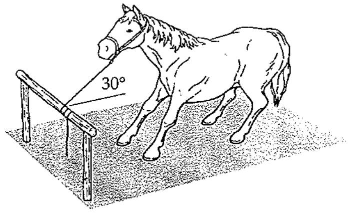


Figura problema 6.91

Problemas representativos

6.92 Para un determinado coeficiente de rozamiento μ y un determinado ángulo α, la fuerza P necesaria para subir m es 4 kN y la necesaria para que baje es 1,6 kN. Calcular la masa m.

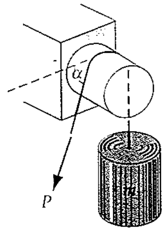


Figura problema 6.92

6.93 Un bulto de 50 kg está atado a una cuerda que pasa por encima de un pedrusco de forma irregular pero de textura superficial uniforme. Si para que el bulto descienda a velocidad constante hay que aplicar una fuerza descendente $P = 70$ N, (*a*) determinar el coeficiente de rozamiento μ entre la cuerda y el pedrusco. (*b*) ¿Qué fuerza P' haría falta para que el bulto subiera a velocidad constante?

Resp. (*a*) $\mu = 0.620$ (*b*) $P' = 3.44$ kN

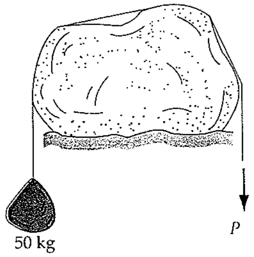


Figura problema 6.93

6.94 El podador de 80 kg desciende valiéndose de la cuerda que pasa en torno a una rama gruesa horizontal del árbol. Sien-

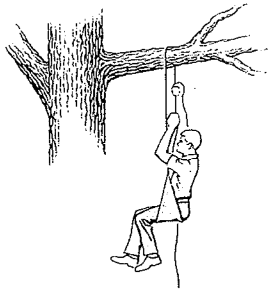


Figura problema 6.94

do 0.60 el coeficiente de rozamiento entre cuerda y árbol, calcular la fuerza que debe ejercer el hombre en la cuerda para descender lentamente.

6.95 La cinta magnética pasa, a velocidad constante, en torno a las poleas locas B y por el cabezal grabador fijo A. La tensión en la cinta no varía cuando pasa por las poleas. Calcular la distancia mínima a para que el cociente entre las tensiones T_1 y T_2 no exceda de 1.15. El coeficiente de rozamiento entre la cinta y el cabezal vale 0.10.

Resp. a = 62.2 mm

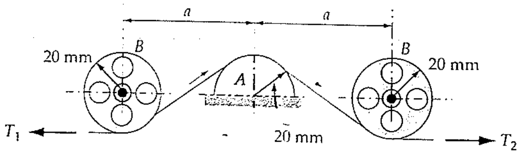


Figura problema 6.95

6.96 Una manguera de jardín de masa 1,2 kg/m está en contacto con el suelo en todo el tramo de B a C. ¿Cuál es la componente horizontal P_x de la fuerza que el jardinero debe ejercer al objeto de tensar la manguera en torno a la guarda cilíndrica hincada en B? El coeficiente de rozamiento entre la manguera y el suelo es 0.50 y entre la manguera y el cilindro es 0,40. Supóngase que la manguera no toca el suelo entre A y B.

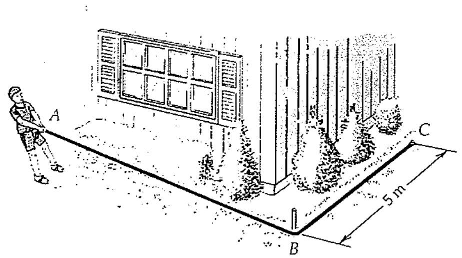


Figura problema 6.96

6.97 Determinar entre qué límites puede variar la masa m del cilindro para que el sistema permanezca en equilibrio. El coeficiente de rozamiento entre el bloque de 50 kg y el plano inclinado es 0.20 y entre la cuerda y la superficie cilíndrica de apoyo es 0.30.

Resp. 4.33 kg < m < 47,1 kg

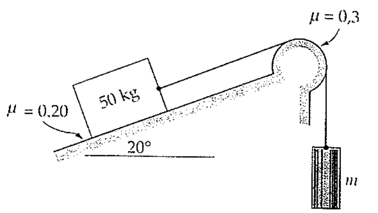


Figura problema 6.97

6.98 La correa sin fin de una escalera mecánica pasa alrededor del tambor tensor A y es accionada por un par M aplicado al tambor B. La tensión de la correa se ajusta mediante el tensor C que confiere una tracción inicial de 4,5 kN a cada ramal de la correa cuando la escalera está descargada. Calcular el coeficiente de rozamiento mínimo μ entre el tambor B y la correa para que no haya resbalamiento, si la escalera transporta 30 personas de 70 kg por término medio repartidas uniformemente a lo largo de la correa. (*Nota*: Puede demostrarse que el aumento de tensión de la correa en el lado superior del tambor B y la disminución de tensión en la parte superior de A son iguales cada una a la mitad de la componente según la pendiente del peso combinado de los pasajeros.)

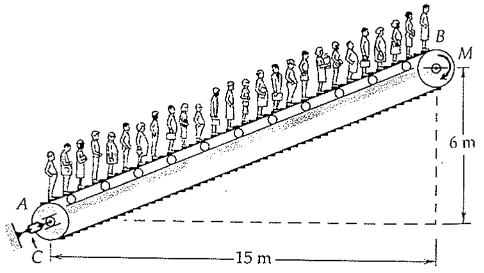


Figura problema 6.98

6.99 Calcular la fuerza horizontal P necesaria para elevar la carga de 100 kg. El coeficiente de rozamiento entre la cuerda y las barras inmóviles vale 0.40.

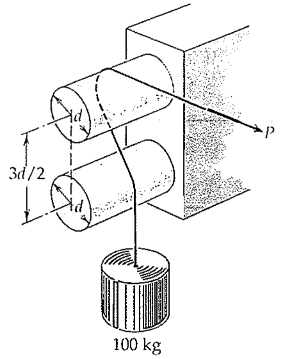


Figura problema 6.99

6.100 La viga uniforme de 3 m cuelga del cable que pasa por la polea de dimensiones apreciables. La chaveta en A impide la rotación de la polea. Si es 0,25 el coeficiente de rozamiento entre el cable y la polea, determinar el valor mínimo de x para que el cable no se deslice por la polea.

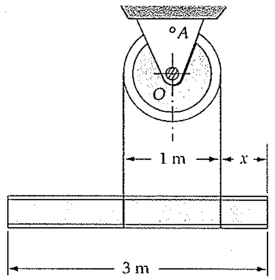


Figura problema 6.100

6.101 En la figura se representa un dispositivo destinado a que una persona en una eslinga descienda a velocidad controlada constante. La cuerda rodea un eje central fijo al bastidor y sale libre a través del collar inferior. Se ajusta el número de vueltas girando el collar inferior, el cual enrolla o desenrolla la cuerda en torno al eje. La entrada de la cuerda por el collar superior en A equivale a $\frac{1}{4}$ de vuelta, y el paso rodeando el ángulo B también equivale a $\frac{1}{4}$ de vuelta. El rozamiento de la cuerda en los tramos rectos de los collares tiene un valor medio de 10 N para cada collar. Si se precisan tres vueltas completas en torno al eje, además de las correspondientes a los ángulos, para que un hombre de 75 kg descienda a velocidad constante sin ejercer tracción sobre el extremo libre de la cuerda, calcular el coeficiente de rozamiento μ entre la cuerda y las superficies de contacto del dispositivo. Despréciese el pequeño ángulo de hélice de la cuerda alrededor del árbol.

Resp. μ = 0,195

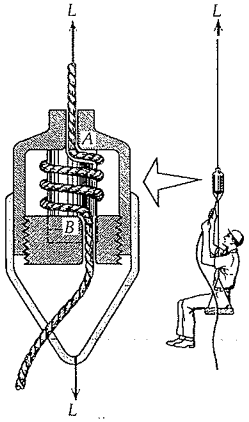


Figura problema 6.101

6.102 Hallar el momento M del par requerido para rotar el tubo asentado en el bloque en V en contra de la acción de la banda flexible. Hay una fuerza P = 100 N aplicada a la palanca, la cual puede oscilar en torno de O. El coeficiente de rozamiento entre la banda y el tubo es 0,30 y entre éste y el bloque, 0,40. Se desprecian los pesos.

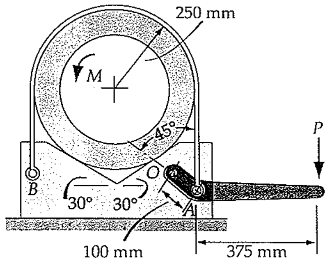


Figura problema 6.102

6.103 El cilindro de masa *m* está amarrado a la anilla *A*, que cuelga del cable que pasa en torno a la polea, tal como se muestra en la ilustración *a*. Un par *M* aplicado a la polea la hace girar hasta que el cable comienza a patinar en la posición $\theta = 20°$, tal como se muestra en la ilustración *b*. Hallar el coeficiente de rozamiento μ entre el cable y la polea.

Resp. $\mu = 0{,}214$

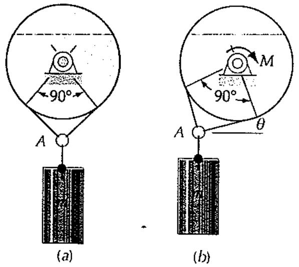


Figura problema 6.103

6.104 Sustituir la correa y la polea planas de la figura 6.11 por una correa trapezoidal y una polea acanalada como las indicadas en la figura de este problema. Deducir la relación entre las tensiones en la correa, el ángulo de contacto y el coeficiente de rozamiento en la correa trapezoidal en la situación de deslizamiento inminente. Si se emplea una correa trapezoidal con $\alpha = 35°$ ¿equivale ello a incrementar por un factor *n* el coeficiente de rozamiento en una correa plana hecha del mismo material?

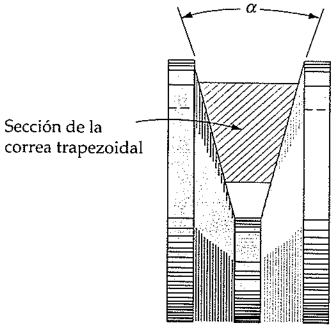


Figura problema 6.104

6.105 En la figura se representa una llave para filtros de aceite del tipo de cinta. Si entre ésta y el filtro fijo el coeficiente de rozamiento vale 0,25, determinar el valor mínimo de *h* para que la llave no resbale sobre el filtro cualquiera que sea el valor de la fuerza *P*. Despréciese la masa de la llave y supóngase que la presencia de la pequeña pieza *A* equivale a que el arrollamiento de la cinta empezase en la posición correspondiente a las tres horas y discurriera en sentido horario.

Resp. $h = 27.8$ mm

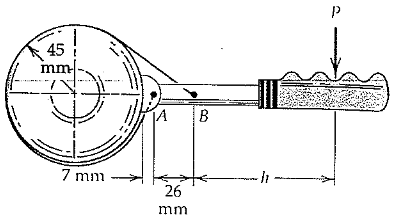


Figura problema 6.105

6.106 La cadena tiene una masa ρ por unidad de longitud. Determinar la longitud *h* de la misma que pende por debajo de la guía cilíndrica fija cuando la situación es de deslizamiento inminente. El coeficiente de rozamiento es μ . (*Sugerencia*: La ecuación diferencial resultante que liga la tensión *T* en la cadena con el ángulo θ es de la forma $dT/d\theta + KT = f(\theta)$, o sea, una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden con coeficientes constantes. Su solución es

$$T = Ce^{-K\theta} + e^{-K\theta}\int e^{K\theta}f(\theta)d\theta$$

donde *C* y *K* son constantes.)

Resp. $h = \dfrac{2\mu r}{1+\mu^2}(1 + e^{\mu\pi})$

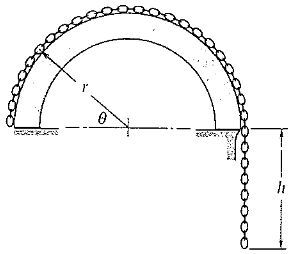


Figura problema 6.106

En este estudio del rozamiento hemos concentrado nuestra atención en el rozamiento seco, o de Coulomb, en el que basta un modelo mecánico sencillo de las irregularidades superficiales de los cuerpos en contacto (fig. 6.11) para explicar los fenómenos de forma adecuada a las aplicaciones prácticas. Teniendo presente con claridad este modelo podemos imaginar fácilmente los tres tipos de problemas de rozamiento seco que pueden presentarse. Estos son:

1. El rozamiento estático es inferior al máximo posible y está determinado por las ecuaciones de equilibrio. (Generalmente habrá que comprobar que $F < \mu_e N$.)
2. Rozamiento estático límite con movimiento inminente ($F = \mu_e N$).
3. Rozamiento cinético con resbalamiento entre superficies en contacto ($F = \mu_c N$).

A cada pareja de superficies en contacto corresponde un coeficiente de rozamiento determinado y carece de sentido hablar de coeficiente de rozamiento de una superficie aislada. El coeficiente de rozamiento estático μ_e de una pareja de superficies dadas acostumbra a ser levemente mayor que el coeficiente cinético μ_c. La fuerza de rozamiento que actúa sobre un cuerpo tiene siempre el sentido que se opone al deslizamiento, sea éste real o el que tendría lugar en ausencia de rozamiento.

Cuando se presentan fuerzas de rozamiento distribuidas sobre una superficie o a lo largo de una línea según una manera impuesta, se elige un elemento representativo de esa superficie o línea y se calculan los efectos de la fuerza de rozamiento elemental sobre el elemento, por lo que respecta a la fuerza en sí y a su momento, y a continuación se integra sobre toda la superficie o línea.

Los coeficientes de rozamiento varían considerablemente según el estado exacto de las superficies en contacto. El cálculo de un coeficiente de rozamiento con tres cifras significativas representa una precisión no reproducible fácilmente mediante experimentación y cuando se cita uno de esos valores lo es únicamente a efectos de comprobación de cálculos. Así, en la práctica del diseño de ingeniería el empleo del valor de un coeficiente de rozamiento estático o cinético obtenido de un manual debe considerarse sólo como una aproximación.

Al repasar la introducción anterior a los problemas de rozamiento, el lector debe mantener presente la existencia de las otras formas de rozamiento mencionadas en el apartado de introducción a este capítulo. Por ejemplo, los problemas en los que interviene el rozamiento fluido se encuentran entre los más importantes de rozamiento que aparecen en Mecánica, y el estudio de este fenómeno se incluye entre los temas de la Mecánica de Fluidos.

PROBLEMAS

6.107 El bloque de 40 kg se coloca sobre el plano inclinado 30° y se suelta desde el reposo. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es 0,30. (*a*) Determinar los valores máximo y mínimo de la tensión inicial T del resorte para que el bloque no se deslice. (*b*) Calcular la fuerza de rozamiento F sobre el bloque si $T = 150$ N.

Resp. (*a*) $T_{\text{max}} = 298$ N $T_{\text{min}} = 94$ N
(*b*) $F = 46$ N

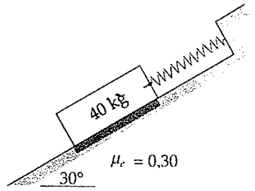


Figura problema 6.107

6.108 Sobre un plano inclinado se colocan dos cajas en contacto entre ellas. Los coeficientes de rozamiento estático bajo las cajas A y B son, respectivamente, 0,40 y 0,30. Explíquese qué ocurre.

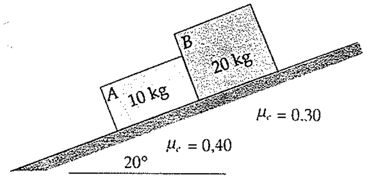


Figura problema 6.108

6.109 Un dispositivo inmovilizador permite que la barra A se mueva hacia la izquierda pero impide su movimiento hacia la derecha. Si el coeficiente de rozamiento entre la zapata B y la barra A es 0,40, especificar la longitud máxima b de la varilla de unión que haga posible que el dispositivo trabaje de la forma indicada.

Resp. $b = 96.9$ mm

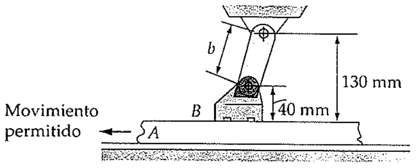


Figura problema 6.109

6.110 La cuña de 6° se usa para separar los bloques cargados por resorte. Para un coeficiente de rozamiento de 0.30 entre la cuña y los bloques, determinar la fuerza P necesaria para producir una compresión de 1,2 kN en cada resorte. Hallar la fuerza P' necesaria para extraer la cuña cuando se retira la fuerza P.

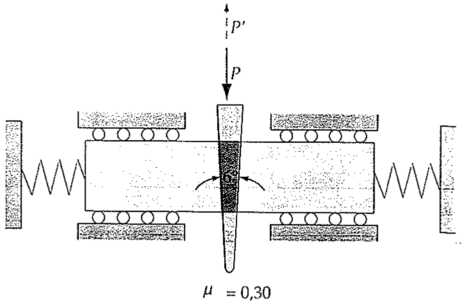


Figura problema 6.110

6.111 En la construcción de embarcaciones de madera se emplean muy eficazmente cuñas apuntaladas para cerrar los intersticios entre tablas. En la combinación representada, para mover la cuña hace falta una fuerza P de 1,2 kN. Hallar la fuerza de rozamiento F actuante en el extremo superior A del puntal. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético en todas las parejas de superficies en contacto pueden tomarse iguales a 0,40.

Resp. $F = 481$ N

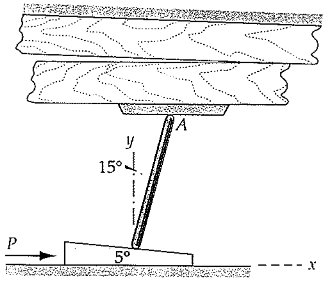


Figura problema 6.111

6.112 Al cilindro circular de 30 kg lo sujeta la cuerda fija en B a su periferia y en A al suelo. Siendo 0,60 el coeficiente de rozamiento estático, hallar la fuerza P capaz de provocar el resbalamiento del cilindro.

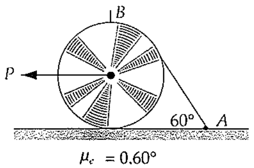


Figura problema 6.112

6.113 Un tronco de 500 kg está siendo arrastrado uniformemente cuesta arriba mediante el cable sujeto al torno de la camioneta. Si es 0,80 el coeficiente de rozamiento cinético entre el tronco y la pendiente y 0,50 entre el cable y el peñasco, hallar la tracción T que debe generar el torno.

Resp. $T = 7980$ N

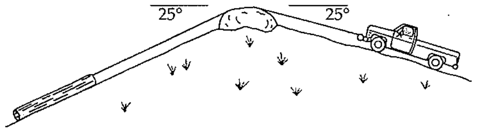


Figura problema 6.113

6.114 Calcular el momento M del par que debe entregar el motor al puente trasero de la camioneta para hacerla rodar por encima del obstáculo, suponiendo que las ruedas traseras no patinen. Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo necesario en las ruedas traseras para que no haya deslizamiento. La masa de la camioneta cargada, de centro de masa G, es 1900 kg.

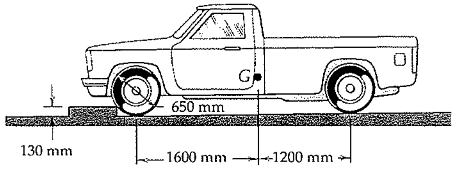


Figura problema 6.114

6.115 A las dos tablas aprisionadas por la mordaza hay que aplicarles una fuerza de 600 N. El tornillo tiene un diámetro medio de 10 mm y avanza 2,5 mm por vuelta. El coeficiente de rozamiento estático es 0.20. Determinar la fuerza F que debe aplicarse al punto C de la palanca para (*a*) apretar y (*b*) aflojar la mordaza. Despréciese el rozamiento en el punto A.

Resp. (*a*) $F = 8.52$ N   (*b*) $F = 3.56$ N

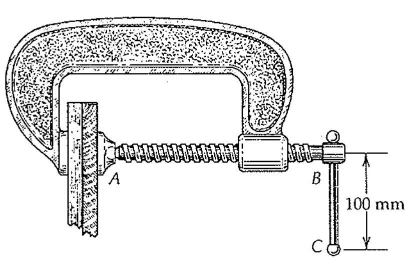


Figura problema 6.115

6.116 Un automóvil de 1600 kg de masa con una distancia entre ejes de 3 m tiene su centro de gravedad a 60 cm por encima de la calzada y equidistante de ambos puentes. Si es 0,80 el coeficiente de rozamiento efectivo entre los neumáticos y la calzada, hallar el ángulo θ que forma con la horizontal la pendiente más acusada que el vehículo puede subir antes de que patinen las ruedas (motrices) traseras. En estas condiciones ¿qué par M aplica el motor a cada una de las ruedas traseras de 66 cm de diámetro? Despréciese el rozamiento en las ruedas delanteras.

6.117 Se repite aquí el sistema cuña-bloque del problema 6.54 donde se desprecia la masa de la cuña. Si es 0,20 el coeficiente de rozamiento en todas las superficies en contacto, determinar el módulo y sentido de la fuerza horizontal P necesaria para que descienda el bloque de 200 kg.

Resp. $P = 266$ N (hacia la derecha)

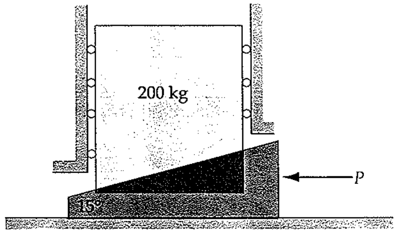


Figura problema 6.117

6.118 El tornillo de la pequeña prensa tiene un diámetro medio de 25 mm y una doble rosca de filete cuadrado de paso 8 mm. El cojinete plano de empuje en A, que se representa ampliado, tiene sus superficies bien desgastadas. Si es 0,25 el coeficiente de rozamiento tanto para la rosca como para el cojinete en *A*, calcular el momento *M* del par que debe aplicarse al volante para (*a*) originar una compresión de 4 kN y (*b*) para aflojar la prensa a partir de la compresión de 4 kN.

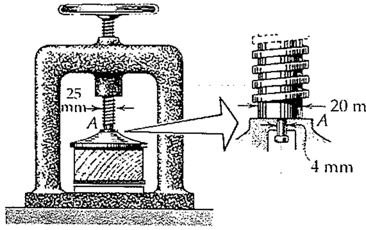


Figura problema 6.118

6.119 El cilindro tiene una masa de 36 kg y la barra delgada uniforme a él unida tiene una masa desconocida *m*. El conjunto permanece en equilibrio estático mientras el ángulo θ es menor o igual que 45°, pero resbala si θ excede de 45°. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento vale 0,30, determinar *m*.

Resp. $m = 31{,}6$ kg

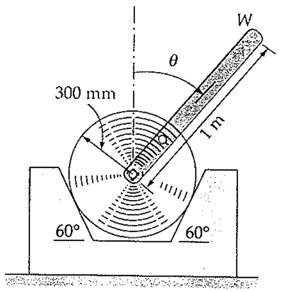


Figura problema 6.119

6.120 ¿Entre qué valores de la masa *m* se encuentra el sistema en equilibrio estático? El coeficiente de rozamiento estático es $\mu_e = 0{,}20$ en todas partes.

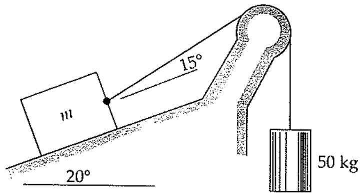


Figura problema 6.120

6.121 El carrete de cable telefónico tiene una masa de 3 Mg y está apoyado por su eje sobre soportes tallados en *V* a ambos lados del carrete. Se levanta éste haciendo subir los soportes con gatos, de modo que se puede tirar horizontalmente del cable en la forma que se indica. El eje está fijo al carrete y gira con él. Si es 0,30 el coeficiente de rozamiento entre el eje y las superficies en *V*, calcular la tracción *P* que hay que aplicar al cable para que gire el carrete.

Resp. $P = 313$ N

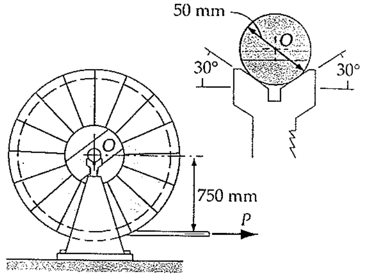


Figura problema 6.121

6.122 El pequeño rodillo de la barra delgada uniforme se apoya en *A* contra la superficie vertical, mientras que el extremo redondeado *B* descansa sobre la plataforma que se hace girar lentamente hacia abajo a partir de la posición horizontal representada. Si la barra comienza a resbalar cuando $\theta = 25°$, determinar el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre la barra y la plataforma. Despréciense el rozamiento en el rodillo y el pequeño grosor de la plataforma.

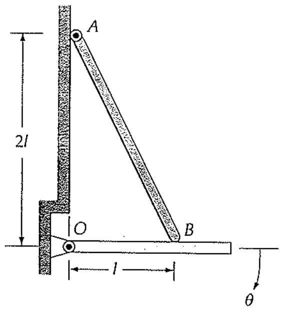


Figura problema 6.122

6.123 Bajo la acción del par aplicado *M*, el cilindro de 25 kg se aprieta contra el rodillo *A*, que gira libremente. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el cilindro y la superficie horizontal son, respectivamente, 0.50 y 0.40, hallar la fuerza de rozamiento *F* actuante en el cilindro si (*a*) $M = 20$ N · m y (*b*) $M = 40$ N · m.

Resp. (*a*) $F = 133.3$ N (*b*) $F = 127.6$ N

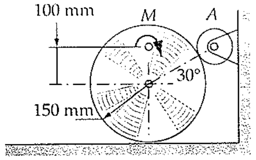


Figura problema 6.123

6.124 El camión descarga su cargamento haciéndolo deslizar lentamente por su volquete elevado. La masa total de la caja es 5 Mg y su centro de masa *G* coincide con el centro geométrico de la caja. El coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el volquete es 0,30. Calcular la fuerza de frenado *F* que se genera entre los neumáticos y la calzada horizontal cuando la caja se encuentra a punto de resbalar por el volquete en la posición indicada, y el camión se encuentra a punto de rodar hacia adelante. En el canto inferior de la caja no hay deslizamiento.

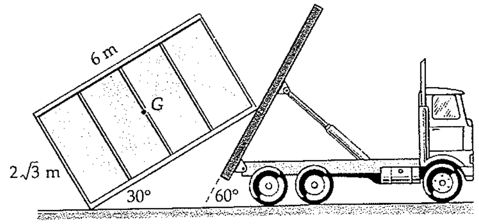


Figura problema 6.124

6.125 La dos zapatas de freno y sus forros pivotan alrededor de los puntos *O* y se expanden contra el tambor de freno por efecto del cilindro hidráulico *C*. La presión *p* entre el tambor y el forro puede demostrarse que es directamente proporcional al seno del ángulo θ medido a partir de *O* para cada zapata y tiene un valor p_o para $\theta = \beta$. La anchura del forro en contacto con el tambor es *b*. Escribir la expresión del momento frenante M_f aplicado a la rueda si el coeficiente de rozamiento entre el tambor y el forro es μ .

$$Resp.\ M_f = 2\mu b r^2 p_0 \left(\frac{1 - \cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\right)$$

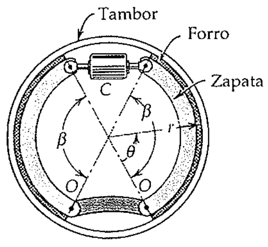


Figura problema 6.125

6.126 Calcular el momento *M* del par a aplicar al cilindro inferior para que los dos cilindros, ambos de 20 kgs rueden lentamente *plano abajo*. En todas las superficies en contacto los coeficientes de rozamiento estático y cinético son $\mu_e = 0{,}60$ y $\mu_c = 0.50$.

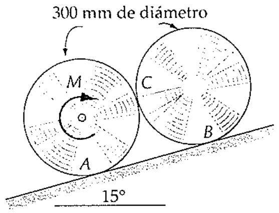
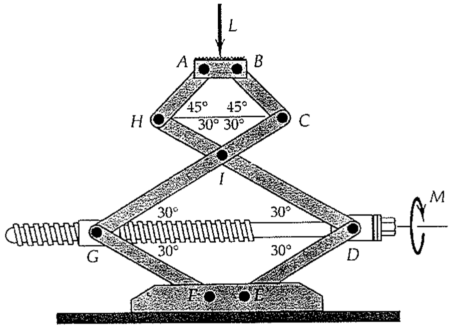


Figura problema 6.126

6.127 Un gato de tijera tiene un roscado simple de filete cuadrado acoplado al manguito roscado *G* y que gira en el cojinete de bolas *D*. La rosca tiene un diámetro medio de 10 mm y un paso (avance por vuelta) de 3 mm. Si en los filetes, engrasados, hay un coeficiente de rozamiento de 0,20, (*a*) calcular el par *M* a aplicar al tornillo para elevar una carga de 1000 kg desde la posición representada y (*b*) calcular el par *M* para bajar la carga desde la misma posición. Téngase en cuenta que las barras *AH*, *BC*, *FG* y *ED* están dotadas de engranajes dentados en los puntos *A*, *B*, *E* y *F* para evitar la rotación de las plataformas superior e inferior. Despréciese el rozamiento en el cojinete *D*.

Resp. (*a*) $M = 35.7$ N · m (*b*) $M = 12{,}15$ N · m



$\overline{GI} = \overline{DI} = 160$ mm, $\overline{HI} = \overline{CI} = 80$ mm

Figura problema 6.127

6.128 El dispositivo representado impide la rotación en el sentido horario en el plano de la rueda central por medio de la sujeción por rozamiento de los dos rodillos pequeños. Para valores dados de R y r y para un coeficiente de rozamiento μ en todas las superficies en contacto, determinar el intervalo de valores de d para el cual funcione el dispositivo en la forma mencionada.

Resp. $\dfrac{2r + (1 - \mu^2)R}{1 + \mu^2} < d < (R + 2r)$

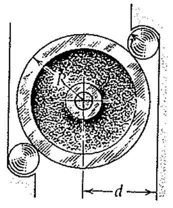


Figura problema 6.128

*PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

*6.129 La carga se eleva mediante el cable que se desliza por el tambor fijo con un coeficiente de rozamiento de 0,50. El extremo del cable está sujeto a la corredera A de la que tira lentamente la fuerza P a lo largo de la barra de guía horizontal. Representar gráficamente P en función de θ en el intervalo $90° \leq \theta \leq 10°$ y determinar su valor máximo junto con el correspondiente valor de θ. Comprobar analíticamente el valor de P_{max} obtenido de la gráfica.

Resp. $P_{max} = 2430$ N, $\theta = 26{,}6°$

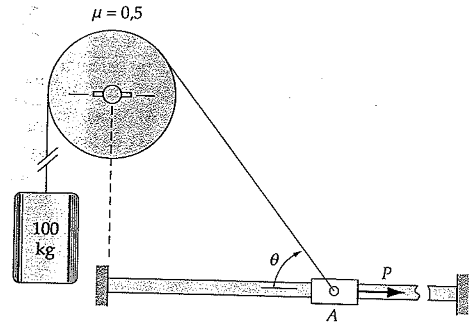


Figura problema 6.129

*6.130 Se repite aquí la figura del problema 6.122. Para un coeficiente de rozamiento estático $\mu_e = 0{,}50$, determinar el ángulo θ de inclinación de la plataforma bajo el que sobrevendrá el resbalamiento. Despréciense el rozamiento en el rodillo y el pequeño grosor de la plataforma.

*6.131 El poste esbelto se apoya en B sobre un rodillo de pequeñas dimensiones. Su extremo A no resbala en la superficie horizontal si el coeficiente de rozamiento estático μ_e es lo bastante grande. (a) Hallar el valor mínimo de μ_e para que no haya deslizamiento para ningún valor de θ comprendido entre 0° y 60° y representar gráficamente μ_e en función de θ. A partir de estos resultados, y si $\mu_e = 0{,}4$, determinar los límites de θ entre los cuales estará inestable. (b) ¿Para qué ángulo θ presenta el poste su máxima inestabilidad y cuál es el coeficiente de rozamiento estático mínimo μ_e que haría falta para que no hubiera resbalamiento en esa posición?

Resp. (a) Con $\mu_e = 0{,}4$, inestabilidad para $24{,}0° < \theta < 57{,}2°$
(b) Para $\theta = 41{,}8°$ y hace falta $\mu_e = 0{,}554$

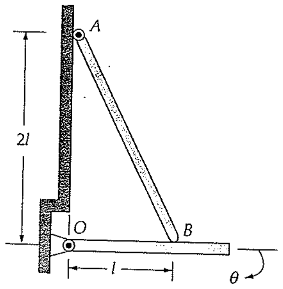


Figura problema 6.130

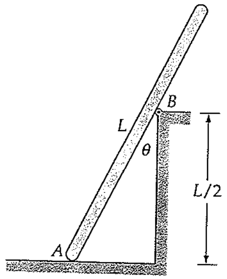


Figura problema 6.131

*6.132 Se repite aquí la figura del problema 6.29. Si $R = 1{,}2$ m, $L = 2$ m y la barra tiene una masa de 3 kg, determinar el ángulo máximo θ que puede alcanzar la barra en equilibrio antes de comenzar a deslizarse. El coeficiente de rozamiento estático entre la barra y la superficie de apoyo es 0,15.

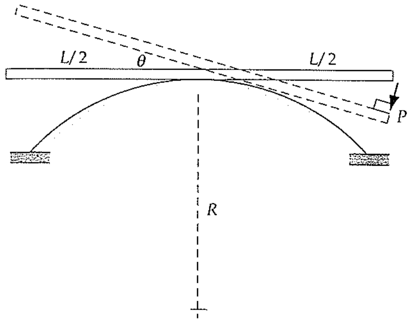


Figura problema 6.132

*6.133 Véase el problema 6.132, donde la masa de la barra uniforme es 3 kg, $L = 2$ m y $R = 1{,}2$ m. Conforme aumenta la fuerza P, aumenta también el ángulo de equilibrio θ, mientras no sobrevenga el deslizamiento. El valor límite de θ se alcanza para $R\theta = L/2$, donde θ está en radianes. Para θ variando entre cero y $L/(2R)$, representar gráficamente el correspondiente valor de equilibrio de P, la fuerza de contacto normal N y el valor mínimo μ_e del coeficiente de rozamiento estático para el que no hay deslizamiento bajo cada ángulo. Identificar el ángulo θ_{cr} para el que μ_e alcanza un valor máximo.

Resp. $P = \dfrac{35{,}3\theta\cos\theta}{1 - 1{,}2\theta}$, $\mathrm{N} = \dfrac{29{,}4\cos\theta}{1 - 1{,}2\theta}$ (newtons)

$$\mu_e = (1 - 1{,}2\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta$$

$$\mu_{e_{max}} = 0{,}222 \text{ para } \theta = 25{,}5°$$

*6.134 Un cable pesado de 12 kg por metro de longitud pasa alrededor de los dos tubos fijos separados 300 m y a la misma altura. Un extremo del cable tiene sujeto un cilindro de 1600 kg. Experimentalmente se descubre que hace falta una fuerza P de 60 kN para provocar el deslizamiento del cable alrededor de ambos tubos a velocidad constante. Determinar el coeficiente de rozamiento cinético μ_c entre el cable y los tubos, la tensión máxima T en el tramo de cable comprendido entre los tubos y la flecha h del cable.

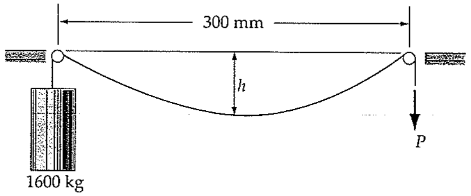
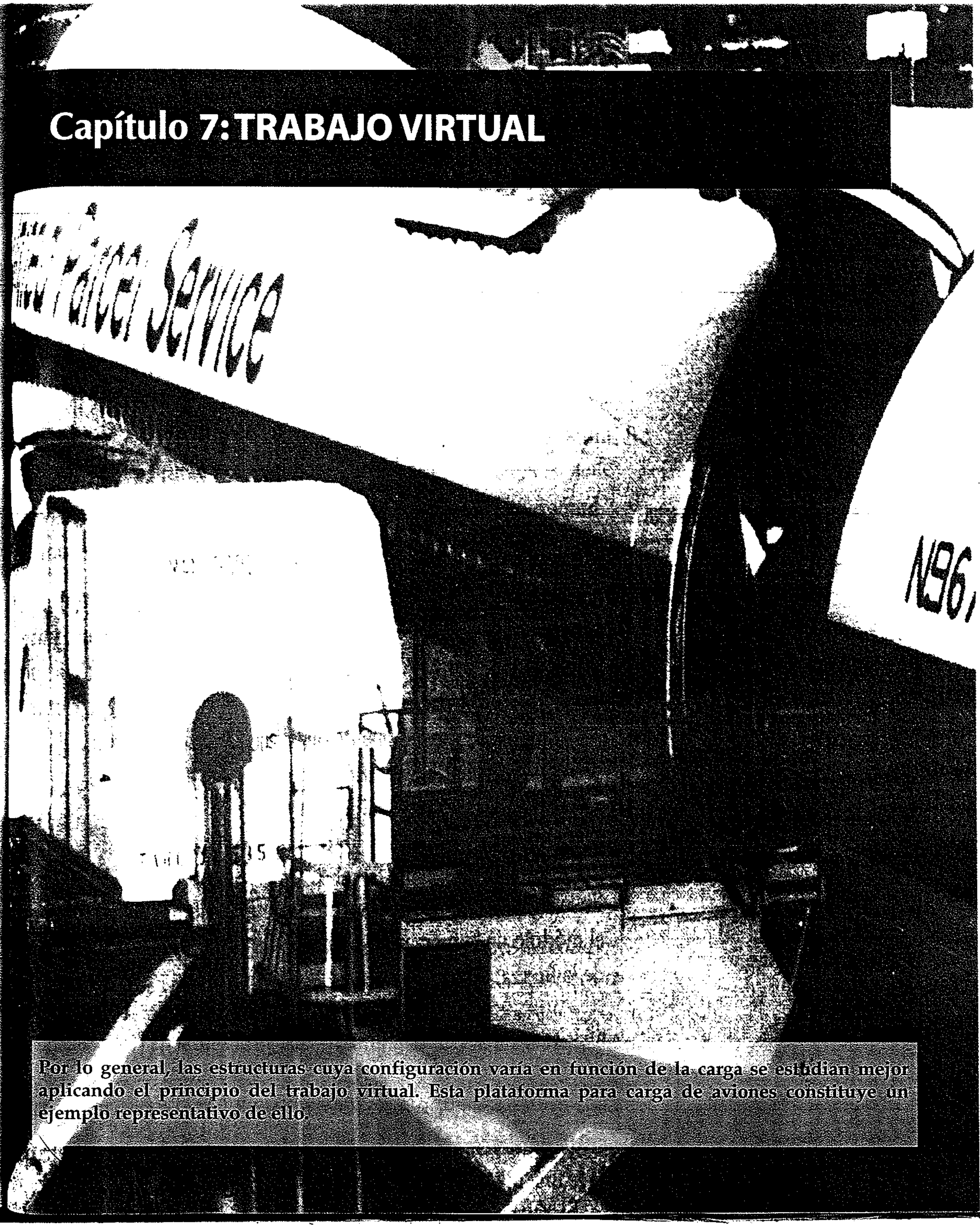


Figura problema 6.134

Capítulo 7: TRABAJO VIRTUAL

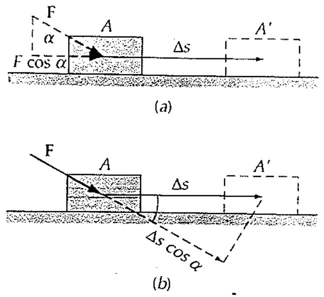


Por lo general, las estructuras cuya configuración varía en función de la carga se estudian mejor aplicando el principio del trabajo virtual. Esta plataforma para carga de aviones constituye un ejemplo representativo de ello.

7.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha analizado el equilibrio de un cuerpo aislándolo, siguiendo la técnica del diagrama de sólido libre y escribiendo las ecuaciones que imponen la anulación de las sumas de fuerzas y de las sumas de momentos. Ese método se aplicó casi siempre a cuerpos cuya posición de equilibrio se conocía o se especificaba y donde el problema consistía en determinar una o varias fuerzas exteriores desconocidas.

Hay otra clase de problemas en que los cuerpos se componen de miembros interconectados de tal modo que está permitido el movimiento relativo de las partes y, por tanto, existen varias configuraciones de equilibrio que deben estudiarse. En estos problemas, aun cuando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos sigan siendo válidas y suficientes, no son muchas veces el procedimiento más directo y cómodo. Más útil y directo resulta entonces un método basado en el concepto de trabajo realizado por una fuerza. Además, el método proporciona una visión más profunda del comportamiento de los sistemas mecánicos y permite examinar la estabilidad de los sistemas en equilibrio. Vamos a desarrollar a continuación este método, llamado *método de los trabajos virtuales*.



(a)

(b)

Figura 7.1

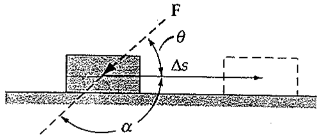


Figura 7.2

7.2 TRABAJO

Empezamos por definir el término *trabajo*, que aquí se emplea confiriéndole un significado cuantitativo distinto al que tiene en el lenguaje común.

(a) Trabajo de una fuerza. Consideremos la fuerza constante F que actúa sobre el cuerpo de la figura 7.1*a*, cuyo movimiento en el plano entre A y A' está representado por el vector Δs, llamado *desplazamiento* del cuerpo. Por definición, el trabajo U efectuado por la fuerza **F** sobre el cuerpo durante dicho desplazamiento es la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento multiplicada por el desplazamiento; o sea

$$U = (F\cos\alpha)\Delta s$$

En la figura 7.1*b* puede verse que se obtiene el mismo resultado multiplicando el módulo de la fuerza por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza; es decir

$$U = F(\Delta s\cos\alpha)$$

Dado que se obtiene el mismo resultado independientemente de la dirección en que se descompongan los vectores, observamos de inmediato que el trabajo U es una magnitud escalar.

El trabajo será positivo cuando la componente de la fuerza que realice el trabajo tenga el mismo sentido que el desplazamiento; cuando el sentido de dicha componente sea opuesto al desplazamiento, como en la figura 7.2, el trabajo realizado será negativo. Entonces

$$U = (F\cos\alpha)\Delta s = -(F\cos\theta)\Delta s$$

Podemos generalizar ahora la definición de trabajo para abarcar aquellas situaciones en que sean variables la dirección del desplazamiento y el módulo y dirección de la fuerza. En la figura 7.3*a* se representa una fuerza que actúa en el punto A de un cuerpo, punto que se mueve a lo largo de la trayectoria indicada entre A_1 y A_2. El punto A está identificado por su vector de posición **r** respecto a un origen cualquiera O, elegido convenientemente, y el desplazamiento infinitesimal entre A y A' está dado por la variación infinitesimal $d\mathbf{r}$ del vector de posición. El trabajo realizado por la fuerza **F** durante ese desplazamiento infinitesimal es, por definición,

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{7.1}$$

Si F designa el módulo de la fuerza **F** y ds designa el módulo del desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$, entonces, aplicando la definición de producto escalar, podremos escribir

$$dU = F\,ds\cos\alpha$$

Aquí también es posible interpretar esta expresión como el producto de la componente $F\cos\alpha$ de la fuerza en la dirección del desplazamiento por el desplazamiento, o bien como el producto de la componente $ds\cos\alpha$ del desplazamiento en la dirección de la fuerza por la fuerza, tal como se indica en la figura 7.3*b*. Expresando **F** y $d\mathbf{r}$ en función de sus componentes rectangulares, se tiene

$$\begin{aligned} dU &= (\mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z)\cdot(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz) \\ &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \end{aligned}$$

Para obtener el trabajo total U realizado por **F** durante un movimiento finito del punto A desde A_1 a A_2 (fig. 7.3*a*), debemos integrar dU entre esos dos puntos o sea

$$U = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

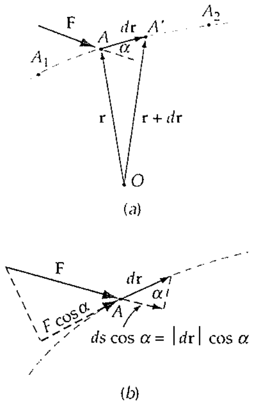
es decir,

$$U = \int F\cos\alpha\,ds$$

Para efectuar esta integración es necesario conocer la relación entre las componentes y sus coordenadas respectivas o las relaciones entre F y s y entre $\cos\alpha$ y s.

En el caso de fuerzas concurrentes aplicadas a un punto determinado de un cuerpo, el trabajo realizado por la resultante es igual a la suma de los trabajos realizados por cada una de esas fuerzas. Esto es consecuencia de que la componente de la resultante en la dirección del desplazamiento es igual a la suma de las componentes de las distintas fuerzas en la misma dirección.

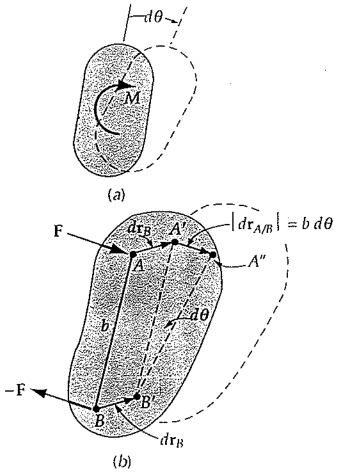
(b) Trabajo de un par de fuerzas. Además de las fuerzas, los pares de fuerzas también pueden realizar trabajo. En la figura 7.4*a* se representa un cuerpo sometido a un par de fuerzas de momento M y que rota una ángulo $d\theta$. El trabajo de este par de fuerzas puede determinarse fácilmente combinando los trabajos de las dos fuerzas constituyentes del par. En la ilustración *b* de la figura 7.4 se representa el par mediante dos fuerzas iguales y opuestas **F** y −**F** aplica-



(a)

(b)

Figura 7.3



(a)

(b)

Figura 7.4

das a dos puntos cualesquiera A y B tales que $F = M/b$. Durante el movimiento infinitesimal en el plano de la figura, la recta AB se traslada a $A''B'$. El desplazamiento de A podemos ahora descomponerlo en dos etapas: primero, un desplazamiento $d\mathbf{r}_B$ igual al desplazamiento de B y, segundo, un desplazamiento $d\mathbf{r}_{A/B}$ (léase desplazamiento de A respecto a B) debido a la rotación en torno a B. Vemos que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ en el desplazamiento de A a A' es igual al realizado por $-\mathbf{F}$ en el desplazamiento de B a B'. Resulta, pues, que los pares de fuerzas no realizan trabajo durante las traslaciones (que son movimientos sin rotación). Ahora bien, durante la rotación, $\mathbf{F}$ efectúa un trabajo que vale $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{A/B} = Fb\,d\theta$, donde $d\mathbf{r}_{A/B} = b\,d\theta$ y donde $d\theta$ es el ángulo infinitesimal girado expresado en radianes. Como $M = Fb$, se tiene

$$dU = M\,d\theta \tag{7.2}$$

El trabajo del par será positivo si M tiene el mismo sentido que $d\theta$ (horario, en este caso) y negativo si el sentido de M es opuesto al de rotación. El trabajo total de un par de fuerzas en una rotación finita en su propio plano será

$$U = \int M\,d\theta$$

El trabajo es una magnitud escalar cuyas dimensiones son las de una fuerza por una distancia. En unidades SI, la unidad de trabajo es el *joule* (J), que es el trabajo realizado por una fuerza de un newton cuyo punto de aplicación se desplace una distancia de un metro en la misma dirección de la fuerza; es decir, 1 J = (1 N) x (1 m), o sea 1 J = 1 N · m. Dimensionalmente, el trabajo de una fuerza y el momento de una fuerza son iguales, pero físicamente se trata de magnitudes muy diferentes. Obsérvese que el trabajo es un escalar en que interviene el producto de una fuerza por una distancia, ambas medidas a lo largo de una misma dirección, mientras que el momento es un vector que entraña el producto de una fuerza por una distancia medida en una dirección perpendicular a la fuerza. Para diferenciar perfectamente ambas magnitudes y evitar toda confusión, los momentos los expresamos mediante N · m y el trabajo lo expresamos exclusivamente en joules (J).

(c) Trabajo virtual. Consideremos ahora una partícula cuya posición de equilibrio esté determinada por las fuerzas que se ejercen sobre ella. Cualquier desplazamiento elemental $\delta\mathbf{r}$ imaginable que la separe de su posición de equilibrio recibe el nombre de *desplazamiento virtual*. El adjetivo *virtual* se emplea para indicar que tal desplazamiento no existe realmente, sino que sólo lo imaginamos al objeto de comparar varias posiciones de equilibrio posibles en el proceso de seleccionar la correcta. El trabajo realizado por una fuerza cualquiera $\mathbf{F}$ que se ejerza sobre la partícula durante el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{r}$ recibe el nombre de *trabajo virtual* y es

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \qquad \text{o sea} \qquad \delta U = F\delta s \cos\alpha$$

donde α es el ángulo que forman $\mathbf{F}$ y $\delta\mathbf{r}$ y δs es el módulo de $\delta\mathbf{r}$. La diferencia entre $d\mathbf{r}$ y $\delta\mathbf{r}$ es que $d\mathbf{r}$ se refiere a un cambio infinitesimal en un movimiento real y puede integrarse, mientras que $\delta\mathbf{r}$ se refiere a un movimiento infinitesimal virtual, o supuesto, y no puede integrarse. Matemáticamente, ambas cantidades son infinitésimos de primer orden.

Un desplazamiento virtual puede también serlo una rotación $\delta\theta$ de un cuerpo. Según la ecuación 7.2, el trabajo virtual realizado por un par de fuerzas de momento M en una rotación virtual $\delta\theta$ será $\delta U = M\,\delta\theta$.

La fuerza $\mathbf{F}$ o el momento M puede considerarse que permanecen constantes durante cualquier desplazamiento virtual infinitesimal. Si se tiene en cuenta la variación del módulo o de la dirección de $\mathbf{F}$ o M durante ese movimiento infinitesimal, aparecen términos de orden superior que desparecen en el límite. Matemáticamente, esta consideración es la misma que nos permite despreciar el producto $dx\,dy$ cuando escribimos que $dA = y\,dx$ es el elemento de superficie definido por la curva $y = f(x)$.

7.3 EQUILIBRIO

Ahora vamos a expresar las condiciones de equilibrio utilizando el concepto de trabajo virtual, en primer lugar para una partícula, después para un cuerpo rígido aislado y, por último, para un sistema de cuerpos rígidos conectados.

(a) Equilibrio de una partícula. Consideremos la partícula, o un cuerpo muy pequeño, de la figura 7.5 cuya posición de equilibrio resulta de la acción de las fuerzas que le ejercen los resortes a los cuales está unido. Si la masa de la partícula tiene un valor a considerar, el peso mg habrá que incluirlo entre las fuerzas. Para un desplazamiento virtual, o supuesto, $\delta\mathbf{r}$ de la partícula desde su posición de equilibrio, el trabajo virtual total efectuado sobre ella será

$$\delta U = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_3 \cdot \delta\mathbf{r} + \ldots = \Sigma\,\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}$$

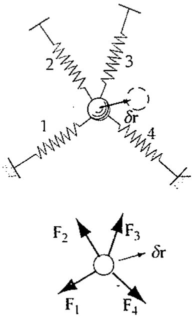


Figura 7.5

Expresemos ahora $\Sigma\mathbf{F}$ en función de sus componentes escalares y $\delta\mathbf{r}$ en función de sus componentes escalares virtuales según las direcciones coordenadas; podremos escribir

$$\begin{aligned} \delta U = \Sigma\,\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} &= (\mathbf{i}\Sigma F_x + \mathbf{j}\Sigma F_y + \mathbf{k}\Sigma F_z) \cdot (\mathbf{i} \cdot \delta x + \mathbf{j} \cdot \delta y + \mathbf{k} \cdot \delta z) \\ &= \Sigma F_x \delta x + \Sigma F_y \delta y + \Sigma F_z \delta z = 0 \end{aligned}$$

Esta suma es cero, puesto que $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y también $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$. Vemos, por tanto, que la condición $\delta U = 0$ constituye otro enunciado posible de las condiciones de equilibrio de una partícula. Esta condición de que el trabajo virtual deba ser cero para que haya equilibrio tiene carácter tanto de necesaria como de suficiente, puesto que es aplicable a desplazamientos virtuales tomados uno por uno en cada una de las direcciones mutuamente perpendiculares, en cuyo caso se hace equivalente a las tres condiciones escalares de equilibrio ya conocidas.

Para el equilibrio de una partícula aislada, el principio del trabajo virtual nulo no suele simplificar este problema, ya simple de por si, puesto que $\delta U = 0$ y $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ proporcionan la misma información. Pero se ha presentado aplicado a una partícula como introducción para aplicarlo a los sistemas de partículas en la exposición que sigue.

(b) Equilibrio de un cuerpo rígido. El principio del trabajo virtual para una partícula es fácilmente ampliable a un cuerpo rígido, tratando éste como a un sistema de pequeños elementos, o partículas, rígidamente unidas entre ellas. Al ser nulo el trabajo virtual efectuado sobre cada partícula del cuerpo completo en equilibrio, resulta que será nulo el trabajo virtual efectuado sobre el cuerpo rígido completo. En el cómputo de $\delta U = 0$ figurará únicamente el trabajo virtual realizado por las fuerzas *externas*, ya que todas las fuerzas internas aparecen en parejas de fuerzas iguales, opuestas y colineales y el trabajo neto realizado por éstas en cualquier movimiento será cero.

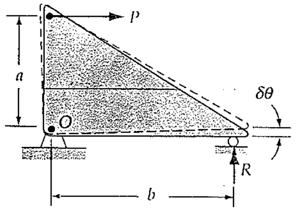


Figura 7.6

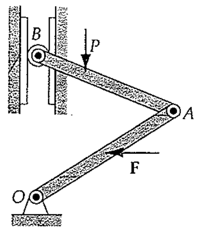
Aquí también, como en el caso de una partícula, nos encontramos con que el principio del trabajo virtual no aporta ninguna ventaja especial a la resolución de problemas de equilibrio de cuerpos rígidos. Cualquier desplazamiento virtual imaginable, definido por una traslación o una rotación, aparecerá en todos los términos de $\delta U = 0$ y, al desaparecer, nos dejará con la misma expresión que obtendríamos empleando directamente una ecuación de equilibrio de fuerzas o momentos. Esta situación se ilustra en la figura 7.6, en la que se nos pide determinar la reacción R bajo el rodillo para la placa articulada de peso despreciable sometida a una fuerza dada P. Imaginemos una pequeña rotación $\delta U = 0$ de la placa en torno a O; esa rotación es compatible con la ligadura articulada O y la tomaremos como desplazamiento virtual. El trabajo virtual de P es $-Pa\ \delta\theta$ y el de R es $+Rb\ \delta\theta$. Por consiguiente, el principio $\delta U = 0$ nos da

$$-Pa\ \delta\theta + Rb\ \delta\theta = 0$$

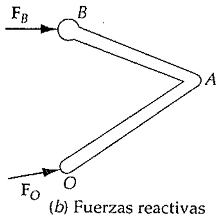
Eliminando $\delta\theta$, queda

$$Pa - Rb = 0$$

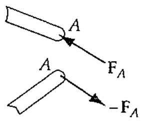
que no es sino la condición del equilibrio de los momentos respecto al punto O. Por tanto, nada se gana utilizando el principio del trabajo virtual en el caso de un único cuerpo rígido. Pero si presenta ventajas acusadas cuando se aplica a sistemas de cuerpos, tal como se expone en los párrafos que siguen.



(*a*) Fuerzas activas



(*b*) Fuerzas reactivas



(*c*) Fuerzas internas

Figura 7.7

(c) Sistemas ideales de cuerpos rígidos. Ampliemos ahora el principio del trabajo virtual a la especificación del equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos interconectados. La exposición vamos a limitarla a los llamados *sistemas ideales*, o sistemas compuestos de dos o más miembros rígidos enlazados entre si mediante conexiones mecánicas incapaces de absorber energía durante los alargamientos o acortamientos y en los que el rozamiento es lo bastante reducido para que pueda despreciarse. En la figura 7.7*a* se muestra un ejemplo sencillo de un sistema ideal en el que las dos partes que lo forman pueden moverse y la posición de equilibrio está determinada por las fuerzas externas aplicadas **P** y **F**. En los sistemas mecánicos interconectados de este tipo se identifican fuerzas actuantes de tres clases y que son las siguientes:

(1) Las *fuerzas activas* son fuerzas externas capaces de realizar trabajo virtual durante los desplazamientos virtuales posibles. En la figura 7.7*a*, **P** y **F** son fuerzas activas ya que efectúan un trabajo cuando los enlaces se mueven.

(2) Las *fuerzas reactivas* son fuerzas que actúan en los puntos donde hay ligaduras fijas en las que no tienen lugar desplazamientos virtuales en la dirección de la fuerza. En la figura 7.7*b* la fuerza horizontal $\mathbf{F}_B$ que sobre el rodillo ejerce la guía vertical no puede realizar trabajo pues el rodillo no puede desplazarse horizontalmente. La fuerza $\mathbf{F}_O$ que sobre el sistema ejerce el apoyo O es asimismo una fuerza reactiva que no realiza trabajo al no tener lugar ningún desplazamiento de O.

(3) Las *fuerzas internas* son las fuerzas que se desarrollan en las conexiones entre los miembros. Vemos que, en cualquier desplazamiento posible del sistema o de sus partes, el *trabajo neto realizado por las fuerzas internas generadas en las conexiones es nulo*. Ello se debe a que las fuerzas internas existen siempre por parejas de fuerzas iguales y opuestas, tal como se indica en la figura 7.7*c*, donde el trabajo que efectúa en la conexión A cada una de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $-\mathbf{F}_A$ siempre anulará al que efectúe la otra al ser iguales los desplazamientos.

Con la observación de que únicamente las fuerzas activas realizan trabajo durante cualquier movimiento posible del sistema, podemos enunciar como sigue el principio del trabajo virtual:

El trabajo virtual que realizan las fuerzas activas externas actuantes sobre un sistema mecánico en equilibrio es nulo para todo desplazamiento virtual compatible con las ligaduras.

Por ligadura, o vínculo, entendemos toda restricción impuesta al movimiento por los apoyos. Expresado así, el principio encuentra su máxima utilidad en los sistemas ideales. Matemáticamente, el principio se enuncia mediante la expresión

$$\delta U = 0 \tag{7.3}$$

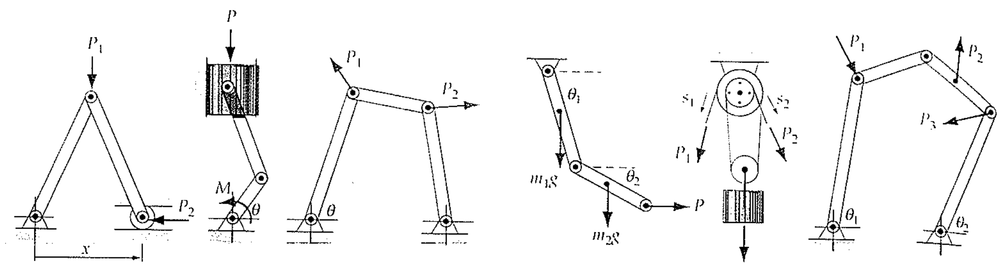
donde δU representa el trabajo virtual total realizado sobre el sistema por todas las fuerzas activas durante un desplazamiento virtual.

Solamente ahora podrán verse las verdaderas ventajas del método del trabajo virtual. Esencialmente, son dos. La primera, que no es necesario desmembrar los sistemas ideales para establecer las relaciones entre las fuerzas activas, como suele ocurrir con el método basado en las sumas de fuerzas y momentos. La segunda, que pueden determinarse directamente las relaciones entre las fuerzas activas sin hacer referencia a las fuerzas reactivas. Estas ventajas hacen particularmente útil este método para determinar la posición de equilibrio de un sistema sometido a cargas conocidas. Este tipo de problema es el contrario al de determinar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuando se especifica o está fijada su posición de equilibrio.

El método del trabajo virtual es particularmente útil para los fines mencionados, pero requiere que sea despreciable el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento interno en cualquier desplazamiento virtual. En consecuencia, cuando en un sistema mecánico sea apreciable el rozamiento interno, el método del trabajo virtual dará unos resultados erróneos si se aplica al conjunto del sistema, salvo que se tenga en cuenta el trabajo realizado por ese rozamiento.

En el método del trabajo virtual debe dibujarse un esquema que aísle el sistema considerado. A diferencia del diagrama de sólido libre, en el que se incluyen todas las fuerzas, en el esquema para el método del trabajo virtual sólo hay que incluir las fuerzas *activas*, ya que las reactivas no intervienen en la aplicación de $\delta U = 0$. A ese esquema lo denominaremos *diagrama de las fuerzas activas*. La figura 7.7*a* es un esquema de las fuerzas activas del sistema representado.

(d) Grados de libertad. El número de coordenadas independientes necesario para especificar completamente la configuración de un sistema mecánico es el llamado número de *grados de libertad* de ese sistema. En la figura 7.8*a* se representan tres ejemplos de sistemas de un grado de libertad, en los que sólo se necesita una coordenada para determinar la posición de cada una de las partes del sistema. Esa coordenada puede ser una longitud o un ángulo. En la figura 7.8*b* se representan tres ejemplos de sistemas de dos grados de libertad, en los



(a) Ejemplos de sistemas de un grado de libertad (b) Ejemplos de sistemas de dos grados de libertad

Figura 7.8

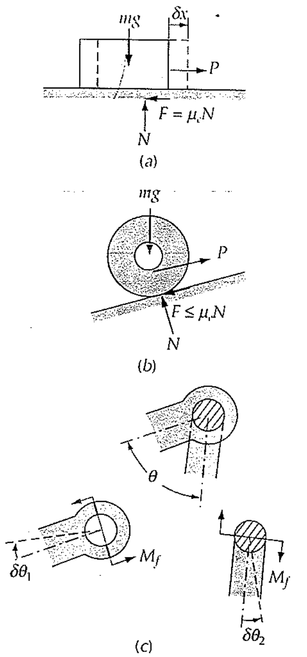


Figura 7.9

que se necesitan dos coordenadas independientes para determinar la configuración del sistema. Añadiendo más barras al sistema articulado de la ilustración derecha, no existe límite al número de grados de libertad que pueden introducirse.

El principio del trabajo virtual, $\delta U = 0$, puede aplicarse tantas veces como grados de libertad haya, de manera que en cada aplicación se hace variar únicamente una de las coordenadas independientes y las demás se mantienen constantes. Aquí trataremos sólo de los sistemas de un grado de libertad.

(e) Sistemas con rozamiento; rendimiento mecánico. Cuando en un sistema mecánico hay rozamiento por deslizamiento en cantidad apreciable se dice que el sistema es "real". En estos sistemas, parte del trabajo positivo realizado sobre el sistema por las fuerzas activas exteriores (trabajo recibido) se disipa en forma de calor generado por el trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento cinético durante el movimiento del sistema. Siempre que haya deslizamiento de una superficie de contacto respecto a otra, la fuerza de rozamiento realizará un trabajo negativo, ya que su sentido es siempre opuesto al del movimiento del cuerpo sobre el que actúa. Así, la fuerza de rozamiento cinético $\mu_c N$, actuante sobre el bloque deslizante de la figura 7.9*a*, realiza sobre el bloque un trabajo igual a $-\mu_c N x$ durante el desplazamiento x. En un desplazamiento virtual δx, la fuerza de rozamiento actuante sobre la rueda de la figura 7.9*b* no trabaja si la rueda no se desliza durante la rodadura. En la figura 7.9*c*, el momento M_f respecto al centro de la articulación de todas la fuerzas de rozamiento actuantes en las superficies de contacto efectuará un trabajo negativo en todo movimiento de rotación relativo entre las dos partes. Así pues, si se produce un desplazamiento virtual $\delta\theta$, entre las dos partes, formado por sus desplazamientos particulares $\delta\theta_1$ y $\delta\theta_2$ indicados, el trabajo negativo efectuado es $-M_f\,\delta\theta_1 - M_f\,\delta\theta_2 = -M_f(\delta\theta_1 + \delta\theta_2)$, o simplemente $-M_f\,\delta\theta$. Para cada una de las partes, M_f tiene el sentido que se opone al movimiento relativo. El trabajo negativo efectuado por las fuerzas de rozamiento cinético no puede recuperarse, ya que todo él se disipa en calor.

En otro lugar de este apartado vimos que una de las principales ventajas del método del trabajo virtual es que permite analizar un sistema completo de miembros conectados sin considerarlos por separado. Pero si en un sistema el rozamiento interno es apreciable, se hace necesario desmembrarlo para determinar las fuerzas de rozamiento. En tales casos, la utilidad del método del trabajo virtual es sólo limitada.

A causa de la pérdida de energía por rozamiento, el trabajo útil realizado por una máquina es siempre inferior al trabajo recibido por la misma. El cociente entre estos dos trabajos es el *rendimiento mecánico e*; es decir

$$e = \frac{\text{Trabajo útil realizado por la máquina}}{\text{Trabajo recibido por la máquina}}$$

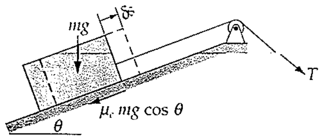


Figura 7.10

El rendimiento mecánico de las máquinas simples de un solo grado de libertad y funcionamiento uniforme puede determinarse por el método del trabajo calculando el numerador y el denominador de la expresión de e durante un desplazamiento virtual. Como ejemplo, consideremos el bloque que se hace subir por la pendiente de la figura 7.10. Para el desplazamiento virtual indicado δs, el trabajo útil es el necesario para hacer subir el bloque, o sea, $mg\,\delta s \operatorname{sen}\theta$, y el trabajo recibido es $T\,\delta s = (mg \operatorname{sen}\theta + \mu_c\,mg\cos\theta)\,\delta s$. El rendimiento del plano inclinado será, pues,

$$e = \frac{mg\,\delta s \operatorname{sen}\theta}{mg(\operatorname{sen}\theta + \mu_c\cos\theta)\,\delta s} = \frac{1}{1 + \mu_c\cot\theta}$$

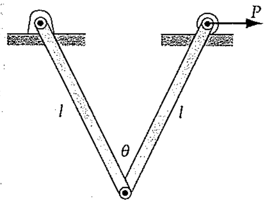
Como segundo ejemplo, consideremos el gato de husillo descrito en el apartado 6.5 y representado en la figura 6.5. La ecuación 6.3 da el momento M necesario para elevar la carga W, en donde el tornillo tiene un radio medio r y un ángulo de hélice α, siendo $\phi = \operatorname{arctg}\mu_c$ el ángulo de rozamiento. En una pequeña rotación $\delta\theta$ del tornillo, el trabajo recibido es $M\,\delta\theta = Wr\,\delta\theta\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\phi)$. El trabajo útil es el necesario para elevar la carga, o sea, $Wr\,\delta\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha$, por lo que el rendimiento del gato resulta ser

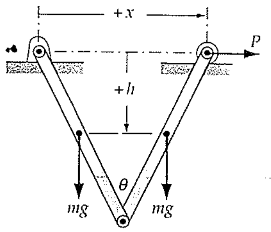
$$e = \frac{Wr\,\delta\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha}{Wr\,\delta\theta\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\phi)} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,(\alpha+\phi)}$$

A medida que el rozamiento disminuye, ϕ se hace más pequeño y el rendimiento tiende a la unidad.

PROBLEMA TIPO 7.1

Cada una de las dos barras uniformes articuladas tiene una masa m y una longitud l y está soportada y cargada como se muestra. Para una fuerza dada P, determinar el ángulo θ en el equilibrio.





Solución. En el diagrama de las fuerzas activas de este sistema de dos miembros, que se representa, se incluye el peso de cada barra mg además de la fuerza P. Todas las demás fuerzas actuantes externamente son fuerzas reactivas que no trabajan en un desplazamiento virtual δx y, por tanto, no se representan.

El principio del trabajo virtual requiere que el trabajo total de todas las fuerzas activas externas sea cero en cualquier desplazamiento virtual compatible con las ligaduras. Es decir, para un movimiento δx el trabajo virtual es

① $[\delta U = 0]$ $$P\ \delta x + 2mg\ \delta h = 0$$

Ahora expresamos cada uno de esos desplazamientos virtuales en función de la variable θ, que es la cantidad buscada. O sea,

$$x = 2l \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \qquad \text{y} \qquad \delta x = l \cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

② Análogamente,

$$h = \frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{y} \qquad \delta h = -\frac{l}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

Al aplicar estos valores en la ecuación del trabajo virtual resulta

$$Pl\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta - 2mg\frac{l}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\delta\theta = 0$$

de donde

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{2P}{mg} \qquad \text{o sea} \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{2P}{mg} \qquad \textit{Resp.}$$

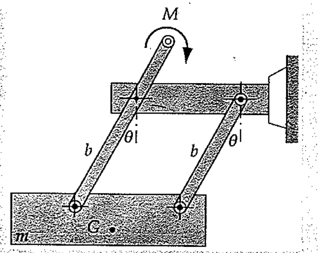
Para llegar a este resultado aplicando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos, sería necesario desmembrar la estructura y tener en cuenta todas las fuerzas que actúan en cada miembro. En la resolución por el método del trabajo virtual intervienen operaciones más sencillas.

① **Adviértase que con *x* positiva hacia la derecha, δ*x* es también positiva hacia la derecha, que es el sentido de *P*, y el trabajo virtual es *P*(+ δ*x*). Con *h* positiva hacia abajo, ∂*h* es también positiva hacia abajo, que es el sentido de *mg*, y la expresión matemática correcta del trabajo virtual es mg(+ δ*h*). Cuando, en el paso siguiente, expresamos δ*h* en función de δθ, resulta que δ*h* tiene signo negativo, poniendo la expresión matemática acorde con la observación del hecho físico de que el peso *mg* realiza un trabajo negativo cuando cada centro de masa asciende al aumentar *x* y θ.**

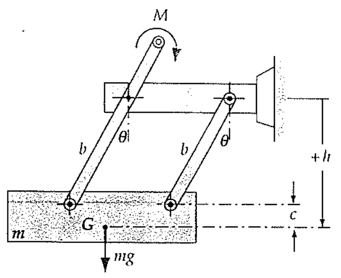
② **δ*h* y δ*x* se obtienen mediante las mismas reglas matemáticas de diferenciación que *dh* y *dx*.**

PROBLEMA TIPO 7.2

Se lleva la masa m a una posición de equilibrio aplicando el par de momento M al extremo de una de las dos barras paralelas articuladas de la manera indicada. Las masas de las barras son despreciables y se supone que no hay rozamientos. Determinar la expresión del ángulo θ que en el equilibrio forman las barras con la vertical para un valor dado de M. Examínese la posibilidad de resolver este problema aplicando las ecuaciones de equilibrio.



Solución. En el diagrama de las fuerzas activas aparecen el peso mg, aplicado en el centro de masa G, y el momento M en el extremo de la barra. No hay otras fuerzas activas ni momentos externos que realicen trabajo sobre el sistema durante una variación del ángulo θ.



La posición vertical del centro de masa G se define por la distancia h por debajo de la linea horizontal de referencia y vale $h = b\cos\theta + c$. El trabajo efectuado por mg en un movimiento δh en el sentido de mg es

$$\begin{aligned} +\,mg\ \delta h &= mg\ \delta(b\cos\theta + c) \\ &= mg(-\,b \operatorname{sen}\theta - \delta\theta + 0) \\ &= -\,mgb \operatorname{sen}\theta\ \delta\theta \end{aligned}$$

① El signo negativo indica que el trabajo es negativo para un valor positivo de $\delta\theta$. La constante c desaparece porque su derivada es cero.

Midiendo θ positivamente en el sentido horario, $\delta\theta$ será asimismo positiva en el sentido horario. Así pues, el trabajo efectuado por el par horario M es $+M\ \delta\theta$. Llevando estos valores a la ecuación del trabajo virtual resulta

$[\delta U = 0]$ $$M\ \delta\theta + mg\ \delta h = 0$$

que da

$$M\ \delta\theta = mgb \operatorname{sen}\theta\ \delta\theta$$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{M}{mgb} \qquad \textit{Resp.}$$

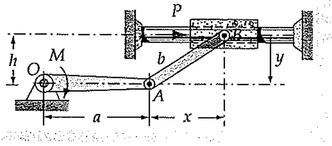
Como sen θ no puede ser mayor que uno, vemos que M no puede ser mayor que mgb para que haya equilibrio.

La ventaja del método del trabajo virtual para la resolución de este problema resulta patente si examinamos lo que surgiría si se aplicaran las ecuaciones de equilibrio. En este caso, habría que dibujar el diagrama de sólido libre de cada una de las tres partes móviles e incluir en ellos las reacciones internas en las articulaciones. Para llevar a cabo estas operaciones, tendríamos que incluir en el análisis la posición horizontal de G respecto a los puntos de sujeción de las dos barras, pese a que la referencia a esa posición desaparecería al resolver las ecuaciones. La conclusión es que el método del trabajo virtual aplicado a este problema nos lleva a tratar directamente con la causa y el efecto, sin que intervengan cantidades irrelevantes.

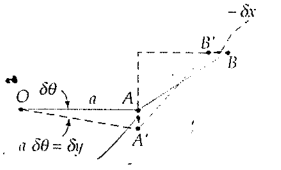
① Aquí también, como en el problema tipo 7.1, somos matemáticamente coherentes con nuestra definición de trabajo y vemos que el signo algebraico de la expresión resultante concuerda con la variación física.

PROBLEMA TIPO 7.3

Para la manivela OA en la posición horizontal representada, determinar la fuerza P que aplicada al manguito deslizante impida que OA gire bajo la acción del par de momento M. Despréciense las masas de las piezas móviles.



Solución. El esquema dado hace de diagrama de las fuerzas activas del sistema. Las demás fuerzas son todas fuerzas internas o fuerzas reactivas en las ligaduras que no efectúan trabajo.



Como desplazamiento virtual tomaremos una pequeña rotación horaria de ángulo $\delta\theta$ de la manivela OA y determinaremos los correspondientes trabajos virtuales realizados por M y P. Desde la posición horizontal de la manivela, esa rotación produce un desplazamiento descendente de A que vale

① $$\delta y = a\ \delta\theta$$

donde, por supuesto, $\delta\theta$ se expresa en radianes.

En el triángulo rectángulo de la derecha, la biela AB es la hipotenusa de valor constante y podemos escribir

$$b^2 = x^2 + y^2$$

Diferenciando ahora esta expresión se tiene

② $$0 = 2x\ \delta x + 2y\ \delta y \qquad \text{o sea} \qquad \delta x = -\frac{y}{x}\,\delta y$$

Entonces,

$$\delta x = -\frac{y}{x}a\ \delta\theta$$

y la ecuación del trabajo virtual se convierte en

③ $$[\delta U = 0] \qquad M\ \delta\theta + P\ \delta x = 0 \qquad M\ \delta\theta + P\left(-\frac{y}{x}\,a\ \delta\theta\right) = 0$$

$$P = \frac{Mx}{ya} = \frac{Mx}{ha}$$ *Resp.*

Volvemos a ver que la aplicación del método del trabajo virtual genera una relación directa entre la fuerza activa P y el momento M sin la intervención de otras fuerzas irrelevantes a esa relación. La resolución mediante las ecuaciones de equilibrio, aunque bastante sencilla en este caso, requeriría tener en cuenta al principio todas las fuerzas para eliminar después las no pertinentes.

① Obsérvese que el desplazamiento *a* $\delta\theta$ del punto *A* no sería igual a δy si la manivela *OA* no estuviera horizontal.

② La longitud *b* es constante, por lo que $\delta b = 0$. Obsérvese que el signo negativo nos dice simplemente que si una variación es positiva, la otra debe ser negativa..

③ También podríamos haber dado a la manivela un giro virtual antihorario, lo que simplemente habría invertido los signos de todos los términos.

PROBLEMAS

(Salvo indicación de lo contrario, en los problemas que siguen se supondrá que el trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento es despreciable.)

Problemas introductorios

7.1 La masa de la barra uniforme de longitud l es m y la de la barra de longitud $2l$ es $2m$. Para una fuerza dada P, determinar el ángulo θ en el equilibrio.

Resp. $\theta = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{4P}{mg}\right)$

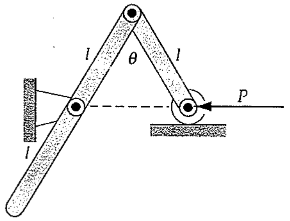


Figura problema 7.1

7.2 El sacacorchos de la figura puede generar grandes fuerzas merced al mecanismo de tornillo y coronas dentadas. Si el radio medio de los dientes de las coronas es 12 mm, hallar la fuerza R que se ejerce en el tapón para unas fuerzas dadas P aplicadas a los mangos.

7.3 Determinar el momento M del par necesario para mantener el equilibrio bajo un ángulo θ. Las barras uniformes tienen cada una una masa m y una longitud l.

Resp. $M = mgl \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

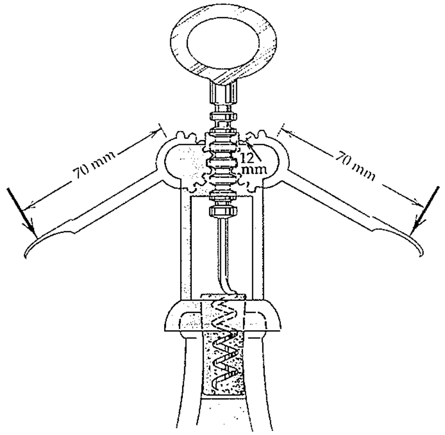


Figura problema 7.2

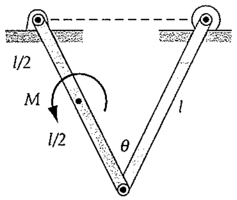


Figura problema 7.3

7.4 Hallar la fuerza Q ejercida en el papel por la taladradora de papel del problema 4.87 cuya figura se reproduce.

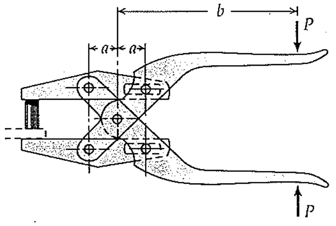


Figura problema 7.4

7.5 Determinar el momento M del par que se ejerce sobre la palanca accionadora del volquete, necesario para equilibrar la carga de masa m con centro de masa en G cuando el ángulo de inclinación es θ. El polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

Resp. $M = mg(b \cos\theta - a \operatorname{sen}\theta)$

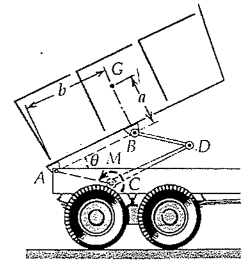


Figura problema 7.5

7.6 Para el trinquete articulado del problema 4.130, cuya figura se repite, hallar la fuerza de agarre C con una fuerza aplicada $P = 120$ N para $\theta = 2°$ y $\theta = 10°$.

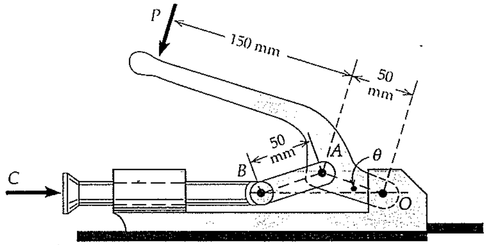


Figura problema 7.6

7.7 En el torno manual que eleva la carga de 100 kg, 25 vueltas del manubrio del sin fin produce una vuelta del tam-

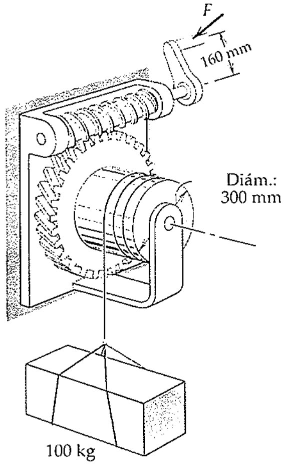


Figura problema 7.7

bor. Suponiendo que la pérdida energética por rozamiento sea del 40 por ciento, calcular la fuerza F a ejercer perpendicularmente al mango del manubrio para elevar la carga.

Resp. $F = 61{,}3$ N

7.8 ◆¿Qué fuerza P hace falta para mantener en la posición representada la puerta de tres paneles, estando el central inclinado 45°? La masa de cada panel es m y puede despreciarse el rozamiento en las guías (trazo discontinuo) de los rodillos.

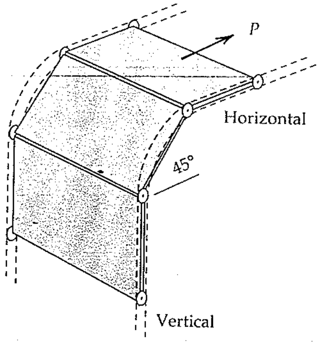


Figura problema 7.8

Problemas representativos

7.9 El reductor de velocidad tiene una relación de engranaje de 40:1. Con un par de entrada $M_1 = 30$ N · m, se mide un par de salida $M_2 = 1180$ N · m. Hallar el rendimiento mecánico e del sistema.

Resp. $c = 0{,}983$

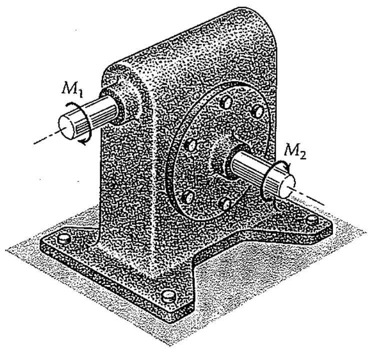


Figura problema 7.9

7.10 El resorte de constante k está sin alargar cuando $\theta = 0$. Deducir la expresión de la fuerza P necesaria para deformar el sistema hasta un ángulo θ. La masa de las barras es despreciable.

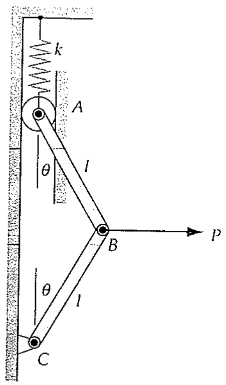


Figura problema 7.10

7.11 Por cada unidad de longitud que se desplaza el extremo libre de la cuerda en la dirección de la fuerza aplicada P, la carga de 100 kg se desplaza un cuarto de unidad. Si el rendimiento mecánico del polipasto es de 0,75, calcular la fuerza P necesaria para elevar la carga y la fuerza P' necesaria para bajarla.

Resp. $P = 327$ N $\qquad P' = 184$ N

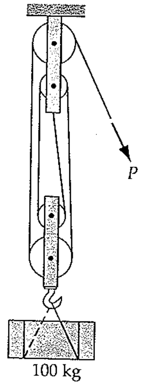


Figura problema 7.11

7.12 En el gato de husillo de la figura, 12 vueltas de la manivela hacen que el soporte suba 24 mm. Para elevar una masa de 1,5 Mg hace falta una fuerza $F = 50$ N aplicada normalmente a la manivela. Hallar el rendimiento e del husillo al elevar la carga.

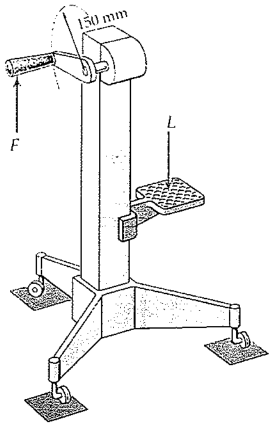


Figura problema 7.12

7.13 El gato portátil para automóviles es accionado por el cilindro hidráulico que gobierna el movimiento horizontal del extremo A de la biela dentro de la ranura horizontal. Hallar la compresión C que sufre la biela cuando soporta la carga P a una altura h.

$$Resp.\ C = P\sqrt{\left(\frac{2b}{h}\right)^2 - 1}$$

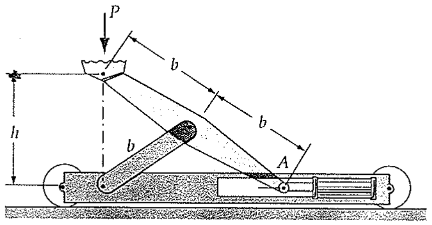


Figura problema 7.13

7.14 El par de momento M aplicado a la manivela de poco peso OA a través de su eje O hace que OA rote un ángulo θ y eleve el extremo A de la barra uniforme AB de masa m. El extremo B se apoya en la superficie horizontal a través de un pequeño rodillo. Cuando $\theta = 0$, la barra AB está horizontal. Determinar el ángulo de equilibrio para un valor dado de M. ¿Qué ocurriría si M fuese mayor que $mgr/2$?

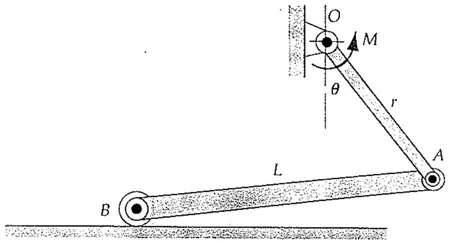


Figura problema 7.14

7.15 Determinar la fuerza F que el paciente debe aplicar tangencialmente a la llanta de la rueda para hacerla rodar cuesta arriba por la rampa de ángulo θ. La masa conjunta de silla y paciente es m. (Si es s el desplazamiento del centro de la rueda medido a lo largo de la rampa y es β el correspondiente ángulo girado por la rueda expresado en radianes, se demuestra fácilmente que $s = R\beta$ si la rueda gira sin deslizamiento.)

Resp. $F = mg\frac{R}{r}$ sen θ

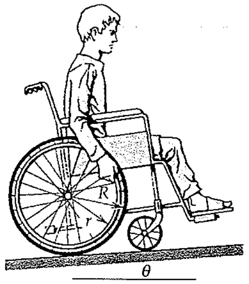


Figura problema 7.15

7.16 Determinar el momento M del par a aplicar en O para mantener el mecanismo en la posición $\theta = 30°$. Las masas del disco C, la barra OA y la barra BC son, respectivamente, m_0, m y $2m$.

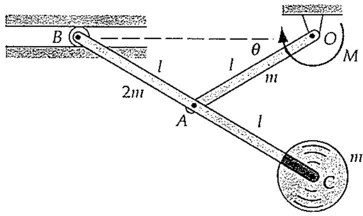
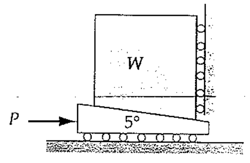


Figura problema 7.16

7.17 Calcular el rendimiento de la cuña de 5° al elevar el peso W bajo la acción de la fuerza P aplicada en la cuña. El coeficiente de rozamiento entre cuña y bloque vale 0.30.

Resp. $e = 0.220$



$\mu = 0.30$

Figura problema 7.17

7.18 La caja del camión de suministro de víveres para aviones tiene una masa m cuando está cargada y se eleva aplicando un par de momento M al extremo inferior de la barra articulada al bastidor del camión. Las ranuras horizontales permiten que se despliegue el sistema articulado al elevarse la caja. Expresar M en función de h.

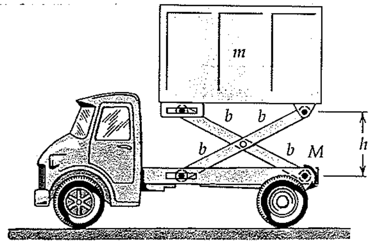


Figura problema 7.18

7.19 Las cuatro barras uniformes móviles tienen una masa m cada una y su posición de equilibrio en el plano vertical la determina la fuerza P aplicada al extremo de la inferior. Hallar el ángulo θ en el equilibrio en función de P ¿Es posible mantener una posición de equilibrio como la representada remplazando la fuerza P por un par M aplicado al extremo de la barra horizontal inferior?

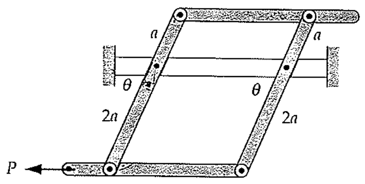


Figura problema 7.19

$$Resp.\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{mg}{P},\ \text{no}$$

7.20 La plataforma AD de la cargadora de aviones es elevada hasta la altura adecuada mediante el mecanismo representado. Hay dos juegos de sistemas articulados y cilindros hidráulicos, uno a cada lado. Los cables F que elevan la plataforma están gobernados por los cilindros hidráulicos E cuyos émbolos elevan las poleas G. Si es W el peso total de la plataforma y los contenedores, determinar la fuerza compresiva P que sufre la biela de cada émbolo ¿Depende O de la altura h? ¿Qué fuerza Q soporta cada barra en la conexión central cuando W está centrado entre A y D?

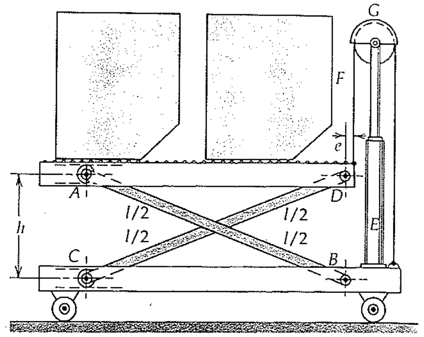


Figura problema 7.20

7.21 La posición vertical de la plataforma de masa m, soportada por las cuatro barras iguales, la gobiernan los cilindros hidráulicos AB y AC que oscilan en torno al punto A. Hallar, en función del ángulo θ, la compresión P en cada cilindro necesaria para soportar la plataforma.

$$Resp.\ P = mg\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$$

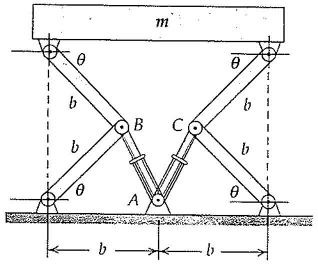


Figura problema 7.21

7.22 El pesacartas consta de un sector circular de masa m_0 suspendido de O y con centro de masa en G. El platillo y el vástago vertical AB tienen una masa m_1 y están articulados al sector en B. El extremo A está articulado a la barra uniforme AC de masa m_2, la cual está articulada a su vez a la estructura fija. La figura $OBAC$ forma un paralelogramo y el ángulo GOB es recto. Determinar la relación existente entre la masa m a medir y el ángulo θ suponiendo que $\theta = \theta_0$ cuando $m = 0$.

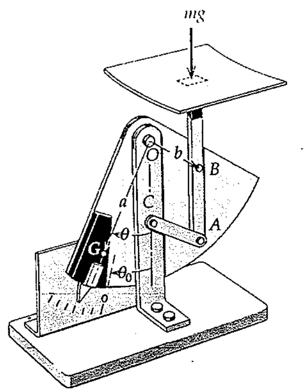


Figura problema 7.22

7.23 La posición vertical de la masa m está gobernada por el husillo roscado que conecta los nudos A y B. La variación de la separación entre A y B a cada vuelta del husillo es igual al paso de éste (avance por vuelta). Si para vencer el rozamiento en la rosca y en el cojinete de empuje del husillo hace falta un par de momento M_f, hallar la expresión del momento M del par total que debe aplicarse al husillo para elevar la carga.

Resp. $M = M_f + \dfrac{mgL}{\pi}\cot\theta$

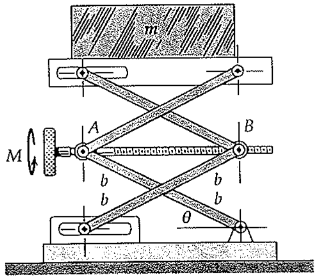


Figura problema 7.23

7.24 La pinza de un actuador de control remoto desarrolla una fuerza de agarre C consecuencia de la tracción P en la barra de mando. Expresar C en función de P para la configuración representada en que las mandíbulas están paralelas.

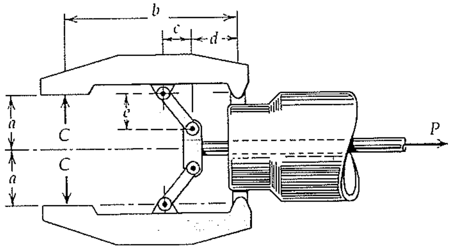
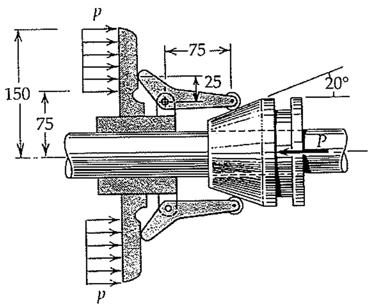


Figura problema 7.24

7.25 En la figura se representa la sección del mecanismo de accionamiento del embrague de un motor marino. La posición del manguito cónico en el eje está gobernada por la fuerza P y un leve movimiento hacia la izquierda hace que las dos palancas se apoyen contra la cara trasera de la placa de embrague, la cual origina una presión uniforme p sobre la superficie de contacto de la placa. Esta superficie es un anillo circular de radio exterior 150 mm y radio interior 75 mm. Determinar por el método del trabajo virtual la fuerza P necesaria para originar una presión de 200 kPa en la placa de embrague que puede deslizarse libremente a lo largo del manguito al que están fijos los ejes de las palancas.

Resp. $P = 1{,}286$ kN



Cotas en milímetros

Figura problema 7.25

7.26 Hallar la fuerza P que se desarrolla entre las mandíbulas del remachador del problema 4.126, cuya figura se repite aquí.

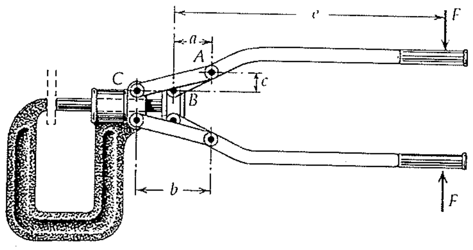


Figura problema 7.26

7.27 Determinar la fuerza P entre las mordazas de la prensilla en función del momento M del par que se ejerce en la palanca del husillo. El tornillo de éste tiene un paso L (avance por vuelta) y se desprecia el rozamiento.

$$Resp.\ P = \frac{2\pi M}{L(\text{tg}\ \theta + a/b)}$$

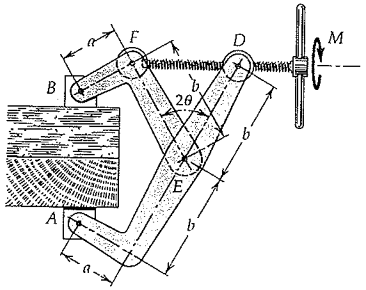


Figura problema 7.27

7.28 En la figura se representan el extremo de entrada y la garra de salida de un manipulador mecánico remoto. El sistema esta internamente articulado de modo que una vuelta completa del eje de entrada, bajo el par aplicado M, produce una variación de 2° en el ángulo de agarre θ. Calcular la compresión P que genera la garra para un par aplicado de momento $M = 20$ N · m con un ángulo $\theta = 30°$ en la posición representada. Despréciese el rozamiento.

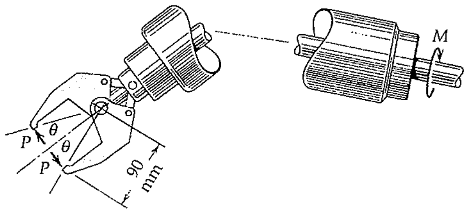


Figura problema 7.28

7.29 En la figura se representa una plataforma de carga mecánica instalada en la trasera de un camión. Su posición la regula un cilindro hidráulico que le aplica la fuerza en C. Los miembros de enlace giran alrededor de ejes fijos al chasis del camión en A, B y F. Determinar la fuerza P que aplica el cilindro para mantener la plataforma en la posición representada en la figura. Pueden despreciarse las masas de la plataforma y de la estructura frente a los 250 kg del embalaje cuyo centro de masa está en G.

Resp. $P = 3{,}5$ kN

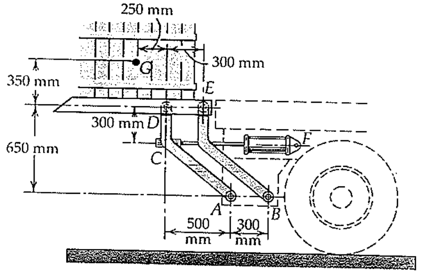


Figura problema 7.29

7.30 En el vehículo con grúa de reparaciones en lugares elevados, un grupo motor-engranaje instalado en la articulación A produce sobre ésta un par interno y mantiene el ángulo CAB exactamente igual al doble de θ cuando se eleva la carga W. Si $b_2 > b_1$, determinar el momento externo M_1 que debe aplicarse en B al brazo AB para empezar a elevar la carga. Despreciar los pesos de los dos miembros. Estudiar el trabajo efectuado sobre el sistema y justificar la inclusión del momento interno en A al aplicar la ecuación del trabajo virtual.

Resp. $M = W(b_2 - b_1) \cos \theta$

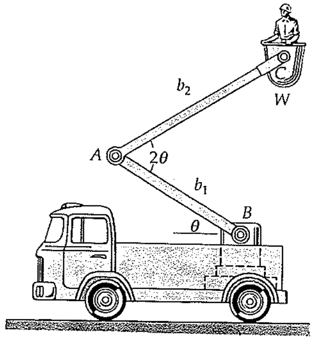


Figura problema 7.30

7.31 En la prensa de tornillo, un par de momento M aplicado a la empuñadura del tornillo aprieta la mordaza aumentando la distancia $\overline{BD}$, produciendo en consecuencia una fuerza de sujeción C. El tornillo está roscado a través del collar que puede girar alrededor del eje horizontal que pasa por D y tiene un paso (avance por revolución) de 4 mm. Suponer ausencia de rozamientos y expresar la fuerza de sujeción C en newtons en función del momento M medido en N · m para la posición $\theta = 30°$.

Resp. $M = 1120$ M (N)

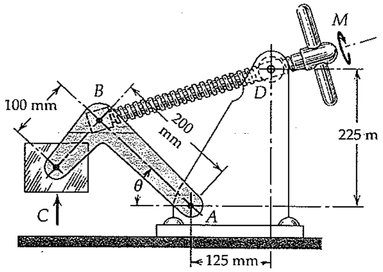


Figura problema 7.31

7.32 Determinar la fuerza Q en las cuchillas de la cizalla del problema 4.102, cuya figura se repite. (*Sugerencia*: Sustituir la fuerza de 400 N por una fuerza y un par en el centro de la rueda dentada pequeña. Hay que determinar con cuidado el desplazamiento angular absoluto del engranaje.)

Resp. $Q = 6590$ N

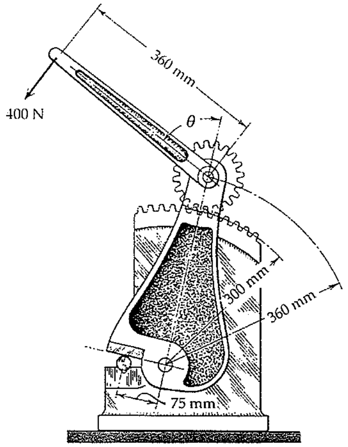


Figura problema 7.32

7.4 ENERGIA POTENCIAL Y ESTABILIDAD

En el apartado anterior hemos tratado de la configuración de equilibrio de sistemas mecánicos compuestos por miembros que individualmente se suponían perfectamente rígidos. Ahora, vamos a ampliar este método para incluir aquellos sistemas mecánicos entre cuyos miembros se encuentren miembros elásticos representables por resortes. Con este propósito, es oportuno que presentemos ahora el concepto de energía potencial, lo cual nos conducirá directamente al importante problema de la determinación de la estabilidad del equilibrio.

(a) Energía potencial elástica. El trabajo efectuado sobre un miembro elástico se almacena en el mismo y recibe el nombre de *energía potencial elástica* V_e. Esta energía es potencialmente utilizable merced al trabajo que el miembro en cuestión es capaz de realizar sobre otro cuerpo al liberarse de la compresión o tracción. Consideremos el resorte de la figura 7.11 que es comprimido por la fuerza F. Suponemos que ese resorte es elástico lineal, o sea, que la fuerza F es directamente proporcional a la deformación x. Esta relación la expresamos escribiendo $F = kx$, donde k es la *constante recuperadora* o *rigidez* del resorte. El trabajo que realiza F

sobre el resorte en un movimiento dx es $dU = F\,dx$ y, por tanto, la energía potencial elástica total que adquiere el resorte para una compresión x será el trabajo total efectuado sobre el resorte

$$V_e = \int_0^x F\,dx = \int_0^x kx\,dx$$

o sea

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{7.4}$$

Vemos, pues, que la energía potencial del resorte es igual al área de la superficie triangular comprendida entre 0 y x del diagrama de F en función de x.

Cuando la compresión del resorte varía de x_1 a x_2, el trabajo efectuado sobre el resorte es igual a la *variación* de energía potencial elástica experimentada por el resorte, es decir,

$$\Delta V_e = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

que es igual al área de la superficie trapezoidal comprendida entre x_1 y x_2.

En un desplazamiento virtual δx del resorte el trabajo virtual realizado sobre el resorte será igual a la variación virtual de su energía potencial elástica

$$\delta V_e = F\,\delta x = kx\,\delta x$$

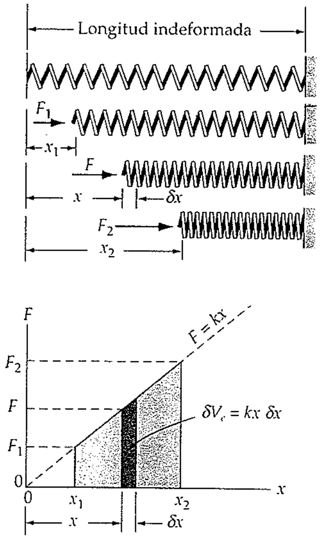


Figura 7.11

Si la compresión del resorte disminuye al disminuir su acortamiento desde $x = x_2$ a $x = x_1$, la *variación* (valor final menos valor inicial) de su energía potencial elástica será negativa. Correspondientemente, si δx es negativo, δV_e será también negativa.

Si un resorte se somete a tracción en vez de a compresión, las relaciones entre trabajo y energía son las mismas que para la compresión y, en tal caso, x representará el alargamiento del resorte y no el acortamiento. En un resorte que se alargue, la fuerza actúa también en el mismo sentido que el desplazamiento, por lo que el trabajo sobre el resorte es positivo y éste incrementa su energía potencial.

Como la fuerza actuante en el extremo móvil de un resorte es de sentido contrario a la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo al que está unido su extremo móvil, resulta que *el trabajo realizado sobre el cuerpo es igual a la variación de energía potencial cambiada de signo.*

En el caso de los resortes de torsión, que sirven para oponerse a la rotación de un árbol u otro órgano, también es posible almacenar y liberar energía potencial. Si la rigidez a la torsión, expresada en unidades de momento de un par de fuerzas por radián de torsión, es una constante K y es θ el ángulo de torsión, en radianes, el par resistente será $M = K\theta$. La energía potencial resulta ser

$$V_e = \int_0^\theta K\theta\,d\theta,$$

o sea

$$V_e = \tfrac{1}{2}K\theta^2 \tag{7.4a}$$

que es una expresión análoga a la del resorte helicoidal lineal.

La unidad de energía potencial elástica es la misma que la de trabajo; es decir, el joule (SI) en el sistema SI.

(b) *Energía potencial gravitatoria.* En el apartado anterior tratamos el trabajo de la fuerza gravitatoria actuante sobre un cuerpo o peso del cuerpo, de la misma manera que el trabajo de cualquier otra fuerza activa. Así, para un desplazamiento hacia arriba δh del cuerpo de la figura 7.12, su peso $P = mg$ realiza un trabajo negativo $\delta U = -mg\,\delta h$. Pero si el cuerpo se desplaza hacia abajo una distancia δh, si h se mide positivamente hacia abajo, el peso realizará un trabajo positivo $\delta U = +\,mg\,\delta h$.

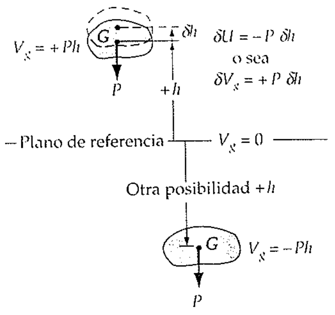


Figura 7.12

Enfoquemos ahora de otro modo la exposición anterior expresando el trabajo efectuado por la gravedad en función de la variación de energía potencial. Este procedimiento resulta de gran utilidad cuando ha de describirse un sistema mecánico en función de su energía total. La *energía potencial gravitatoria* V_g de un cuerpo se define sencillamente como el trabajo efectuado sobre el cuerpo por una fuerza igual y opuesta a su peso para llevar a dicho cuerpo hasta la posición considerada desde un plano de referencia donde la energía potencial es cero por definición. La energía potencial, por tanto, es igual al trabajo del peso cambiado de signo. Por ejemplo, cuando se eleva un cuerpo, el trabajo se convierte en una energía potencialmente disponible, puesto que el cuerpo será capaz de realizar el trabajo sobre otro cuerpo cuando retorne a su posición original más baja. Si en la figura 7.12 hacemos $V_g = 0$ para $h = 0$, a una altura h por encima del plano de referencia la energía potencial gravitatoria del cuerpo será

$$V_g = mgh \tag{7.5}$$

Si el cuerpo se encuentra a una distancia h por debajo del plano de referencia, su energía potencial gravitatoria será $-mgh$.

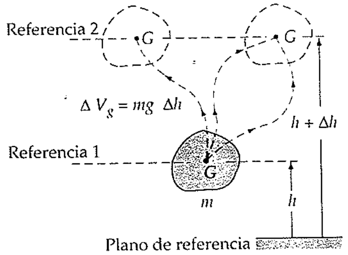


Figura 7.13

Es importante tener en cuenta que el plano de referencia en el cual se fija como nula la energía potencial es absolutamente arbitrario, por cuanto que es únicamente la *variación* de energía lo que nos interesa, y dicha variación es la misma cualquiera que sea el plano de referencia elegido. Además, la energía potencial gravitatoria es independiente del camino seguido para llegar a la altura h considerada. Así, el cuerpo de masa m de la figura 7.13 adquiere la misma energía potencial cualquiera que sea el camino seguido para trasladarse desde el plano 1 al plano 2, puesto que Δh es la misma en ambos casos. Por supuesto, medimos h con relación al centro de masa del cuerpo.

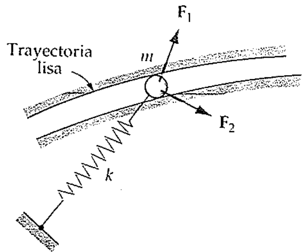
La variación virtual de energía gravitatoria es, sencillamente,

$$\delta V_g = mg\,\delta h$$

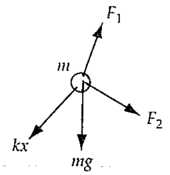
donde δh es el desplazamiento virtual hacia arriba del centro de masa del cuerpo. Cuando el centro de masa sufra un desplazamiento virtual hacia abajo, δV_g será negativa.

La unidad de energía potencial gravitatoria es la misma que la de trabajo y energía potencial elástica, es decir, el joule (J).

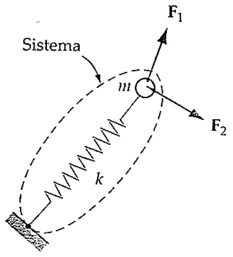
(c) *Ecuación de la energía.* Se ha hecho observar en las dos secciones precedentes que el trabajo realizado *por* un resorte *sobre* el cuerpo al que se halla unido su extremo desplazable es igual a la variación de energía potencial elástica del resorte cambiada de signo. Asimismo, el trabajo efectuado por la fuerza gravitatoria, o peso mg, es la variación de energía potencial gravitatoria cambiada de signo. Por tanto, al aplicar el principio del trabajo virtual a sistemas en los que exista algún resorte y varíe la posición vertical de alguno de sus miembros, puede sustituirse el trabajo de los resortes y el de los pesos por las respectivas variaciones de energía potencial cambiadas de signo.



(a)



Ec. 7.3: $\delta U = 0$
(b)



Ec. 7.6: $\delta U' = \delta V_e + \delta V_g = \delta V$
(c)
Figura 7.14

Teniendo presentes estas sustituciones, podemos escribir que el trabajo virtual total δU de la ecuación 7.3 es igual a la suma del trabajo $\delta U'$, efectuado por todas las fuerzas activas *distintas a fuerzas de resortes y pesos*, más el trabajo $-(\delta V_e + \delta V_g)$ efectuado por las fuerzas de los resortes y los pesos. Entonces, la ecuación 7.3 se escribirá

$$\delta U' - (\delta V_e + \delta V_g) = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \delta U' = \delta V \tag{7.6}$$

donde $V = V_e + V_g$ representa la energía potencial total del sistema. Con esta formulación un resorte se convierte en *interno* al sistema y el término δV comprende el trabajo del resorte y las fuerzas gravitatorias.

En el método del trabajo virtual es útil construir el diagrama de las fuerzas activas del sistema que se estudia. Los límites del sistema deben distinguir claramente aquellos miembros que forman parte del sistema de otros cuerpos que no forman parte del sistema. Cuando dentro de los límites del sistema estudiado hay un miembro elástico, vemos que las fuerzas de interacción entre éste y los miembro móviles a los que está unido son *internas* al sistema y no hay que representarlas porque sus efectos se tienen en cuenta en el miembro V_e. Análogamente, tampoco se representan las fuerzas gravitatorias porque su trabajo se tiene en cuenta en el término V_g.

En la figura 7.14 se ilustra la diferencia entre el empleo de las ecuaciones 7.3 y 7.6. En la parte *a* de la figura el cuerpo considerado se supone, por razones de simplicidad, que es una partícula y el desplazamiento se toma a lo largo de la trayectoria. La partícula se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas aplicadas F_1 y F_2, la fuerza gravitatoria mg, la fuerza del resorte kx y una fuerza reactiva normal. En la figura 7.14*b*, donde la partícula aparece sola y aislada, δU incluye el trabajo virtual de todas las fuerzas representadas en el diagrama de las fuerzas activas de la partícula. (Se omite la reacción normal que la guía lisa ejerce sobre la partícula porque no trabaja.) En la figura 7.14*c* el resorte está *incluido* en el sistema, y $\delta U'$ es el trabajo virtual sólo de F_1 y F_2, que son las únicas fuerzas externas que trabajan. El trabajo del peso mg se incluye en el término δV_g y el de la fuerza del resorte en δV_e.

Así pues, para los sistemas mecánicos dotados de miembros elásticos y de miembros que sufran cambios de posición, podemos enunciar nuevamente el principio del trabajo virtual en los términos siguientes:

> **El trabajo virtual efectuado por las fuerzas activas externas sobre un sistema mecánico en equilibrio es igual a la variación correspondiente a la totalidad de las energías potenciales elástica y gravitatoria del sistema para todos y cada uno de los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras.**

(d) Estabilidad del equilibrio. Consideremos ahora el caso de los sistemas en los que el movimiento va acompañado de cambios en las energías potenciales gravitatoria y elástica y en los que no hay fuerzas activas externas que realicen trabajo sobre el sistema. El mecanismo del problema tipo 7.6 es un ejemplo de sistema de esta clase. Haciendo $\delta U' = 0$ en la ecuación 7.6 del trabajo virtual, resulta

$$\delta(V_e + V_g) = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \delta V = 0 \tag{7.7}$$

En la ecuación 7.7 se expresa la condición de que la configuración de equilibrio de un sistema mecánico es tal que, para la misma, la energía potencial total V del sistema tiene un valor estacionario. Para un sistema de un grado de libertad cuya energía potencial y sus derivadas sean funciones de una única variable, por ejemplo x, que describa la configuración, la condición de equilibrio $\delta V = 0$ equivale matemáticamente a la condición

$$\frac{dV}{dx} = 0 \tag{7.8}$$

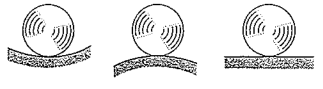


Figura 7.15

La ecuación 7.8 expresa que un sistema mecánico se encuentra en equilibrio cuando la derivada de su energía potencial es nula. En los sistemas de varios grados de libertad la derivada parcial de V respecto a cada una de las coordenadas debe ser sucesivamente igual a cero para que haya equilibrio.

La ecuación 7.8 se cumple en tres casos: cuando la energía potencial es mínima (equilibrio estable), cuando es máxima (equilibrio inestable) o cuando es constante (equilibrio inestable). En la figura 7.15 se representan tres ejemplos sencillos de dichos casos; en ella podemos ver que para la posición estable la energía potencial es evidentemente un mínimo, es máxima para la posición inestable y constante para la posición indiferente.

La naturaleza de la estabilidad de un sistema mecánico puede asimismo caracterizarse teniendo en cuenta que todo pequeño desplazamiento a partir de la posición estable da por resultado un aumento de la energía potencial y una tendencia a regresar a la posición de energía más baja. Por el contrario, un pequeño desplazamiento a partir de la posición inestable da por resultado una disminución de la energía potencial y una tendencia a separarse de la posición de equilibrio hacia otra de menor energía. En la posición indiferente, un pequeño desplazamiento en cualquier dirección no da por resultado variación de energía alguna ni tendencia al desplazamiento en ninguna dirección.

Cuando una función y sus derivadas son continuas, la derivada segunda es positiva en los puntos de máximo de la función y negativa en los de mínimo. Por tanto, podemos escribir como sigue las condiciones matemáticas de equilibrio y estabilidad de un sistema de un solo grado de libertad x:

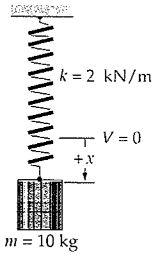
$$\begin{array}{ll} \text{Equilibrio} & \dfrac{dV}{dx} = 0 \\[2ex] \text{Estabilidad} & \dfrac{d^2V}{dx^2} > 0 \\[2ex] \text{Inestabilidad} & \dfrac{d^2V}{dx^2} < 0 \end{array} \tag{7.9}$$

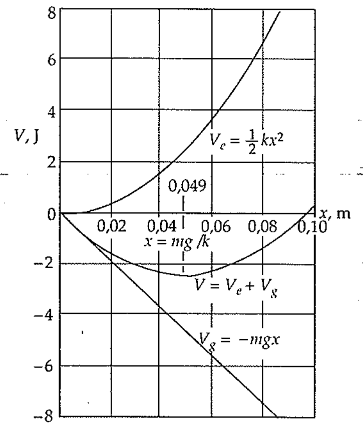
Ocasionalmente puede ocurrir que sea también cero la derivada segunda de V para la posición de equilibrio, en cuyo caso debe examinarse el signo de una derivada de orden superior para averiguar la naturaleza del equilibrio. Cuando el orden de la derivada no nula de menor orden sea par, el equilibrio será estable o inestable según que el signo de la misma sea positivo o negativo. Si el orden de la derivada no nula de menor orden es impar, el equilibrio debe clasificarse como inestable, y en tal caso la representación gráfica de V en función de x presenta un punto de inflexión en la curva para el valor correspondiente al equilibrio y en el cual la pendiente es cero.

El estudio de los criterios de estabilidad para sistemas de más de un grado de libertad precisa un desarrollo matemático más avanzado; por ejemplo, en los casos de dos variables deben emplearse desarrollos en serie de Taylor de dos variables.

PROBLEMA TIPO 7.4

El cilindro de 10 kg cuelga del resorte de constante recuperadora de 2 kN/m. Representar gráficamente la energía potencial V del sistema y demostrar que es mínima en la posición de equilibrio.





Solución. (Aunque en este sencillo problema la posición de equilibrio corresponde evidentemente al punto en que la fuerza del resorte se iguala al peso mg, procederemos como si ignorásemos este hecho con el fin de ilustrar las expresiones energéticas de la forma más sencilla.) Tomaremos como origen de energía ① potencial el plano correspondiente a la posición en la cual el resorte no está deformado.

La energía potencial elástica para una posición cualquiera x es $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ y la energía potencial gravitatoria es $-mgx$, por lo que la energía potencial total es

$$[V = V_e + V_g] \qquad V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 - mgx$$

El equilibrio tiene lugar para

$$\left[\frac{dV}{dx} = 0\right] \qquad \frac{dV}{dx} = kx - mg = 0 \qquad x = mg/k$$

Aunque en este caso sencillo sepamos que el equilibrio es estable, vamos a probarlo determinando el signo de la derivada segunda de V en la posición de equilibrio. Resulta entonces que $d^2V/dx^2 = k$, que es positiva y demuestra que el equilibrio es estable.

Sustituyendo por los valores numéricos tenemos

$$V = \tfrac{1}{2}(2000)x^2 - 10(9{,}81)x$$

expresada en joules, y el valor de x para la posición de equilibrio es

$$x = 10(9{,}81)/2000 = 0{,}049 \text{ m} \qquad \text{o sea} \qquad 49 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

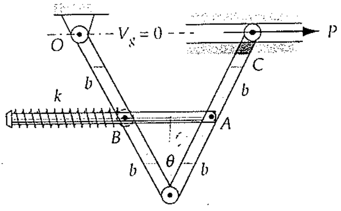
Calculando V para distintos valores de x se obtiene la representación gráfica ② adjunta. El valor mínimo de V se tiene para $x = 0{,}049$ m donde $dV/dx = 0$ y d^2V/dx^2 es positiva.

① **La elección del plano de referencia es arbitraria, pero la presente simplifica las operaciones.**

② **Podríamos haber tomado planos de referencia diferentes para V_e y V_g sin alterar los resultados. Esta variación se habría limitado a desplazar hacia arriba o hacia abajo las curvas de V_e y V_g sin alterar la posición del mínimo de V.**

PROBLEMA TIPO 7.5

Las dos barras uniformes, cada una de masa m, se encuentran en el plano vertical enlazadas y vinculadas como se representa. Cuando el ángulo θ que forman las barras aumenta al aplicar la fuerza horizontal P, la varilla sin peso, conectada en A y que pasa por el manguito giratorio B, comprime el resorte de constante recuperadora k. Sabiendo que para θ = 0 el resorte está indeformado, determinar la fuerza P para la cual el sistema estará en equilibrio bajo un ángulo θ.



Solución. La misma figura del enunciado nos sirve como diagrama de las fuerzas activas del sistema. El acortamiento x es la distancia que A se ha separado de B, que es $x = 2b \operatorname{sen} \theta/2$. Así pues, la energía potencial elástica del resorte es

$$[V_e = \tfrac{1}{2}kx^2] \qquad V_e = \tfrac{1}{2}k\left(2b \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^2 = 2kb^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

Colocando por comodidad el origen de energía potencial gravitatoria en un plano que pasa por el apoyo O, la expresión de V_g queda

$$[V_g = mgh] \qquad V_g = 2mg\left(-b\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

La distancia entre O y C es $4b \operatorname{sen} \theta/2$, por lo que el trabajo virtual que efectúa P es

$$\delta U' = P\,\delta\left(4b \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) = 2Pb\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

La ecuación del trabajo virtual nos dará

$$[\delta U' = \delta V_e + \delta V_g] \quad 2Pb\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta = \delta\left(2kb^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) + \delta\left(-2mgb\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2kb^2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta + mgb\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

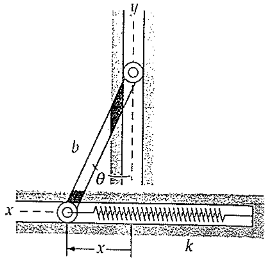
Finalmente, simplificando resulta

$$P = kb\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \tfrac{1}{2}mg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \qquad \textit{Resp.}$$

Si se nos pidiera calcular el valor de θ para el equilibrio con un valor de la fuerza P dado, tendríamos dificultades para despejar θ. Si el problema fuese numérico podría recurrirse a la resolución aproximada utilizando una representación gráfica de la suma de las dos funciones de θ y determinar el valor de éste para el cual dicha suma fuera igual a P.

PROBLEMA TIPO 7.6

Los extremos de una barra uniforme de masa m corren libremente por las guías horizontal y vertical según se indica. Examinar las condiciones de estabilidad correspondientes a las posiciones de equilibrio. El resorte de constante recuperadora k está indeformado cuando x = 0.



Solución. El sistema se compone del resorte y de la barra. Como no hay fuerzas ① activas externas, la misma figura puede servir como diagrama de las fuerzas activas. Tomaremos el eje x como origen de energía potencial gravitatoria. Para la posición desplazada, las energías potenciales elástica y gravitatoria son

① Sin fuerzas activas externas no hay término $\delta U'$, y $\delta V = 0$ equivale a $dV/d\theta = 0$.

② Téngase cuidado para no pasar por alto la solución $\theta = 0$ correspondiente a sen $\theta = 0$.

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kb^2 \operatorname{sen}^2 \theta \qquad \text{y} \qquad V_g = mg\frac{b}{2}\cos\theta$$

La energía potencial total es pues

$$V = V_e + V_g = \tfrac{1}{2}kb^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{2}mgb \cos\theta$$

El equilibrio tiene lugar para $dV/d\theta = 0$, de forma que

$$\frac{dV}{d\theta} = kb^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \tfrac{1}{2}mgb \operatorname{sen}\theta = (kb^2 \cos\theta - \tfrac{1}{2}mgb) \operatorname{sen}\theta = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación corresponden a

② $$\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \frac{mg}{2kb}$$

Determinemos ahora la estabilidad examinando el signo de la derivada segunda de V para cada una de las dos posiciones de equilibrio. La derivada segunda es

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kb^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - \tfrac{1}{2}mgb\cos\theta$$
$$= kb^2(2\cos^2\theta - 1) - \tfrac{1}{2}mgb\cos\theta$$

Solución I. sen $\theta = 0$, $\theta = 0$.

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kb^2(2-1) - \tfrac{1}{2}mgb = kb^2\left(1 - \frac{mg}{2kb}\right)$$
$$= \text{Positivo (estable)} \quad \text{si } k > mg/2b$$
$$= \text{Negativo (inestable)} \quad \text{si } k < mg/2b \qquad \textit{Resp.}$$

Entonces, si el resorte es lo bastante rígido, la barra regresará a la posición vertical aun cuando no exista fuerza en el resorte en esa posición. ③

Solución II. $\cos\theta = \dfrac{mg}{2kb}$, $\theta = \text{arcos}\,\dfrac{mg}{2kb}$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kb^2\left(2\left[\frac{mg}{2kb}\right]^2 - 1\right) - \tfrac{1}{2}mgb\left(\frac{mg}{2kb}\right) = kb^2\left(\left[\frac{mg}{2kb}\right]^2 - 1\right) \qquad \textit{Resp.}$$

Como el coseno es siempre menor que uno, vemos que esta solución queda limi- ④ tada al caso en que $k > mg/2b$, que hace negativa la segunda derivada de V. Por tanto, el equilibrio dado por la solución II no es nunca estable. Si es $k < mg/2b$ ya no existirá la solución II, puesto que el resorte será excesivamente blando para mantener el equilibrio cuando θ tenga un valor comprendido entre 0° y 90°.

① Este resultado no hubiera podido preverse sin el estudio matemático de la estabilidad.

② De nuevo vemos que sin la ayuda del estudio matemático de la estabilidad podríamos haber supuesto erróneamente que la barra pudiera alcanzar el reposo en una posición de equilibrio estable para algún valor de θ comprendido entre 0° y 90°.

PROBLEMAS

(En los problemas siguientes se supondrá que el trabajo negativo realizado por las fuerzas de rozamiento es despreciable.)

Problemas introductorios

7.33 El pequeño cilindro de masa m y radio r está confinado a rodar sobre la superficie circular de radio R. Siguiendo los métodos expuestos en este apartado, demostrar que el cilindro se encuentra en equilibrio inestable en el caso (a) y en equilibrio estable en el caso (b).

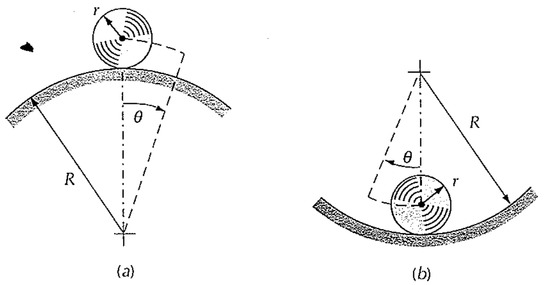


Figura problema 7.33

7.34 La placa rectangular uniforme está engoznada a un eje horizontal que pasa por el punto O. Comprobar las condiciones de estabilidad para las dos posiciones de equilibrio.

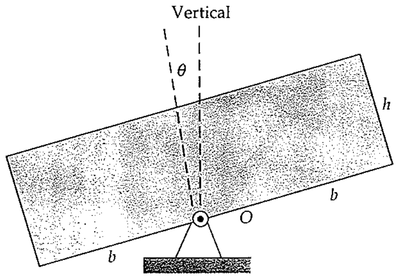


Figura problema 7.34

7.35 La energía potencial de un sistema mecánico está dado por $V = 6x^4 - 3x^2 + 5$, donde x es la coordenada de posición que define la configuración del sistema de un solo grado de libertad. Determinar los valores de x para las posiciones de equilibrio y la naturaleza de éstas.

Resp. $x = 0$, inestable; $x = \frac{1}{2}$, estable; $x = -\frac{1}{2}$, estable

7.36 La barra uniforme de masa m y longitud l gira alrededor de un eje horizontal, en su extremo O, y está unida a un resorte de torsión que le ejerce un par $M = K\theta$, donde K es la rigidez a la torsión del resorte, en unidades de momento por radián, y θ es la desviación angular, en radianes, de la barra respecto a la horizontal. Hallar el valor máximo de l que asegure un equilibrio estable para $\theta = 0$.

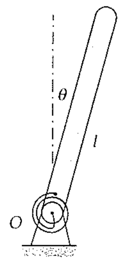


Figura problema 7.36

7.37 En la figura se representa la sección de una puerta de ventilación, uniforme, de 60 kg, articulada por su borde superior en O. La puerta está gobernada por el cable accionado por resorte que pasa por la pequeña polea situada en A. El resorte tiene una constante recuperadora de 160 N por metro de alargamiento y su deformación es nula cuando $\theta = 0$. Determinar el ángulo θ en el equilibrio.

Resp. $\theta = 52{,}7°$

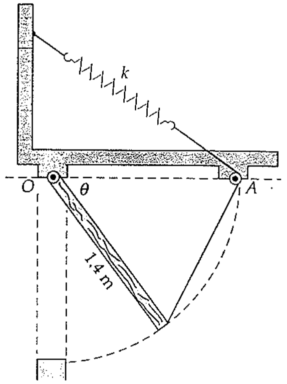


Figura 7.37

7.38 La barra AB de masa m está soportada por el rodillo A y la barra sin peso CB. Demostrar que el sistema es inestable en la posición de equilibrio representada, en la que CB está vertical.

Problemas representativos

7.39 Cuando $u = 0$, el resorte de constante k está indeformado. Al aumentar u, la varilla se desliza a través del collar que puede girar alrededor de A y comprime el resorte entre el collar y el extremo de la varilla. Determinar la fuerza P necesaria para originar un desplazamiento dado u. Suponer que no hay rozamiento y que la varilla no pesa.

$$\textit{Resp. } P = \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + u^2}}\right)ku$$

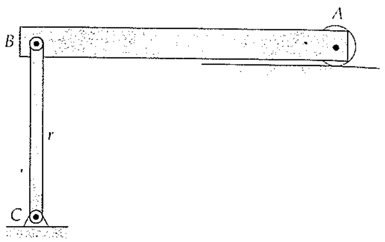


Figura 7.38

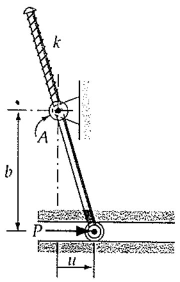


Figura problema 7.39

7.40 El cilindro de masa M y radio R rueda sin deslizamiento sobre la superficie circular de radio $3R$. Sujeto al cilindro hay un cuerpo de pequeñas dimensiones de masa m. Determinar la relación que deben guardar M y m para que el cuerpo se halle en equilibrio estable en la posición representada.

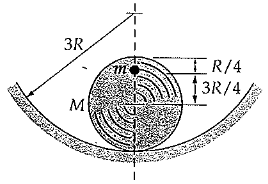


Figura problema 7.40

7.41 En la figura se representa la sección de una puerta de ventilación, cuya masa m tiene su centro en G y está articulada en O a un eje horizontal. Conforme se abre la puerta, el resorte es comprimido por la varilla engoznada, que se desliza por la guía oscilante A. Con la puerta cerrada el resorte tiene su longitud natural. Demostrar que la puerta puede permanecer en equilibrio para todos los ángulos θ si la constante k del resorte tiene el valor adecuado.

Resp. $k = mg/a$

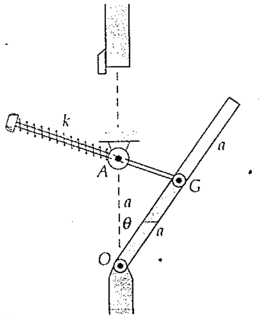


Figura problema 7.41

7.42 El sistema compuesto de la barra sin peso giratoria en torno a O y el resorte de constante k se muestra en su posición de equilibrio. Demostrar que la posición es de equilibrio estable.

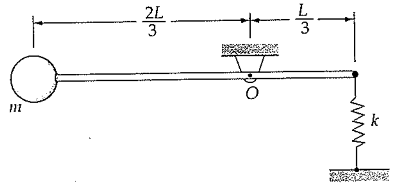


Figura problema 7.42

7.43 El resorte del dispositivo de la figura está sin alargar en la posición $\theta = 0$. Hallar la expresión de la constante recuperadora k que debe tener el resorte para cada posición de equilibrio θ en el plano vertical. La masa de las barras es despreciable en comparación con m.

$$\textit{Resp. } k = \frac{mg}{2b}\,\frac{\cot\theta}{1 - \cos\theta}$$

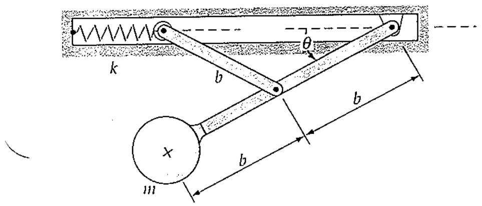


Figura problema 7.43

7.44 Ambas ruedas dentadas llevan una masa excéntrica m y pueden rotar libremente en el plano vertical en torno a sus cojinetes respectivos. Determinar los valores de θ para las posiciones de equilibrio y establecer la naturaleza de éste.

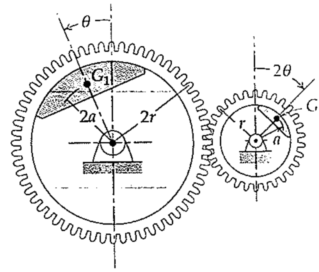


Figura problema 7.44

7.45 En el mecanismo de la figura la varilla AB se desliza a través del collar que pivota en O y comprime el resorte cuando se aplica a la barra GF un par de momento M aumentando el ángulo θ. El resorte tiene una constante k y está sin comprimir en la posición $\theta = 0$. Hallar el valor de θ en la posición de equilibrio. Se desprecian los pesos de las barras. $CDEF$ es un paralelogramo.

Resp. $\theta = \operatorname{arcsen} \dfrac{M}{kb^2}$

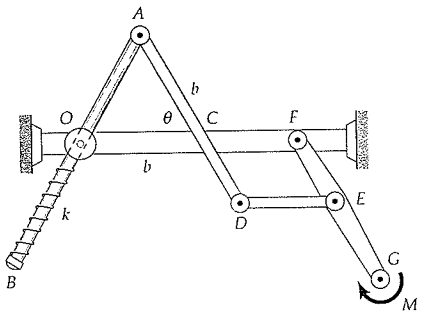


Figura problema 7.45

7.46 Determinar la altura máxima h de la masa m para la cual será de equilibrio estable la posición vertical del péndulo invertido indicada en la figura. Cada resorte tiene una constante recuperadora k y están precomprimidos por igual en la posición de la figura. Despréciese la masa del resto del mecanismo.

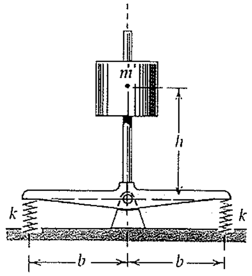


Figura problema 7.46

7.47 Uno de los requisitos críticos en el proyecto de piernas postizas es que no se doble la rodilla bajo carga cuando la pierna esté recta. En primera aproximación, la pierna se simula mediante dos barras sin peso con un resorte de torsión en la articulación. El resorte desarrolla un par de momento $M = K\beta$, proporcional al ángulo de inclinación β en la articulación. Determinar el valor mínimo de K que asegure la estabilidad de la articulación de la rodilla para $\beta = 0$

Resp. $K_{\text{min}} = \frac{1}{2}mgl$

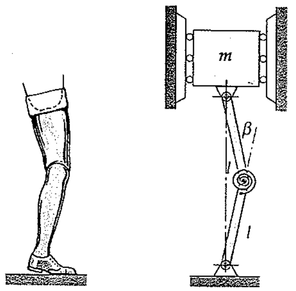


Figura problema 7.47

7.48 En el mecanismo del problema 4.84, cuya figura se repite, el resorte de constante k tiene una longitud natural prácticamente nula y la barra más larga tiene una masa m de centro en B. La masa de la barra pequeña es despreciable. Hallar el ángulo θ en el equilibrio en función de la fuerza descendente P.

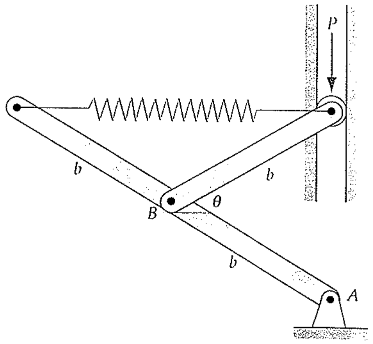


Figura problema 7.48

7.49 En la figura se representa un pequeño elevador de taller a pedal. Hay cuatro resortes iguales, dos a cada lado del árbol central. La constante de cada par de resortes es $2k$. Especificar el valor de k que garantice un equilibrio estable cuando el elevador soporte una carga (peso) L en la posición $\theta = 0$ sin que se ejerza fuerza en el pedal. Los resortes tienen los cuatro la misma precompresión y puede suponerse que actúan siempre en dirección horizontal.

Resp. $k > \dfrac{L}{2l}$

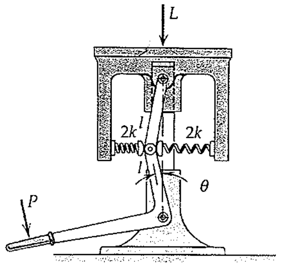


Figura problema 7.49

7.50 El sistema de la figura consta de la barra sin peso que pivota libremente en O, las dos masas en los extremos de la anterior y dos resortes. Si éstos se hallan igualmente tensados cuando la barra se encuentra en la posición vertical representada, determinar las posiciones de equilibrio estable y estudiar la estabilidad del sistema en cada una de ellas. Supóngase que los resortes son muy largos de modo que permanecen horizontales.

7.51 La barra uniforme AB tiene una masa m y su extremo izquierdo puede desplazarse libremente por la ranura horizontal fija. El extremo B está unido al vástago vertical que comprime el resorte cuando B baja. En la posición $\theta = 0$ el resorte está sin comprimir. Hallar el ángulo θ en el equilibrio (distinta a la imposible correspondiente a $\theta = 90°$) y especificar la posición que asegura la estabilidad.

Resp. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{mg}{2kl} \qquad k > \dfrac{mg}{2l}$

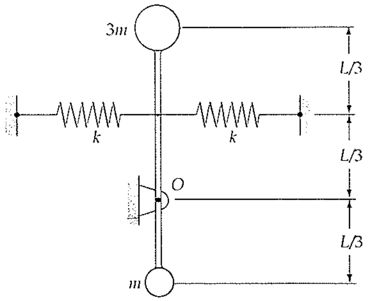


Figura problema 7.50

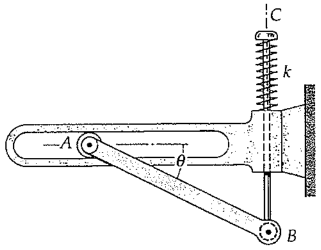


Figura problema 7.51

7.52 Las cuatro barras uniformes tienen una masa m cada una. La articulación B se desliza libremente por la guía vertical y comprime el resorte de constante k y longitud natural $2b$. Determinar el ángulo $\theta < 90°$ en el equilibrio y demostrar que el sistema es estable en esa posición.

7.53 El hemisferio macizo de diámetro $2b$ y su vástago cilíndrico concéntrico de diámetro b descansan sobre una superficie horizontal. Hallar qué altura máxima h puede tener el vástago sin que el conjunto sea inestable para la posición vertical representada. Ambas piezas son del mismo material.

Resp. $h < b\sqrt{2}$

7.54 Mediante cálculos, predecir si el semicilindro homogéneo y la cáscara semicilíndrica permanecerán en las posiciones indicadas o bien rodarán sobre el cilindro inferior.

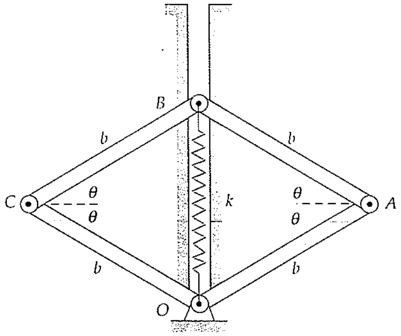


Figura problema 7.52

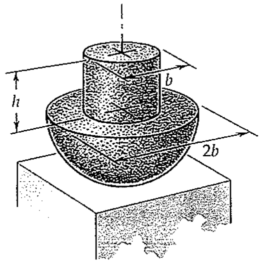


Figura problema 7.53

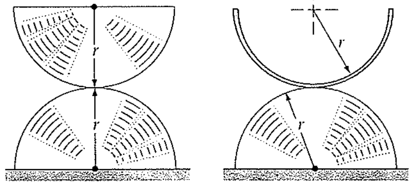


Figura problema 7.54

7.55 En el mecanismo de la figura el resorte de constante k está sin comprimir en la posición equivalente a $\theta = 0$. Hallar las posiciones de equilibrio y especificar las condiciones de estabilidad de cada una. Despréciense las masas de las barras frente a la masa m del cilindro.

Resp. $\theta = \pi$, estable si $k < \dfrac{3mg}{4b}$ e inestable si $k > \dfrac{3mg}{4b}$

$\theta = 2 \operatorname{arcsen} \dfrac{3mg}{4kb}$, requiere $k > \dfrac{3mg}{4kb}$, estable

7.56 En la figura se representa un sillón giratorio de escritorio, junto con un detalle del mecanismo basculante de resorte.

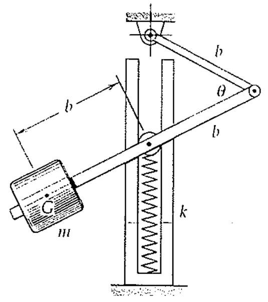


Figura problema 7.55

La estructura del sillón pivota sobre el punto fijo *O* de la base. El incremento de distancia entre *A* y *B* cuando se inclina hacia atrás respecto a *O* es el incremento de compresión del resorte. Éste tiene una constante de 96 kN/m y tiene su longitud natural cuando $\theta = 0$. Para pequeños ángulos de inclinación puede suponerse sin error sensible que el eje del resorte permanece paralelo al asiento. El centro de masa de una persona de 80 kg sentada se halla en el punto *G* situado sobre la perpendicular al asiento en *O*. Determinar el ángulo θ en el equilibrio. (*Sugerencia*: Puede imaginarse la deformación del resorte haciendo que la base se incline el ángulo requerido θ respecto a *O* mientras se mantiene el asiento en una posición fija.)

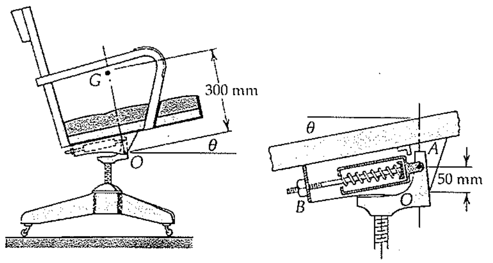


Figura problema 7.56

7.57 Se repite aquí la suspensión delantera del problema 4.98. Si hay que elevar el chasis *F* con un gato hasta que h = 350 mm para suprimir la compresión en los amortiguadores, determinar el valor de h correspondiente al equilibrio para quitar el gato. La constante de cada resorte vale 120 kN/m. La carga *L* es 12 kN y el chasis central F tiene una masa de 40 kg. Cada rueda y el miembro a ella unido tiene una masa de 35 kg con centro de masa situado a 680 mm del plano de simetría.

Resp. h = 265 mm

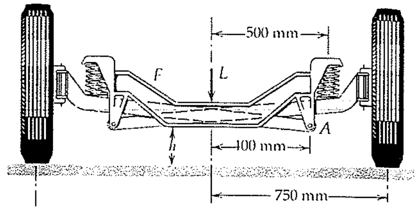


Figura problema 7.57

7.58 La puerta uniforme *AB* de un garaje, representada en sección en la figura, tiene una masa m y está equipada con dos mecanismos de resorte como el indicado, uno a cada lado de la puerta. El brazo *OB* es de masa despreciable y la esquina superior *A* de la puerta puede deslizarse libremente en dirección horizontal mediante un rodillo. La longitud natural del resorte es $r - a$, por lo que en la posición superior con $\theta = \pi$ la fuerza en el resorte es nula. A fin de asegurar una acción suave de la puerta al alcanzar la posición vertical de cierre $\theta = 0$, conviene que dicha posición sea de equilibrio indiferente. Determinar el valor adecuado de la constante k.

$$Resp.\ k = \frac{mg(r + a)}{8a^2}$$

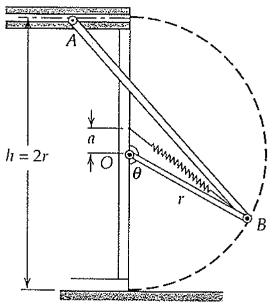


Figura problema 7.58

El principio del trabajo virtual sirve para encontrar la posición de equilibrio de un cuerpo o sistema de cuerpos interconectados que pueda presentar varias configuraciones como consecuencia de las fuerzas aplicadas. Las únicas fuerzas que deben tenerse en cuenta cuando se emplea esta método para determinar la posición de equilibrio son las que realizan trabajo (las fuerzas activas) durante el movimiento elemental hipotético del cuerpo o del sistema de cuerpos a partir de su posición de equilibrio. No hay que incluir las fuerzas externas que no realicen trabajo (las fuerzas reactivas). Es por esta causa que se construye el diagrama de las fuerzas activas (y no el diagrama de sólido libre), para centrar la atención exclusivamente en aquellas fuerzas que trabajen en los desplazamientos virtuales.

La parte más difícil del proceso suele ser el establecimiento de las relaciones entre los desplazamientos virtuales, lineales y angulares, de las distintas partes del sistema durante un desplazamiento virtual del mismo compatible con las ligaduras. Primero se han de escribir las relaciones geométricas que describen la configuración del sistema; a continuación, se establecen las variaciones infinitesimales de las posiciones de las partes del sistema mediante la diferenciación de la relación geométrica, obteniéndose así las expresiones de los movimientos virtuales infinitesimales.

En el método del trabajo virtual debe señalarse particularmente el hecho de que un desplazamiento virtual es una variación infinitesimal de primer orden de una longitud o de un ángulo. Esta variación es ficticia puesto que es consecuencia de un movimiento hipotético que no es preciso que tenga lugar en la realidad. Matemáticamente, los desplazamientos virtuales reciben el mismo tratamiento que las variaciones infinitesimales de los movimientos reales. Se emplea el símbolo δ para representar las variaciones infinitesimales virtuales y la habitual letra d para representar las variaciones infinitesimales reales.

En este capítulo 7 hemos limitado nuestra atención a aquellos sistemas mecánicos en los cuales las posiciones de los miembros quedan especificadas mediante una única variable (sistemas de un grado de libertad). Cuando existan dos o más grados de libertad, deberá aplicarse la ecuación del trabajo virtual tantas veces como grados de libertad existan, variando cada vez una sola variable y manteniendo constantes las demás.

Hemos visto la utilidad del concepto de energía potencial, tanto gravitatoria (V_g) como elástica (V_e), para resolver problemas de equilibrio en los que tengan lugar variaciones en las posiciones verticales de los centros de masa de los cuerpos y en los que también los desplazamientos virtuales den por resultado variaciones correspondientes de los alargamientos y acortamientos de los miembros elásticos (resortes). En estos casos se comienza por obtener una expresión de la energía potencial total V del sistema en función de la variable que especifica las posiciones posibles del sistema. Seguidamente, se emplean las derivadas primera y segunda de V para establecer, respectivamente, la posición de equilibrio y la naturaleza del mismo.

PROBLEMAS DE REPASO

7.59 Una "caja negra" contiene un conjunto de piñones y sectores dentados, engranajes y otros órganos mecánicos interiores que transfieren el movimiento lineal del empujador *A* al empujador *B*. Por cada unidad de desplazamiento de *A* hacia el interior de la caja por defecto de la fuerza P_1, se produce un movimiento de *B* de un tercio de unidad hacia el exterior de la caja en contra de la fuerza P_2. Si es $P_1 = 100$ N, calcular P_2 en el estado de equilibrio. Despreciar todos los rozamientos y suponer que todos los componentes mecánicos son cuerpos rígidos sin peso idealmente conectados.

Resp. $P_2 = 400$ N

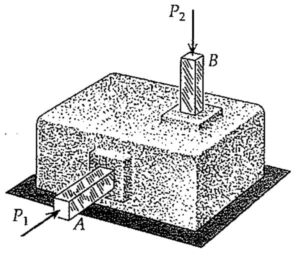


Figura problema 7.59

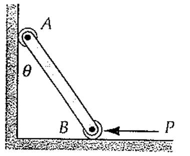
7.60 Identificar cuáles de los problemas de (*a*) a (*f*) se resuelven mejor (*A*) aplicando las ecuaciones de equilibrio y (*B*) por el método de los trabajos virtuales. Describir brevemente el proceso seguido en cada procedimiento.

7.61 La entrada de un mecanismo de mando consiste en un eje *A* que gira bajo la acción de un par de momento *M* y la salida es una corredera *B* que se mueve en la dirección *x* contra la acción de la fuerza *P*. El mecanismo está preparado para que el desplazamiento lineal de *B* sea proporcional al desplazamiento angular de *A*, aumentando *x* 60 mm por cada vuelta completa de *A*. Siendo $M = 10$ N · m, determinar *P* en el estado de equilibrio. Despreciar los rozamientos y suponer que todos los componentes mecánicos son cuerpos rígidos sin peso idealmente conectados.

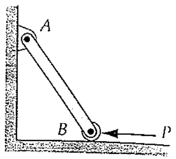
Resp. $P = 1047$ N

7.62 El sistema compuesto por la varilla sin peso, el resorte de torsión *K* y la masa *m* del extremo, está en equilibrio estático con $\theta = 30°$. Determinar el valor necesario de la constante recuperadora del resorte *K* para la estabilidad en esa posición y la correspondiente desviación angular estática θ_e del resorte.

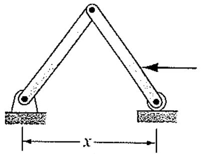
Todas las figuras están en plano vertical. Se conocen las dimensiones y la masa de cada miembro y la fuerza aplicada



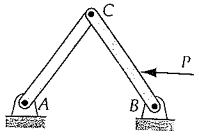
Hallar θ en el estado de equilibrio
(*a*)



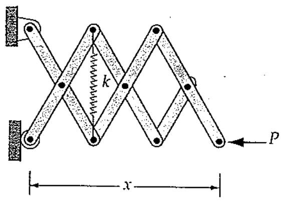
Hallar las reacciones en *A* y *B*
(*b*)



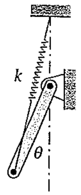
Hallar *x* en estado de equilibrio
(*c*)



Hallar las fuerzas en *A*, *B* y *C*
(*d*)



Hallar *x* en estado de equilibrio
(*e*)



Determinar *k* en estado de equilibrio para $\theta = 0$
(*f*)

Figura problema 7.60

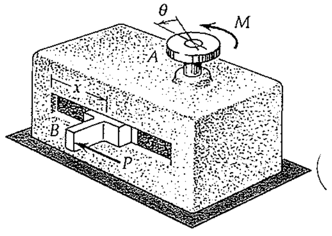


Figura problema 7.61

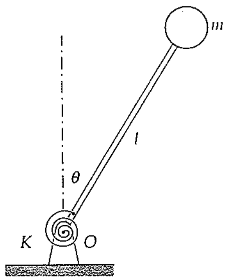


Figura problema 7.62

7.63 Determinar los valores de θ para el equilibrio y la clase de equilibrio de la rueda desequilibrada en cada posición en el plano inclinado 10°. El rozamiento estático es suficiente para evitar el deslizamiento. El centro de masa se encuentra en *G*.

Resp. $\theta = -6{,}82°$ y también $\theta = 207°$.

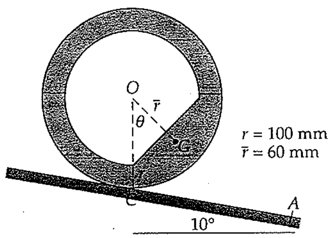


Figura problema 7.63

7.64 El esquema muestra la configuración aproximada de uno de los sistemas articulados que fijan la pestaña de la base del vehículo de cohetes Saturno *V* al pedestal de su plataforma antes del lanzamiento. Calcular la fuerza *F* de sujeción previa en *A* si el vástago *CE* se halla sometido a tracción por efecto de una presión de fluido de 20 MPa que se ejerce sobre la cara izquierda del émbolo del cilindro hidráulico. El émbolo tiene una superficie de 10^4 mm^2. El peso del conjunto es considerable, pero es pequeño frente a la fuerza de sujeción originada, por lo que podemos despreciarlo.

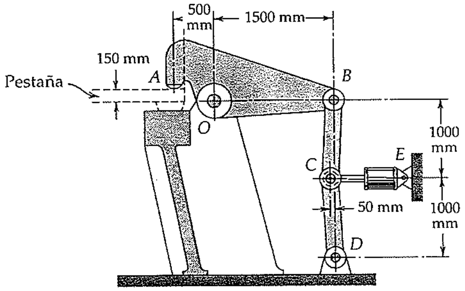


Figura problema 7.64

7.65 En la figura se representa la sección normal de un recipiente formado por una cáscara semiesférica de radio *r* una cáscara cilíndrica de altura *h*, construidas ambas del mismo material. Especificar cuál es el límite del valor de *h* para que se conserve la estabilidad del recipiente colocado en posición totalmente vertical sobre la superficie horizontal.

Resp. $h < r$

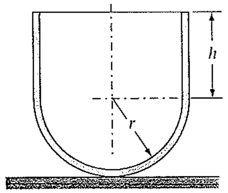


Figura problema 7.65

7.66 La energía potencial de un sistema mecánico en el que los rozamientos son despreciables está expresada por

$$V = a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}^2\,\theta,$$

donde *a* y *b* son constantes positivas y θ es la coordenada angular que define la posición del sistema. Establecer la posición o posiciones de equilibrio y determinar la estabilidad de cada una de ellas.

7.67 El disco de aluminio uniforme de radio *R* y masa *m* rueda sin deslizamiento sobre la superficie fija de radio 2*R*. Fijo al disco hay un cilindro de plomo de masa también *m* con su centro a una distancia *b* del centro *O* del disco. Determinar el valor mínimo de *b* para el cual el disco permanece en equilibrio estable sobre la superficie cilíndrica en la posición elevada representada.

Resp. $b_{\min} = \frac{2}{3}R$

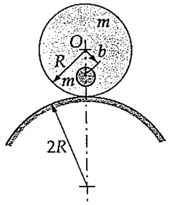


Figura problema 7.67

7.68 En la figura se muestra la sección de un cierre metálico de taller de 135 kg, formado por placas engoznadas que pasan sobre los rodillos situados en la guía cilíndrica. Cuando el cierre está echado, el extremo A se encuentra en B. A cada lado hay un cable de accionamiento amarrado al borde inferior del cierre y arrollado alrededor de un tambor C. Cada uno de éstos está unido a un resorte de torsión que presenta una resistencia al giro que aumenta a razón de 10 N · m por cada vuelta del tambor a partir de la posición no tensa del resorte que corresponde a $x = 0$. Hallar el valor de x en el equilibrio y demostrar que éste es estable.

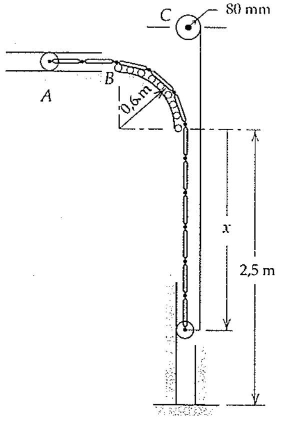


Figura problema 7.68

7.69 El disco desequilibrado de centro de masa G, a una distancia $\bar{r}$ del centro geométrico, se coloca sobre una superficie cóncava de radio R. Hallar el valor máximo que puede tener $\bar{r}$ para que, pese a todo, el disco siga permaneciendo estable en la posición que se representa en el fondo de la superficie de apoyo. (*Sugerencia*: Observando la geometría de la posición desplazada que se representa, escribir una expresión de la energía potencial V_g en función de θ.)

Resp. $\bar{r}_{\max} = \dfrac{r}{\dfrac{R}{r} - 1}$

7.70 Dos cáscaras semicilíndricas que se prolongan en dos rectángulos iguales se han conformado con chapa metálica, una con la configuración (*a*) y otra con la configuración (*b*). Ambas descansan sobre una superficie horizontal. Para el caso (*a*) hallar el valor máximo de h para el cual la cáscara permanece estable en la posición representada. Para el caso (*b*) demostrar que la estabilidad en la posición representada es independiente de la cota h.

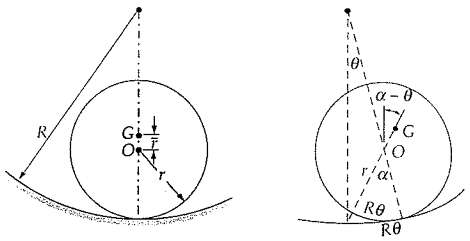


Figura problema 7.69

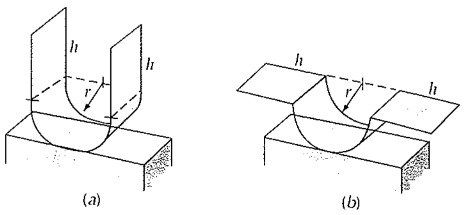


Figura problema 7.70

7.71 En el mecanismo representado, el resorte de constante k no está deformado cuando $\theta = 60°$. Las masas de las partes son pequeñas frente a la suma m de las masa de los dos cilindros. El mecanismo está construido de manera que los brazos pueden sobrepasar la vertical, según se ve en la ilustración derecha. Determinar los valores de θ correspondientes al equilibrio y estudiar la estabilidad del mecanismo en cada posición. Depréciense los rozamientos.

Resp. $\theta = 0$; estable si $k < mg/a$
inestable si $k > mg/a$

$\theta = \arccos \frac{1}{2}\left(1 + \frac{mg}{ka}\right)$

sólo si $k > mg/a$; estable

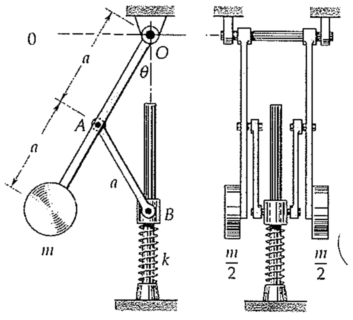


Figura problema 7.71

7.72 La plataforma de masa m está soportada por patas iguales y sometida, en la forma que se indica, a la acción de dos resortes. Si son despreciables las masas de las patas y de los resortes, determinar la constante recuperadora mínima k de cada resorte que asegure la estabilidad de la plataforma en la posición indicada. Cada resorte tiene un alargamiento inicial Δ.

Resp. $k_{\min} = \dfrac{mg}{2b}\left(1 + \dfrac{b^2}{l^2}\right)$

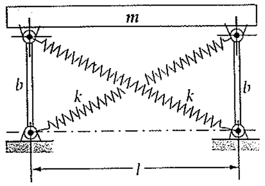


Figura problema 7.72

*PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

*7.73 El pequeño rodillo C situado en el centro de masa de la barra AB de 10 kg está confinado a moverse en la guía vertical. El rodillo del extremo B está unido al resorte de constante $k = 3$ kN/m y está confinado a moverse en la guía horizontal. Cuando $h = 0$, el resorte tiene su longitud natural. Determinar el valor de h en el equilibrio.

Resp. $h = 203$ mm

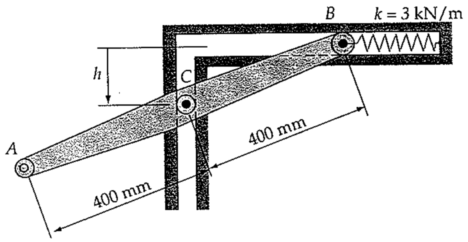


Figura problema 7.73

*7.74 La barra OA, cuya masa de 25 kg tiene su centro en G, puede girar en torno a su extremo O oscilando en el plano vertical bajo la limitación que le impone el contrapeso de 10 kg. Escribir la expresión de la energía potencial total del sistema, tomando $V_g = 0$ cuando $\theta = 0$, y calcular V_g en función de θ entre $\theta = 0°$ y $\theta = 360°$. A la vista de la representación gráfica de los resultados, determinar la posición o posiciones de equilibrio y su estabilidad.

*7.75 Para el mecanismo sometido a la fuerza de 60 N aplicado perpendicularmente a la barra sin peso, determinar el valor en el equilibrio de la coordenada x. El resorte tiene una constante recuperadora de 1600 N/m y está indeformado cuando $x = 0$. (*Sugerencia*: Sustituir la fuerza aplicada por un sistema fuerza-par en el punto B.)

Resp. $x = 130{,}3$ mm

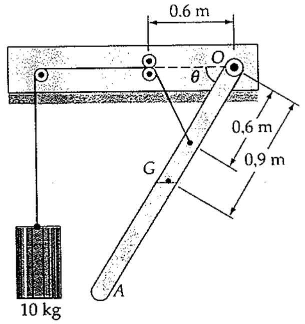


Figura problema 7.74

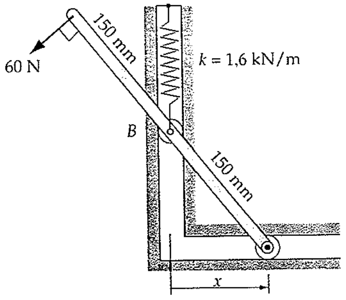


Figura problema 7.75

*7.76 La barra uniforme OA tiene una masa de 20 kg y está soportada en el plano vertical por el resorte AB cuya longitud natural es 400 mm. Representar gráficamente la energía potencial total V y su derivada $dV/d\theta$ en función de θ desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 120°$. A la vista de las curvas obtenidas identificar los

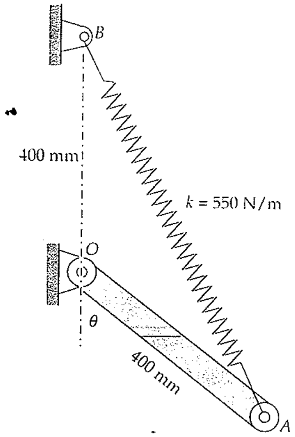


Figura problema 7.76

valores de θ en el equilibrio y la correspondiente estabilidad de cada estado de equilibrio. Tómese $V_g = 0$ en el plano horizontal que pasa por O.

7.77 Determinar el ángulo θ en el equilibrio para el mecanismo representado. El resorte de constante $k = 2$ kN/m tiene una longitud natural de 200 mm. Las barras AB y CD tienen una masa de 4,5 kg cada una y el miembro BD y su carga tienen una masa de 4,5 kg. El movimiento tiene lugar en el plano vertical.
Resp. $\theta = 79{,}0°$

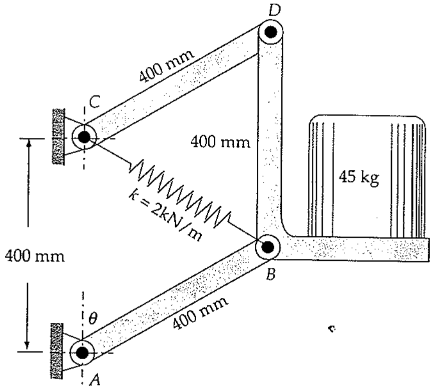


Figura problema 7.77

7.78 La figura muestra la vista lateral de una puerta de ventilación de 10 kg, con centro de masa G, articulada en torno a un eje horizontal que pasa por su extremo O. Cuando $\theta = 90°$, el resorte de retención de constante $k = 1250$ kN/m está indeformado. Calcular y representar la energía potencial total de la puerta y el resorte en función de θ, entre $\theta = 0°$ y $\theta = 90°$. Tómese $V_g = 0$ para $\theta = 0°$. A la vista de la representación gráfica, especificar la posición de equilibrio, distinta a la de $\theta = \pm 90°$, y su estabilidad ¿Puede justificarse el hecho de que el estado de equilibrio de $\theta = +90°$ sea estable con el resorte instalado e inestable sin el resorte?

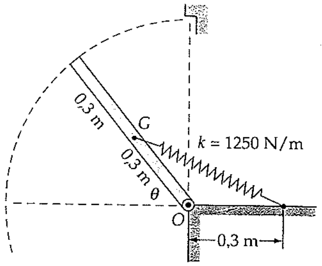


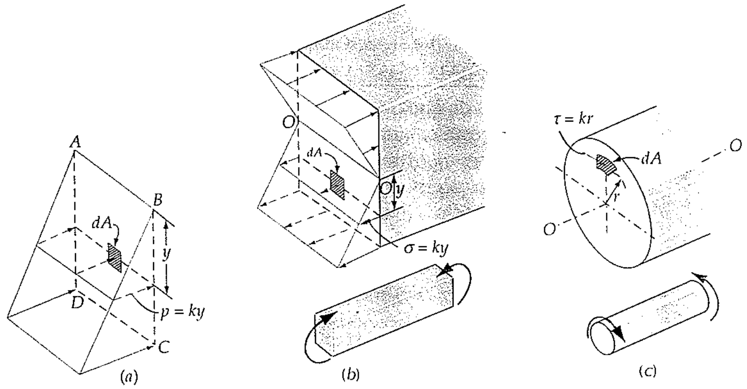
Figura problema 7.78

Apéndice A: Momentos de inercia de una superficie

A.1 INTRODUCCIÓN

Cuando sobre una superficie actúan fuerzas que están distribuidas de modo continuo por toda ella, es muchas veces necesario calcular el momento de esas fuerzas respecto a un eje contenido en la superficie o perpendicular a ésta. A menudo la intensidad de la fuerza (presión o esfuerzo) es proporcional a la distancia al eje de momentos. La fuerza elemental que actúa en un elemento de superficie será entonces proporcional a la distancia multiplicada por el área elemental y el momento elemental será proporcional al cuadrado de la distancia multiplicado por el área elemental. Vemos, pues, que el momento total será proporcional a una integral de la forma $\int (\text{distancia})^2\, d(\text{área})$. Esta integral, que recibe el nombre de *momento de inercia*, depende de la geometría de la superficie y aparece con tanta frecuencia en la práctica que es útil que desarrollemos con algún detalle sus propiedades para que pueda manejarse con facilidad cuando las circunstancias lo requieran.

En la figura A.1 se ilustra el origen físico de estas integrales. En la parte *a* de la figura la superficie ABCD está sometida a una presión *p* distribuida cuya in-



(a) (b) (c)

Figura A.1

tensidad es proporcional a la distancia y al eje AB. De esta situación se trató en el apartado 5.8 del capítulo 5, con relación a la acción de la presión de un líquido sobre una superficie plana. El momento respecto a AB debido a la presión sobre el elemento de superficie de área dA es $py\,dA = ky^2\,dA$. Es decir, la integral en cuestión aparece cuando hay que calcular el momento total $M = k\int y^2\,dA$.

En la figura A.1*b* se muestra la distribución de esfuerzos que actúan en la sección transversal de una viga simple sometida a flexión por dos pares iguales y opuestos aplicados en los extremos. En todas las secciones de la viga se tiene entonces una distribución lineal de esfuerzos σ, dada por $\sigma = ky$, que es positiva (tracción) por debajo del eje *O-O* y negativa (compresión) por encima de ese eje. El momento elemental respecto a *O-O* será entonces $dM = y(\sigma\,dA) = ky^2\,dA$. Es decir, vuelve a aparecer la integral cuando hay que calcular el momento total $M = k\int y^2\,dA$.

Un tercer ejemplo se presenta en la figura A.1*c*, en la que se muestra un árbol cilíndrico sometido a un momento de torsión. Por debajo del límite elástico del material, a ese momento se opone, en cada sección transversal del árbol, una distribución de esfuerzos tangenciales, o esfuerzos cortantes, τ, proporcionales a la distancia radial r al centro del árbol. O sea, $\tau = kr$, y el momento total respecto al eje del árbol es $M = \int r(\tau\,dA) = k\int r^2\,dA$. Esta integral difiere de las correspondientes a los dos casos anteriores en que el eje de momentos es perpendicular a la superficie y no paralelo a ésta y en que r es una coordenada radial y no rectangular.

Aunque la integral a que nos venimos refiriendo acostumbre a conocerse como *momento de inercia* de la superficie respecto al eje en cuestión, una denominación más adecuada sería la de *momento estático de segundo orden*, puesto que el momento de primer orden $y\,dA$ se multiplica por el brazo de momento y para dar el momento de segundo orden del elemento dA. La palabra *inercia* aparece en esta terminología en razón de la similitud entre la expresión matemática de las integrales que dan cuenta de los momentos de segundo orden con la de los momentos resultantes de las llamadas fuerzas de inercia que aparecen al estudiar la rotación de los cuerpos. El momento de inercia de una superficie es una propiedad puramente matemática de esa superficie y, de por sí, carece de significado físico.

A.2 DEFINICIONES

Las definiciones que siguen constituyen el fundamento del estudio de los momentos de inercia de las superficies planas.

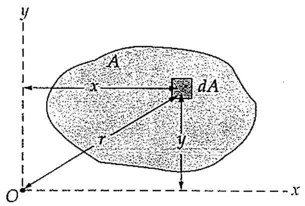


Figura A.2

(a) Momentos de inercia rectangulares y polares. En la figura A.2 la superficie de área A está contenida en el plano x-y. Los momentos de inercia elementales del elemento dA respecto a los ejes x e y son, por definición, $dI_x = y^2\,dA$ y $dI_y = x^2\,dA$, respectivamente. Luego los momentos de inercia de la superficie de área A respecto a los mismos ejes serán

$$I_x = \int y^2\,dA \qquad I_y = \int x^2\,dA \tag{A.1}$$

donde la integración se extiende a toda la superficie.

El momento de inercia de dA respecto al polo O (eje z) es, por definición análogo, $dI_z = r^2\,dA$, y el momento de inercia de toda la superficie respecto a O es

$$I_z = \int r^2\,dA \tag{A.2}$$

Las expresiones definidas en las ecuaciones A.1 se conocen como momentos de inercia *rectangulares*, mientras que la expresión A.2 es la definición del llamado momento de inercia *polar*[1]. Como $x^2 + y^2 = r^2$, es evidente que

$$I_z = I_x + I_y \tag{A.3}$$

Con esta expresión A.3 se calcula con mayor facilidad el momento de inercia polar de una superficie cuyos límites se especifiquen con mayor sencillez en coordenadas cartesianas que en coordenadas polares.

Obsérvese que el momento de inercia de un elemento contiene el cuadrado de la distancia del elemento al eje de inercia. Un elemento cuya coordenada sea negativa contribuye al momento de inercia en la misma cantidad que un elemento igual cuya coordenada sea positiva y del mismo valor absoluto. En consecuencia, el momento de inercia de una superficie respecto a un eje es una cantidad esencialmente positiva. En cambio, el momento de primer orden de la superficie, que interviene en los cálculos de centroides, puede ser positivo o negativo.

Las dimensiones del momento de inercia de una superficie son, evidentemente, L^4, en que L representa la dimensión longitud. En unidades SI, un momento de inercia se expresará, pues, en metros a la cuarta (m^4) o en milímetros a la cuarta (mm^4).

Al calcular momentos de inercia, es importante elegir adecuadamente las coordenadas. Conviene emplear coordenadas cartesianas para aquellos contornos que se expresen más fácilmente con ellas. Las coordenadas polares suelen simplificar los cálculos en los problemas en que intervienen contornos más fácilmente expresables mediante las coordenadas r y θ. Es asimismo importante elegir un elemento de superficie que simplifique la integración lo más posible. Estas consideraciones se asemejan en gran medida a las que se hicieron en el capítulo 5 con relación al cálculo de centroides.

(b) Radio de giro. Consideremos la superficie A de la figura A.3*a*, cuyos momentos de inercia rectangulares son I_x e I_y y cuyo momento de inercia polar respecto a O es I_z. Imaginemos que esta superficie se encuentra concentrada dentro de una franja estrecha y alargada como la de la figura A.3*b*, separada una distancia k_x del eje x. Según la definición de momento de inercia, el momento de inercia de esa franja respecto al eje x será igual a la de la superficie original si $k_x^2 A = I_x$. Es así que la distancia k_x recibe el nombre de *radio de giro* respecto al eje x. Si ahora suponemos que la superficie se concentra dentro de una franja estrecha paralela al eje y, tal como se representa en la figura A.3*c*, podremos establecer una relación similar para este eje. Además, si imaginamos la superficie concentrada dentro de una corona circular de espesor muy peque-

---

[1] El momento de inercia polar de una superficie se denota a veces, en Mecánica, por la letra J.

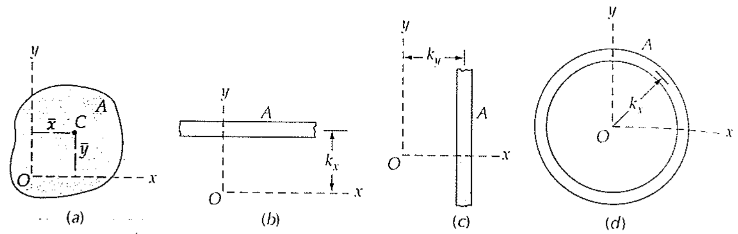


Figura A.3

ño, de radio r, como se indica en la figura A.3*d*, el momento de inercia polar podrá expresarse como $k_z^2 A = I_z$. En resumen, podemos escribir

$$\begin{aligned} I_x &= k_x^2 A \quad \text{o sea} \quad k_x = \sqrt{I_x/A} \\ I_y &= k_y^2 A \quad \text{o sea} \quad k_y = \sqrt{I_y/A} \\ I_z &= k_z^2 A \quad \text{o sea} \quad k_z = \sqrt{I_z/A} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Así pues, el radio de giro es una medida de la distribución de la superficie respecto al eje en cuestión y cualquier momento de inercia, rectangular o polar, puede expresarse especificando el área y el radio de giro.

Si llevamos las expresiones A.4 a la ecuación A.3, tendremos

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{A.5}$$

Luego el cuadrado del radio de giro respecto a un eje polar es igual a la suma de los cuadrados de los radios de giro respecto a los ejes cartesianos correspondientes.

Es absolutamente necesario no confundir la coordenada del centroide C de la superficie con el radio de giro. Por ejemplo, en la figura A.3*a* el cuadrado de la distancia centroidal al eje x es $\bar{y}^2$, que es el cuadrado del valor medio de las distancias y al eje de los elementos dA. Por otra parte, la cantidad k_x^2 es el valor medio de los cuadrados de esas distancias. El momento de inercia *no* es igual al valor medio de los cuadrados.

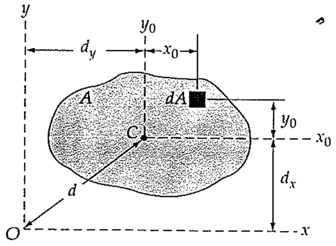


Figura A.4

(c) Traslación de los ejes. El momento de inercia de una superficie respecto a un eje no centroidal puede expresarse fácilmente en función del momento de inercia respecto a un eje centroidal paralelo a él. En la figura A.4 los ejes x_0-y_0 pasan por el centroide C de la superficie. Vamos a determinar los momentos de inercia de la superficie respecto a los ejes x-y paralelos a ellos. Por definición, el momento de inercia del elemento dA respecto al eje x es

$$dI_x = (y_0 + d_x)^2\, dA$$

Desarrollando e integrando se tiene

$$I_x = \int y_0^2\, dA + 2d_x \int y_0\, dA + d_x^2 \int dA$$

La primera integral es, por definición, el momento de inercia $\bar{I}_x$ respecto al eje centroidal x_0. La segunda integral es nula, puesto que $\int y_0\, dA = A\bar{y}_0$ e $\bar{y}_0$ es automáticamente cero estando el centroide en el eje x_0. La tercera integral es simplemente Ad_x^2. Luego la expresión de I_x y la expresión análoga de I_y resultan ser

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_x + Ad_x^2 \\ I_y &= \bar{I}_y + Ad_y^2 \end{aligned} \tag{A.6}$$

En virtud de la ecuación A.3, la suma de estas dos ecuaciones da

$$I_z = \bar{I}_z + Ad^2 \tag{A.6a}$$

Las ecuaciones A.6 y A.6*a* constituyen el *teorema de Steiner* o *teorema de los ejes paralelos*. Conviene recalcar dos hechos. Primero, los ejes entre los que se traslada el momento de inercia *deben ser paralelos* y, segundo, uno de esos ejes *debe pasar por el centroide* de la superficie.

Si se desea trasladar el momento de inercia entre dos ejes ninguno de los cuales pase por el centroide, primero habría que trasladarlo desde el primer eje al eje centroidal paralelo a ese primer eje y, luego, desde ese eje centroidal al segundo eje.

El teorema de Steiner es también válido para los radios de giro. Sustituyendo en las ecuaciones A.6 por la definición de k se tiene

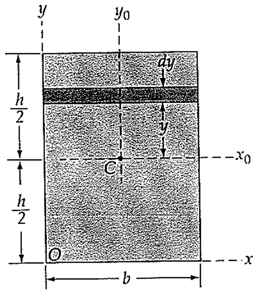
$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{A.6b}$$

donde $\bar{k}$ es el radio de giro respecto a un eje centroidal paralelo al eje al que se refiere k, y d es la distancia entre ambos ejes. Los ejes pueden estar contenidos en el plano de la superficie o ser normales a él.

En la tabla D.3 del apéndice D se presentan los momentos de inercia de algunas de las figuras planas más corrientes.

PROBLEMA TIPO A.1

Determinar los momentos de inercia de la superficie rectangular respecto a los ejes centroidales x_0 e y_0, el eje polar centroidal z_0 que pasa por C, el eje x y el eje polar que pasa por O.



① **Si hubiéramos partido del elemento de segundo orden $dA = dx\, dy$, la integración respecto a x con y constante equivale simplemente a multiplicar por b y nos da la expresión $y^2 b\, dy$, de la que hemos partido.**

Solución. Para calcular el momento de inercia I_x, respecto al eje x_0, tomamos ① una franja horizontal de área $b\,dy$ de tal modo que todos los elementos de la franja tienen la misma coordenada y. O sea,

$$\left[I_x = \int y^2\, dA\right] \qquad \bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\, dy = \tfrac{1}{12} bh^3 \qquad \textit{Resp.}$$

Intercambiando los símbolos, el momento de inercia respecto al eje centroidal y_0 es

$$\bar{I}_y = \tfrac{1}{12} hb^3 \qquad \textit{Resp.}$$

El momento de inercia polar centroidal es

$$[I_z = I_x + I_y] \qquad \bar{I}_z = \tfrac{1}{12}(bh^3 + hb^3) = \tfrac{1}{12}A(b^2 + h^2) \qquad \textit{Resp.}$$

Según el teorema de Steiner, el momento de inercia respecto al eje x será

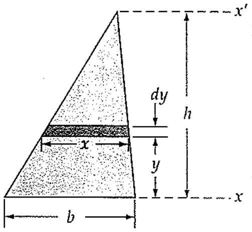
$$[I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2] \qquad I_x = \tfrac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}Ah^2 \qquad \textit{Resp.}$$

El momento de inercia polar respecto a O lo obtenemos también mediante el teorema de Steiner; es decir,

$$[I_z = \bar{I}_z + Ad^2] \qquad I_z = \tfrac{1}{12}A(b^2 + h^2) + A\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

$$I_z = \tfrac{1}{3}A(b^2 + h^2) \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO A.2



Determinar los momentos de inercia de la superficie triangular respecto a su base y respecto a ejes paralelos a ésta que pasen por el centroide y el vértice.

① **Volvemos a elegir aquí el elemento más sencillo. De haber tomado $dA = dx\, dy$, hubiéramos tenido que integrar $y^2 dx\, dy$ primero respecto a x. Ello nos da $y^2\, x\, dy$, que es nuestra expresión de partida.**

② **El expresar x en función de y no debe ser causa de dificultad si tenemos en cuenta la proporcionalidad entre los triángulos semejantes.**

① ② ***Solución.*** Como elemento de superficie tomamos una franja paralela a la base, tal como se muestra en la figura, cuya área es $dA = x\, dy = [(h - y)b/h]\, dy$. Por definición

$$\left[I_x = \int y^2\, dA\right] \qquad \left(I_x = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h}\right]_0^h\right) = \frac{bh^3}{12} \qquad \textit{Resp.}$$

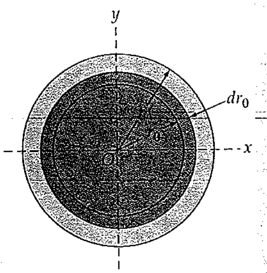
Según el teorema de Steiner, el momento de inercia I respecto a un eje centroidal, situado a una distancia h/3 por encima del eje x, es

$$[\bar{I} = I - Ad^2] \qquad \bar{I} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36} \qquad \textit{Resp.}$$

Trasladando este valor al eje x' que pasa por el vértice resulta

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{4} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO A.3



Calcular los momentos de inercia de un círculo respecto a un eje diametral y al eje polar que pasa por el centro. Especificar los radios de giro.

Solución. Como área elemental para calcular el momento de inercia polar respecto al eje z que pasa por O, tomamos un corona de espesor infinitesimal pues ① todos sus elementos equidistan de O. El área elemental es $dA = 2\pi r_0\, dr_0$ y, así,

$$\left[I_z = \int r^2\, dA\right] \qquad I_z = \int_0^r r_0^2 (2\pi r_0\, dr_0) = \frac{\pi r^4}{2} = \tfrac{1}{2}Ar^2 \qquad \textit{Resp.}$$

El radio de giro polar es

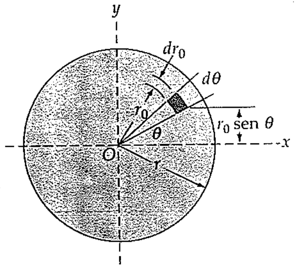
$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}}\right] \qquad k_z = \frac{r}{\sqrt{2}} \qquad \textit{Resp.}$$

Por simetría, $I_x = I_y$ y según la ecuación A.3,

$$[I_z = I_x + I_y] \qquad I_x = \tfrac{1}{2}I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \tfrac{1}{4}Ar^2 \qquad \textit{Resp.}$$

El radio de giro respecto al eje diametral es

$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}}\right] \qquad k_x = \frac{r}{2} \qquad \textit{Resp.}$$



① **Desde luego, en este caso las coordenadas adecuadas son las polares. Además, como antes, tomamos el elemento más sencillo y de menor orden posible, que es la corona circular. Debe verse inmediatamente que, según la definición, el momento de inercia polar de la corona es su área $2\pi r_0\, dr_0$ multiplicada por r_0^2.**

② Esta integración es inmediata, pero emplear la ecuación A.3 junto con el valor de [illegible] es desde luego más sencillo.

La anterior determinación de I_x es la más sencilla posible. Este resultado puede asimismo obtenerse por integración directa, empleando $dA = r_0\, dr_0\, d\theta$ como área elemental según se muestra en la figura inferior. Por definición

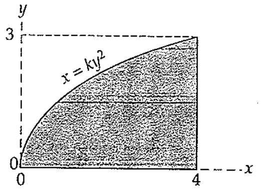
$$\left[I_x = \int y^2\, dA\right] \qquad I_x = \int_0^{2\pi}\int_0^{r}(r_0 \operatorname{sen} \theta)^2 r_0 dr_0 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{r^4 \operatorname{sen}^2 \theta}{4}\, d\theta$$

② $$= \frac{r^4}{2}\,\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi r^4}{4} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO A.4

Determinar el momento de inercia respecto al eje x de la superficie limitada por la parábola. Resolver empleando como área elemental (a) una franja horizontal y (b) una franja vertical.



Solución. Primero obtenemos el valor de $\frac{4}{9}$ para la constante k sustituyendo x por 4 e y por 3 en la ecuación de la parábola.

(a) Franja horizontal. Como todos los tramos de la franja horizontal se hallan a la misma distancia del eje x, el momento de inercia de la franja respecto al eje x será $y^2 dA$, donde $dA = (4 - x)\, dy = 4(1 - y^2/9)\, dy$. Integrando respecto a y resulta

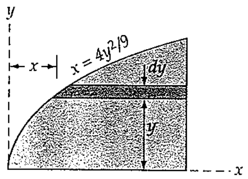
$$\left[I_x = \int y^2\, dA\right] \qquad I_x = \int_0^3 4y^2\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)dy = \frac{72}{5} = 14{,}4 \text{ (unidades)}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

(b) Franja vertical. En este caso todas las partes de la franja se encuentran a distancias diferentes del eje x, por lo que debemos emplear la fórmula del momento de inercia del rectángulo respecto a su base que, como vimos en el problema tipo A.1, es $bh^3/3$. Esta fórmula, aplicada al elemento $dx\, dy$, nos da

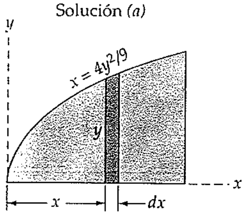
$$dI_x = \tfrac{1}{3}(dx)y^3$$

Para integrar respecto a x, debemos expresar y en función de x, lo cual nos da $y = 3\sqrt{x}/2$ y la integral se hace

$$I_x = \tfrac{1}{3}\int_0^4\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^3 dx = \frac{72}{5} = 14{,}4 \text{ (unidades)}^4 \qquad \textit{Resp.}$$



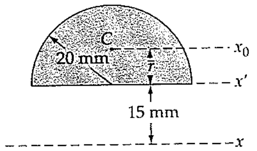
Solución *(a)*



Solución *(b)*

① No hay motivos de peso para elegir uno u otro procedimiento. La solución (b) requiere saber el momento de inercia de un rectángulo respecto a su base.

PROBLEMA TIPO A.5



Hallar el momento de inercia respecto al eje x de la superficie semicircular.

Solución. El momento de inercia de la superficie semicircular respecto al eje x' es la mitad que la del círculo completo respecto al mismo eje. Empleando los resultados del problema tipo A.3

$$I_{x'} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi r^4}{4} = \frac{20^4\pi}{8} = 2\pi(10^4) \text{ mm}^4$$

Seguidamente obtenemos el momento de inercia $\bar{I}$ respecto al eje centroidal x_0 paralelo al x'. Según el teorema de Steiner, la distancia de traslación es $\bar{r} = 4r/(3\pi) = (4)(20)/(3\pi) = 80/(3\pi)$ mm. Por consiguiente,

$$[\bar{I} = I - Ad^2] \qquad \bar{I} = 2(10^4)\pi - \left(\frac{20^2\pi}{2}\right)\left(\frac{80}{3\pi}\right)^2 = 1{,}755(10^4) \text{ mm}^4$$

Por ultimo, cambiamos del eje centroidal x_0 al eje x. O sea,

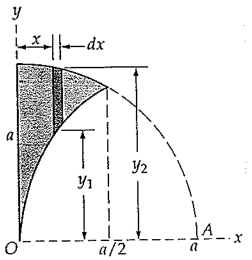
$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_x = 1{,}755(10^4) + \left(\frac{20^2\pi}{2}\right)\left(15 + \frac{80}{3\pi}\right)^2$$

$$= 1{,}755(10^4) + 34{,}66(10^4) = 36{,}4(10^4) \text{ mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

① Este problema pone de manifiesto la precaución con que deben efectuarse las dobles traslaciones de ejes, puesto que ni el eje x' ni el x pasan por el centroide C de la superficie. Si el círculo fuese completo, el centroide estaría en el eje x' y sólo sería necesario un cambio de ejes.

PROBLEMA TIPO A.6

① *Calcular el momento de inercia respecto al eje x de la superficie limitada por el eje y y los arcos de círculo de radio a cuyos centros se hallan en O y en A.*



Solución. Si como elemento de área tomamos una franja vertical, podemos cubrir toda la superficie con una sola integración. Una franja horizontal haría necesario integrar dos veces a causa de la discontinuidad. El momento de inercia

① **Nos quedamos con las raíces positivas, ya que y_1 e y_2 se encuentran ambas por encima del eje x.**

de la franja respecto al eje x es igual al de la franja de altura y_2 menos el de la franja de altura y_1. Es decir, si empleamos los resultados del problema tipo A.1, podemos escribir

$$dI_x = \tfrac{1}{3}(y_2\ dx)y_2^2 - \tfrac{1}{3}(y_1\ dx)y_1^2 = \tfrac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3)\ dx$$

① Los valores de y_2 e y_1 los obtenemos de las ecuaciones de las curvas que son $x^2+y_2^2 = a^2$ y $(x-a)^2+y_1^2 = a^2$, las cuales nos dan $y_2 = \sqrt{a^2-x^2}$ e $y_1 = \sqrt{a^2-(x-a)^2}$. O sea,

$$I_x = \tfrac{1}{3}\int_0^{a/2}\{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2} - [a^2-(x-a)^2]\sqrt{a^2-(x-a)^2}\}dx$$

Si resolvemos el sistema formado por la ecuaciones de ambas circunferencias resulta la coordenada x del punto de corte de las dos curvas, coordenada que a simple vista se ve que es $a/2$. Efectuando las integraciones, se tiene

$$\int_0^{a/2} a^2\sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\int_0^{a/2} x^2\sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{a^4}{16}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\int_0^{a/2} a^2\sqrt{a^2-(x-a)^2}\ dx = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\int_0^{a/2} (x-a)^2\sqrt{a^2-(x-a)^2}\ dx = \frac{a^4}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}\right)$$

Sumando estos valores y multiplicando por $\frac{1}{3}$ resulta

$$I_x = \frac{a^4}{96}(9\sqrt{3}-2\pi) = 0{,}0969a^4 \qquad \textit{Resp.}$$

De haber utilizado un elemento de segundo orden $dA = dx\,dy$, habríamos escrito que el momento de inercia del elemento respecto al eje x es $y^2\,dx\,dy$. Al integrar entre y_1 e y_2 manteniendo x constante resulta para la franja vertical

$$dI_x = \left[\int_{y_1}^{y_2} y^2\ dy\right]dx = \tfrac{1}{3}(y_2^3-y_1^3)\ dx$$

que es nuestra expresión de partida que escribimos particularizando el momento de inercia de un rectángulo.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

A.1 Si el momento de inercia respecto al eje x de la superficie en forma de banda estrecha es 2,56(10^6) mm^4, obtener en buena aproximación el área A de la banda.

Resp. A = 1600 mm^2

A.2 Calcular por integración directa el momento de inercia respecto al eje y de la superfici~~e tri~~angular.

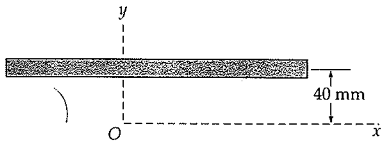


Figura Problema A.1

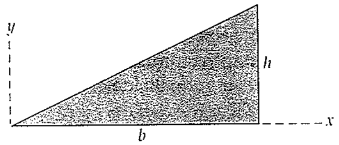


Figura Problema A.2

A.3 La corona estrecha cuartocircular tiene un área de 1600 mm^2. Calcular en buena aproximación su momento de inercia respecto al eje x.

Resp. I_x = 8(10^6) mm^4

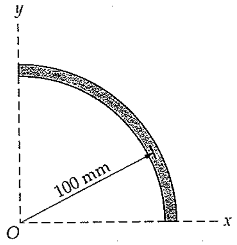


Figura Problema A.3

A.4 La diferencia entre los momentos de inercia de la superficie A respecto a los ejes paralelos p y p' es 15(10^6) mm^4. Calcular el área A de la superficie, cuyo centroide es C.

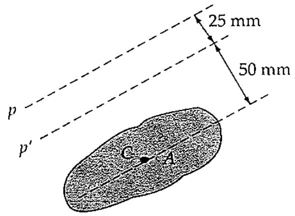


Figura Problema A.4

A.5 Hallar el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje y.

Resp. I_y = 26,8(10^6) mm^4

A.6 Demostrar que el momento de inercia del rectángulo respecto al eje x definido por un extremo puede emplearse como momento de inercia polar respecto a O cuando b es pequeño frente a a. ¿Cuál será el error porcentual en el caso en que b/a = 1/10?

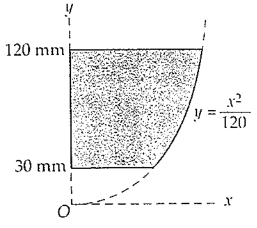


Figura Problema A.5

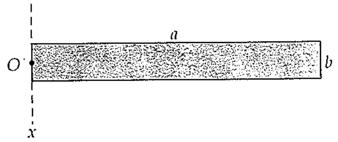


Figura Problema A.6

A.7 Para el rectángulo, calcular el momento de inercia respecto al eje x y el momento de inercia polar respecto a O.

Resp. I_x = 7,2(10^6) mm^4 $\quad$ I_0 = 15,95(10^6) mm^4

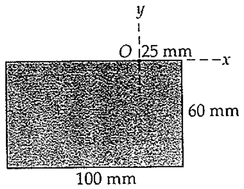


Figura Problema A.7

Problemas representativos

A.8 Hallar los radios de giro polares de la superficie triangular respecto a los puntos O y A.

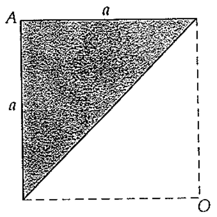


Figura Problema A.8

A.9 Hallar los momentos de inercia polares del semicírculo respecto a los puntos *A* y *B*.

Resp. $I_A = \frac{3}{4}\pi r^4$ $\qquad I_B = r^4\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4}{3}\right)$

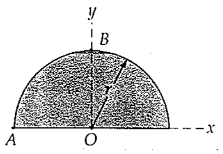


Figura Problema A.9

A.10 Por dos procedimientos diferentes demostrar que los momentos de inercia del cuadrado respecto a los ejes *x* y *x*′ son iguales.

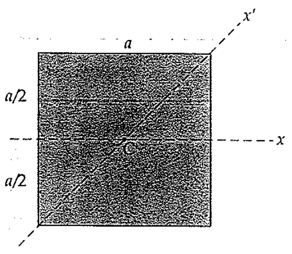


Figura Problema A.10

A.11 Hallar el radio de giro polar del triángulo equilátero respecto al punto medio *M* de su base.

Resp. $k_M = \frac{a}{\sqrt{6}}$

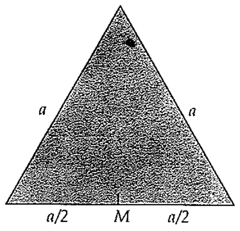


Figura Problema A.11

A.12 Si *h* es pequeño frente a *d*, el momento de inercia del rectángulo de área *A* respecto al eje *x* es aproximadamente igual a Ad^2. Determinar y representar gráficamente el error porcentual *n* de ese valor aproximado en función del cociente *h*/*d*, variando éste de 0.1 a 1. ¿Cuál es el error porcentual para *h* = *d*/4?

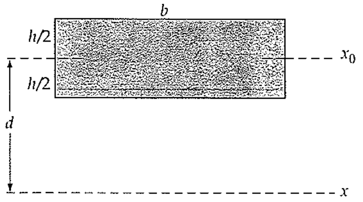


Figura Problema A.12

A.13 Calcular el momento de inercia de la superficie triangular respecto al eje *x*.

Resp. $I_x = 534(10^4)$ mm^4

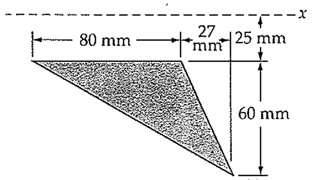


Figura Problema A.13

A.14 Hallar el momento de inercia del cuarto de círculo respecto al eje tangencial *x*′.

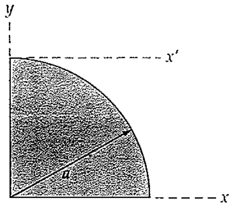


Figura Problema A.14

A.15 Calcular el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje *x*.

Resp. $I_x = 9(10^4)$ mm^4

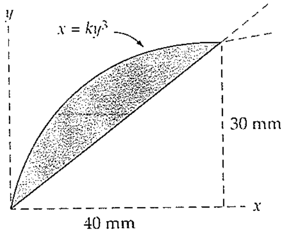


Figura Problema A.15

A.16 Hallar el momento de inercia del semicírculo representado respecto al eje *x* y su radio de giro polar respecto al punto *O*.

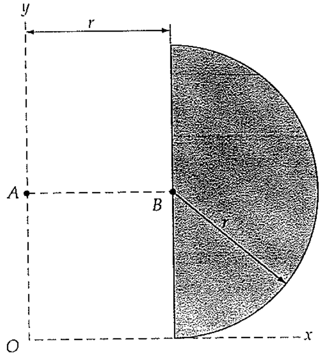


Figura Problema A.16

A.17 Hallar el momento de inercia de la superficie elíptica respecto al eje *y* y su radio de giro polar respecto al origen de coordenadas *O*.

Resp. $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $\qquad k_0 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

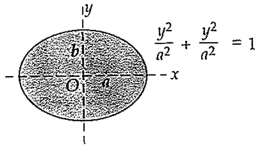


Figura Problema A.17

A.18 Calcular por integración directa el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje *x*. Resolver el problema, primero, utilizando una franja horizontal de área infinitesimal y, segundo, utilizando una franja vertical de área infinitesimal.

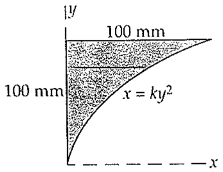


Figura Problema A.18

A.19 Hallar el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje *x* empleando (*a*) una franja horizontal de área infinitesimal y (*b*) una franja vertical de área infinitesimal.

Resp. $I_x = 16ab^3/105$

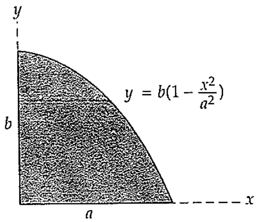


Figura Problema A.19

A.20 La figura plana es simétrica respecto a la recta inclinada 45° y su área vale 1600 mm^2. Su momento de inercia polar respecto al centroide *C* es $4(10^4)$ mm^4. Calcular los radios de giro (*a*) respecto al eje polar que pasa por *O* y (*b*) respecto al eje x_0.

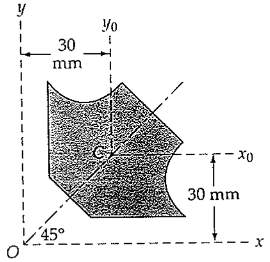


Figura Problema A.20

A.21 Hallar los momentos de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x e y. Emplear en ambos casos la misma área elemental.

Resp. $I_x = a^4/28$ $\qquad I_y = a^4/20$

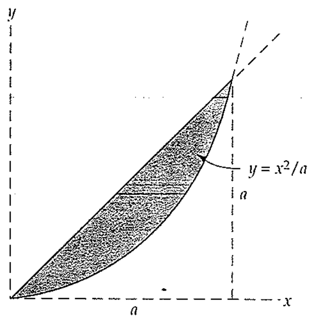


Figura Problema A.21

A.22 Demostrar que el momento de inercia de la superficie del cuadrado respecto a un eje cualquiera x' que pase por su centro es igual al momento de inercia respecto a un eje central x paralelo a un lado.

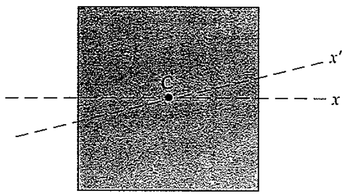


Figura Problema A.22

A.23 Hallar los momentos de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x e y.

Resp. $I_x = \dfrac{4}{9}\dfrac{ab^3}{\pi}$ $\qquad I_y = \dfrac{ba^3}{\pi}\left(1 - \dfrac{4}{\pi^2}\right)$

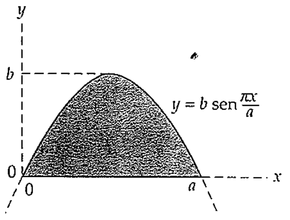


Figura Problema A.23

A.24 Mediante consideraciones de simetría, demostrar que para el semicírculo de la figura $I_{x'} = I_{y'} = I_x = I_y$ cualquiera que sea el ángulo α.

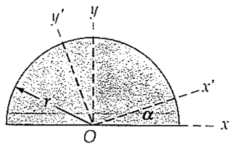


Figura Problema A.24

A.25 Hallar los momentos de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes y e y'.

Resp. $I_y = 1{,}786(10^{10})$ mm^4 $\qquad I_{y'} = 9{,}52(10^9)$ mm^4

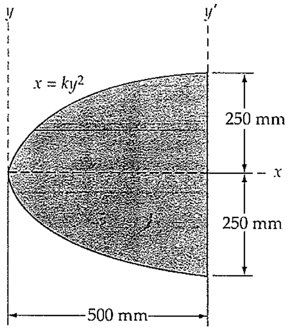


Figura Problema A.25

A.26 Hallar el radio de giro de la superficie sombreada respecto al eje y.

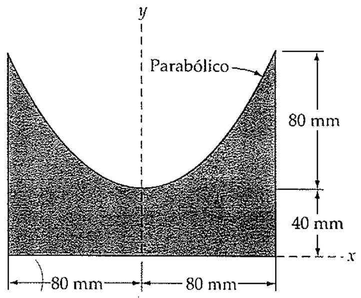


Figura Problema A.26

A.27 Hallar el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje y.

Resp. $I_y = 27{,}8(10^4)$ mm^4

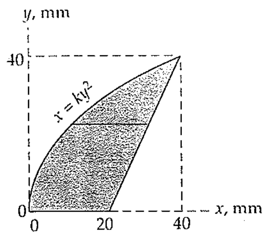


Figura Problema A.27

A.28 Una placa plana de área A y centroide C está sumergida en un líquido de densidad ρ. Demostrar que la resultante R de las fuerzas hidrostáticas que el líquido ejerce sobre una de las caras de la placa está aplicada en un punto P (llamado *centro de presión*) ubicado por $Y = I_x/(A\bar{y})$, siendo I_x el momento de inercia de la superficie respecto al eje x coplanario a la superficie e $\bar{y}$ la coordenada y del centroide O medida en el mismo plano de la placa.

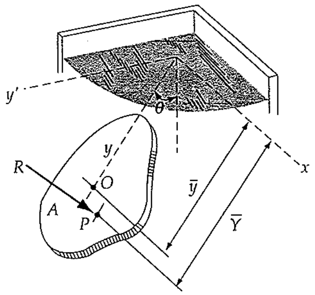


Figura Problema A.28

▶ **A.29** Calcular el momento de inercia respecto al eje x de la superficie sombreada común a los dos círculos.

Resp. $I_x = 0{,}1988r^4$

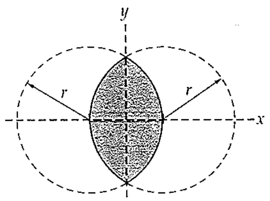


Figura Problema A.29

▶ **A.30** Un superficie plana tiene forma de franja espiral estrecha de ecuación $r = k\theta$ y anchura b constante. Tras una vuelta completa de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, el radio del extremo de la espiral vale R. Hallar el momento de inercia y el radio de giro polares de la superficie respecto a O.

Resp. $I_o = 1{,}609R^3b$ $\qquad k_o = 0{,}690R$

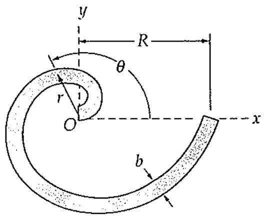


Figura Problema A.30

A.3 SUPERFICIES COMPUESTAS

Se presenta muchas veces la necesidad de calcular el momento de inercia de una superficie compuesta de varias partes de geometría sencilla y calculable. Dado que un momento de inercia es la integral, o suma, de productos de distancias al cuadrado por elementos de área, resulta que un momento será siempre una cantidad positiva. Por consiguiente, el momento de inercia de una superficie compuesta respecto a un eje dado no será sino la suma de los momentos de inercia respecto a ese mismo eje de cada una de las partes componentes. A menudo conviene contemplar una superficie compuesta como si estuviera constituida por partes positivas y negativas y, entonces, el momento de inercia de una superficie negativa será una cantidad negativa.

Cuando una superficie compuesta consta de gran número de partes, resulta cómodo tabular los datos de cada parte consignando su área A, su momento de inercia centroidal $\bar{I}$, la distancia d desde su eje centroidal hasta el eje respecto al cual se calcula el momento de inercia de toda la superficie, y el producto Ad^2. Según el teorema de Steiner, el momento de inercia de cualquiera de las partes respecto al eje deseado es $\bar{I} + Ad^2$; por tanto, el momento de inercia de toda la sección será $I = \Sigma\, \bar{I}\, + \Sigma Ad^2$.

Para una superficie compuesta contenida, por ejemplo, en el plano x-y, si empleamos la notación de la figura A.4 y hacemos que I_{x_0} sea $\bar{I}_x$ y que I_{y_0} sea $\bar{I}_y$, la tabla quedaría así:

Parte	Área, A	d_x	d_y	Ad_x^2	Ad_y^2	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$
			Totales	ΣAd_x^2	ΣAd_y^2	$\Sigma \bar{I}_x$	$\Sigma \bar{I}_y$

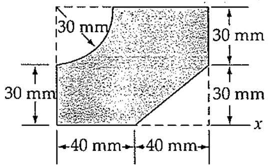
Empleando adecuadamente los totales, los momentos de inercia de la superficie compuesta respecto a los ejes x e y serán

$$I_x = \Sigma \bar{I}_x + \Sigma A d_x^2$$
$$I_y = \Sigma \bar{I}_y + \Sigma A d_y^2$$

Si bien es posible sumar los momentos de inercia parciales respecto a un eje dado para obtener el momento de inercia total de una superficie compuesta, no se puede hacer lo mismo con los radios de giro. El radio de giro de una superficie compuesta respecto a un eje está dado por $k = \sqrt{I/A}$, donde I es el momento de inercia total y A es el área total de la figura compuesta. Análogamente, el radio de giro k respecto a un eje polar que pase por un punto dado será $\sqrt{I_z/A}$, donde $I_z = I_x + I_y$ para unos ejes x-y centrados en ese punto.

PROBLEMA TIPO A.7

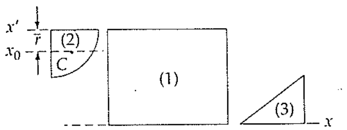
Calcular el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje x de la superficie sombreada de la figura.



Solución. La superficie se compone de la superficie positiva del rectángulo (1) y las superficies negativas del cuadrante de círculo (2) y el triángulo (3). Del problema tipo A.1 (o de la tabla D.3) sabemos que el momento de inercia del rectángulo es

$$I_x = \tfrac{1}{3}Ah^2 = \tfrac{1}{3}(80)(60)(60)^2 = 5{,}76(10^6)\ \text{mm}^4$$

Del problema tipo A.3 (o de la tabla D.3) sabemos que el momento de inercia respecto al eje x' del cuadrante negativo es



$$I_{x'} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\pi r^4}{4}\right) = -\frac{\pi}{6}(30)^4 = -0{,}1590(10^6)\ \text{mm}^4$$

Ahora, empleando el teorema de Steiner, trasladamos este resultado una distancia $\bar{r} = 4r/(3\pi) = 12{,}73$ mm y obtenemos el momento de inercia centroidal de la parte (2) (o bien, podemos emplear directamente la tabla D.3).

① $[\bar{I} = I - Ad^2]$
$$\bar{I}_x = -0{,}1590(10^6) - \left[-\frac{\pi(30)^2}{4}(12{,}73)^2\right] = -0{,}0445(10^6)\ \text{mm}^4$$

El momento de inercia respecto al eje x del cuadrante de círculo será

② $[I = \bar{I} + Ad^2]$
$$I_x = -0{,}0445(10^6) + \left[-\frac{\pi(30)^2}{4}\right](60 - 12{,}73)^2 = -1{,}624(10^6)\ \text{mm}^4$$

Por último, el momento de inercia de la superficie triangular negativa (3) respecto a su base es (o bien, consultamos la tabla D.3)

$$I_x = -\tfrac{1}{12}bh^3 = -\tfrac{1}{12}(40)(30)^3 = -0{,}09(10^6)\ \text{mm}^4$$

Por consiguiente, el momento de inercia total respecto al eje x de la superficie compuesta es

③
$$I_x = 5{,}76(10^6) - 1{,}624(10^6) - 0{,}09(10^6) = 4{,}046(10^6)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

El área total de la figura es $A = 60(80) - \frac{1}{4}\pi(30)^2 - \frac{1}{2}(40)(30) = 3493\ \text{mm}^2$, por lo que el radio de giro respecto al eje x es

$$k_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{4{,}046(10^6)/3493} = 34{,}0\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

① **Obsérvese que el momento de inercia del cuadrante hay que trasladarlo primero a su eje centroidal x_0 antes de trasladarlo al eje x, tal como se hizo en el problema tipo A.5.**

② **Aquí prestamos gran atención a los signos. Como la superficie es negativa, tanto $\bar{I}$ como A llevan signo negativo.**

③ **Si la superficie hubiera constado de más de tres partes, habríamos confeccionado una tabla con los valores de I y los valores de Ad^2 al objeto de sistematizar el cálculo de los sumandos de $I = \Sigma\, \bar{I}\, + \Sigma Ad^2$.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

A.31 Hallar el momento de inercia respecto al eje x del cuadrado sin el hueco circular centrado y con él.
Resp. $I_x = 21{,}3R^4$ $\quad I_x = 20{,}6R^4$

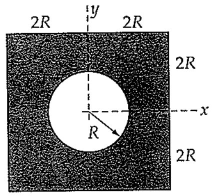


Figura Problema A.31

A.32 Hallar el momento de inercia polar del círculo sin el hueco cuadrado centrado y con él.

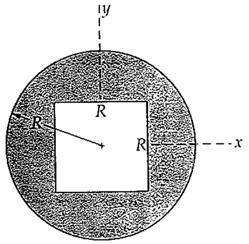


Figura Problema A.32

A.33 Calcular el radio de giro polar del perfil angular respecto al punto A. Obsérvese que la anchura de cada ala es pequeña frente a su longitud.

Resp. $k_A = 208$ mm

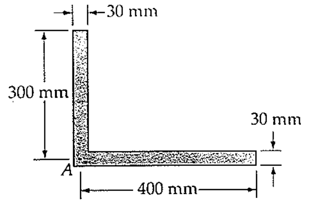

30 mm
300 mm
30 mm
A
400 mm

Figura Problema A.33

A.34 La sección recta de una viga en doble T de ala ancha tiene las dimensiones que se muestran. Obtener una buena aproximación al valor de manual de $\bar{I}_x = 2.70(10^8)$ mm^4 tratándola como una superficie compuesta de tres partes.

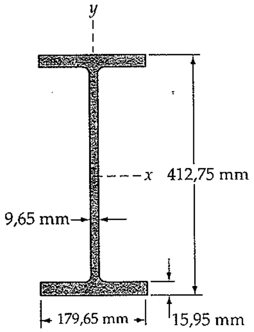

y
x
412,75 mm
9,65 mm
179,65 mm
15,95 mm

Figura Problema A.34

A.35 Hallar, por dos procedimientos, el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje x. El espesor de la pared es de 20 mm en los cuatro lados del rectángulo.

Resp. $I_x = 130{,}8(10^6)$ mm^4

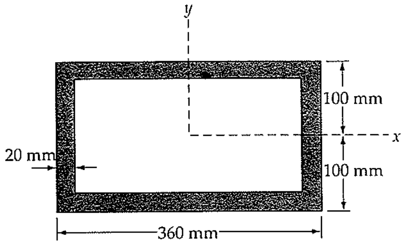

y
100 mm
x
20 mm
100 mm
360 mm

Figura Problema A.35

A.36 Hallar los momentos de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x e y.

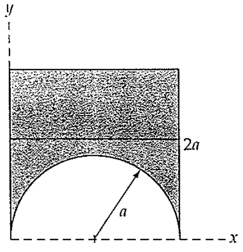


Figura Problema A.36

Problemas representativos

A.37 Hallar los momentos de inercia del perfil en Z respecto a sus ejes centroidales x_0 e y_0.

Resp. $\bar{I}_x = 22{,}6(10^6)\text{mm}^4$

$\bar{I}_y = 9{,}81(10^6)\text{mm}^4$

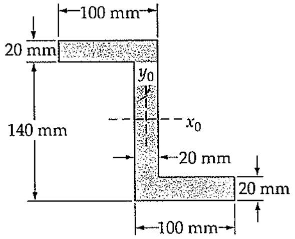

100 mm
20 mm
y0
140 mm
x0
20 mm
20 mm
100 mm

Figura Problema A.37

A.38 Hallar el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje y.

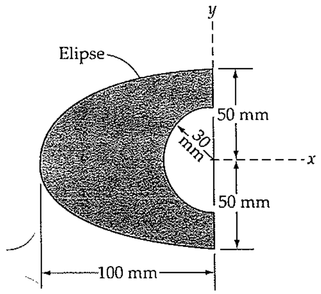

y
Elipse
50 mm
30 mm
x
50 mm
100 mm

Figura Problema A.38

A.39 Hallar, por dos procedimientos distintos, el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje x.

Resp. $I = \frac{58}{3}a^4$

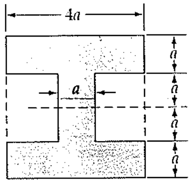


Figura Problema A.39

A.40 Calcular el momento de inercia de la sección recta de la viga respecto a su eje centroidal x_0.

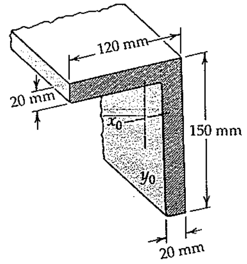

120 mm
20 mm
x0
150 mm
y0
20 mm

Figura Problema A.40

A.41 La vigueta de suelo, de medidas exactas 50 × 200 mm, tiene un orificio de 25 mm para el paso de una conducción de agua. Determinar la reducción porcentual n en el momento de inercia de la sección recta respecto al eje x (con relación a la viga sin taladro) en función de la posición del orificio para $0 \leq y \leq 87.5$ mm. Particularizar para $y = 50$ mm.

Resp. $n = 0.1953 + 0.00375y^2$ $\quad n = 9.57\%$

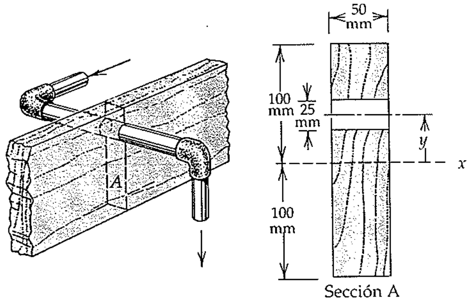

A
50 mm
100 mm
25 mm
y
x
100 mm
Sección A

Figura Problema A.41

A.42 Aprovechando los resultados del problema A.29, hallar el momento de inercia I_y de la superficie sombreada de la figura.

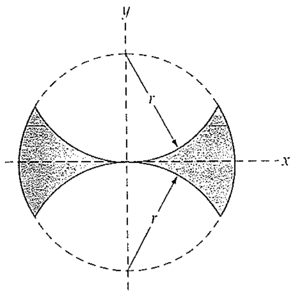


Figura Problema A.42

A.43 Deducir la expresión del momento de inercia de la superficie trapezoidal respecto a su base.

Resp. $I_x = \frac{1}{12}(b + 3a)h^3$

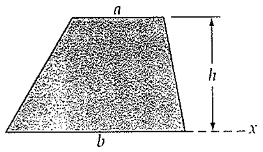


Figura Problema A.43

A.44 Para la superficie sombreada de la figura hallar el momento de inercia polar respecto al punto C.

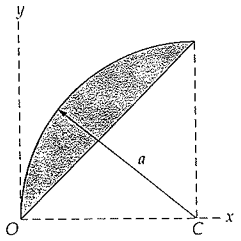


Figura Problema A.44

A.45 Aproximar el momento de inercia respecto al eje x del semicírculo dividiéndolo en cinco franjas horizontales de igual anchura. Calcular el momento de inercia de cada franja multiplicando su área (su anchura por la longitud de su línea media) por el cuadrado de la distancia de su linea media al eje x. Comparar el resultado con el valor exacto.

Resp. $I_x \cong 254(10^4)$ mm^4 $I_{x_{\text{exacta}}} = 245{,}4(10^4)$ mm^4

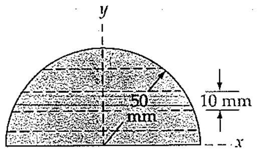


Figura Problema A.45

A.46 Calcular el radio de giro polar de la superficie indicada respecto al punto O. Obsérvese que las anchuras de las componentes son pequeñas en comparación con sus longitudes.

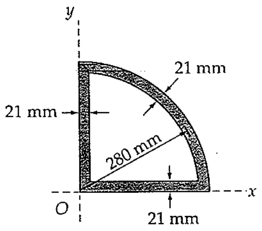


Figura Problema A.46

A.47 Un mástil hueco, cuya sección circular se representa, se pretende darle rígidez uniéndole en toda su longitud dos franjas de sección rectangular y del mismo material. Hallar la dimensión correcta h de cada casi rectángulo para que se duplique la rigidez del mástil a la flexión en el plano y-z. (La rigidez del mástil a la flexión en el plano y-z es proporcional al momento de inercia de la superficie respecto al eje x.)Tómese la cara interna de cada franja como plana.

Resp. $h = 47{,}5$ mm

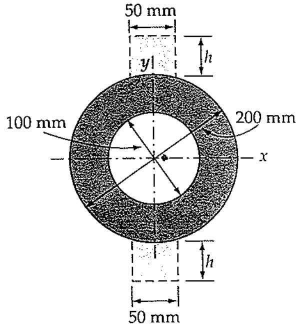


Figura Problema A.47

A.48 La superficie sombreada de la figura representa la sección recta de un cojinete de apoyo. Calcular su momento de inercia respecto a la base a-a.

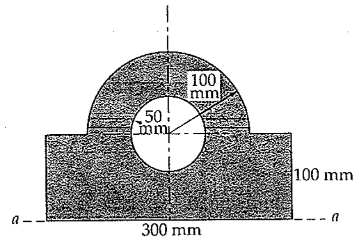


Figura Problema A.48

A.49 Desarrollar una fórmula para el momento de inercia de la superficie hexagonal regular de lado a respecto a su eje diametral x.

Resp. $I_x = \dfrac{5\sqrt{3}}{16}a^4$

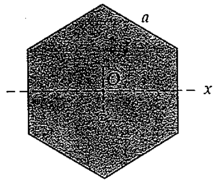
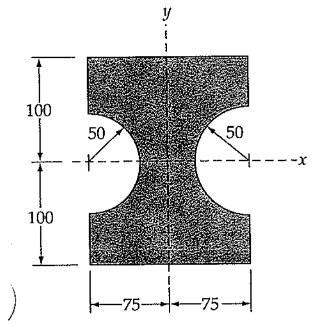


Figura Problema A.49

A.50 Calcular los momentos de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x e y.



Cotas en milímetros

Figura Problema A.50

A.51 Calcular el momento de inercia del perfil en U de 300 × 100 mm respecto a su eje centroidal x_0. Despréciense los acuerdos y los radios y compárese el resultado con el valor de manual $\bar{I}_x = 6{,}25(10^6)$ mm^4.

Resp. $\bar{I}_x = 6{,}24(10^6)$ mm^4

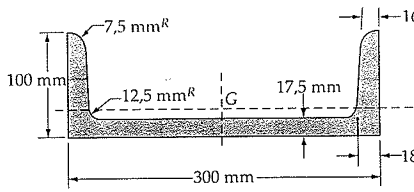


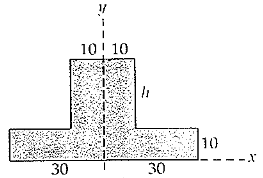
Figura Problema A.51

A.52 Para la viga de suelo con orificio de 50 × 200 mm del problema A.41, determinar una expresión para la reducción porcentual n que experimenta el momento de inercia de la superficie sombreada respecto a su eje centroidal x' (paralelo al eje x) con relación al momento de inercia de la sección completa no taladrada respecto al eje x. Expresar n en función de y en el intervalo $0 \leq y \leq 87{,}5$ mm. Particularizar para $y = 50$ mm.

Resp. $n = 0{,}1953 + 0{,}00429y^2$ $n = 10{,}91\%$

A.53 Calcular el valor de h para el cual es $I_x = I_y$ en la superficie sombreada de la figura. (*Indicación*: En este problema hay que resolver una ecuación de tercer grado. Consúltese el apartado C.4 o el C.11 del apéndice C.)

Resp. $h = 20{,}0$ mm



Cotas en milímetros

Figura Problema A.53

A.54 Para la sección de viga en doble T, determinar la anchura del ala b que hace iguales los momentos de inercia respecto a los ejes centroidales x e y. (*Sugerencia*: Léase la indicación del problema anterior.)

Resp. $b = 161$ mm

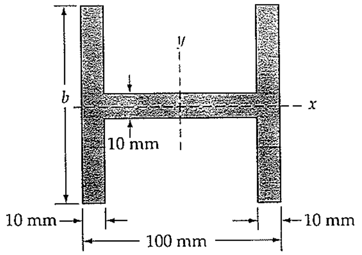


Figura Problema A.54

A.4 PRODUCTOS DE INERCIA Y ROTACION DE LOS EJES

(a) Definición. En ciertos problemas relativos a secciones rectas asimétricas y en el cálculo de los momentos de inercia respecto a ejes girados, aparece una expresión de la forma $dI_{xy} = xy\,dA$, a la que corresponde la integral

$$I_{xy} = \int xy\,dA \tag{A.7}$$

donde x e y son las coordenadas del elemento de área $dA = dx\,dy$. La cantidad I_{xy} recibe el nombre de *producto de inercia* de la superficie de área A respecto a los ejes x-y. A diferencia de los momentos de inercia, que son siempre positivos para las superficies positivas, un producto de inercia puede ser positivo, negativo o nulo.

Un producto de inercia será nulo cuando uno u otro de los ejes de referencia sea eje de simetría, como lo es el eje x en la figura A.5. Vemos aquí que la suma de los términos $x(-y)\,dA$ y $x(+y)\,dA$, debidos a elementos simétricamente situados respecto al eje x, es nula. Como la superficie completa podemos considerarla constituida por parejas de elementos de ese tipo, resulta que el producto de inercia de toda la superficie será nulo.

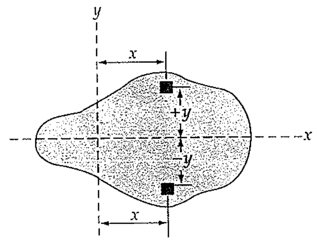


Figura Problema A.5

(b) Traslación de los ejes. Por definición, el producto de inercia de la superficie A de la figura A.4 respecto a los ejes x-y expresado en función de las coordenadas x_0 e y_0 del centroide es

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int (x_0 + d_y)(y_0 + d_x)\, dA \\ &= \int x_0 y_0\, dA + d_x \int x_0\, dA + d_y \int y_0\, dA + d_x d_y \int dA \end{aligned}$$

La primera integral es, por definición, el producto de inercia respecto a los ejes centroidales, que llamaremos $\bar{I}_{xy}$. Las dos integrales que siguen son igual a cero, puesto que el momento de primer orden de una superficie respecto a su propio centroide es necesariamente nulo. La cuarta integral no es más que $d_x d_y A$. Es decir, el teorema de Steiner, o de los ejes paralelos, que para los productos de inercia es

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A \qquad \text{(A.8)}$$

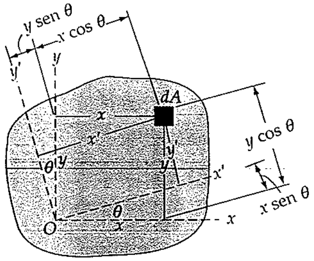


Figura Problema A.6

(c) Rotación de los ejes. El producto de inercia encuentra su aplicación cuando hay que calcular el momento de inercia de una superficie respecto a unos ejes inclinados. Esta consideración conduce directamente a la determinación de los ejes respecto de los cuales el momento de inercia es máximo o mínimo.

En la figura A.6 los momentos de inercia de la superficie respecto a los ejes x' e y' son

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int y'^2\, dA = \int (y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta)^2\, dA \\ I_{y'} &= \int x'^2\, dA = \int (y \operatorname{sen}\theta + x\cos\theta)^2\, dA \end{aligned}$$

donde x' e y' se han sustituido por sus expresiones en función de x e y.

Desarrollando y sustituyendo por las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

al tener en cuenta las definiciones de I_x, I_y e I_{xy}, resulta

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \\ I_{y'} &= \frac{I_x+I_y}{2} - \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \end{aligned} \qquad \text{(A.9)}$$

De forma análoga podemos escribir el producto de inercia respecto a los ejes inclinados

$$I_{x'y'} = \int x'y'\, dA = \int (y\operatorname{sen}\theta + x\cos\theta)(y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)\, dA$$

Desarrollando y sustituyendo por las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta \qquad \text{y} \qquad \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$$

al tener en cuenta las definiciones de I_x, I_y e I_{xy}, resulta

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad \text{(A.9}a\text{)}$$

Sumando las ecuaciones A.9 se tiene $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_z$, como expresión del momento de inercia polar respecto a O, lo cual coincide con la ecuación A.3.

El ángulo para el que $I_{x'}$ o $I_{y'}$ es máximo o mínimo puede determinarse anulando la primera derivada de $I_{x'}$ o $I_{y'}$ respecto a θ. O sea,

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = (I_y - I_x)\operatorname{sen} 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Designando por α este valor crítico del ángulo se tiene

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \qquad \textbf{(A.10)}$$

Esta ecuación A.10 da dos valores para 2α que difieren en π puesto que tg 2α = tg $(2\alpha + \pi)$. Por consiguiente, los dos valores de α diferirán en $\pi/2$. Uno de estos valores define el eje de momento de inercia máximo y el otro, el eje de momento de inercia mínimo. Estos dos ejes perpendiculares reciben el nombre de *ejes principales de inercia.*

Si los valores de 2θ definidos por A.10 los llevamos a A.9*a*, resulta que el producto de inercia para los ejes principales es nulo. Si en A.9 cambiamos los valores de sen 2θ y cos 2θ por los de sen 2α y cos 2α deducidos de la ecuación A.10, obtendremos los valores de los momentos de inercia principales

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x-I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \\ I_{\min} &= \frac{I_x+I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x-I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \end{aligned} \qquad \textbf{(A.11)}$$

(d) Círculo de Mohr. La relaciones A.9, A.9a, A.10 y A.11 pueden representarse gráficamente mediante un diagrama conocido como círculo de Mohr. Este permite determinar los valores de $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$, correspondientes al ángulo θ deseado, a partir de los valores dados de I_x, I_y e I_{xy}. En primer lugar, tomamos un eje horizontal al que llevar los valores de los momentos de inercia y un eje vertical al que llevar los valores del producto de inercia; véase la figura A.7. Seguidamente, en estos ejes ubicamos los puntos A, de coordenadas (I_x, I_{xy}), y B, de coordenadas $(I_y, -I_{xy})$. Tomando estos dos puntos como extremos de un diámetro, dibujamos una circunferencia. Resulta entonces que el ángulo que forma el radio OA con el eje horizontal es 2α, o sea, el doble del ángulo que en el superficie en cuestión forma el eje x con el eje de momento de inercia máximo. Tal como se indica, en el diagrama y en la superficie ambos ángulos se miden en el mismo sentido. Las coordenadas de un punto cualquiera C son $(I_{x'}, I_{x'y'})$ y las de su punto correspondiente D son $(I_{y'}, -I_{x'y'})$. El ángulo entre OA y OC es 2θ, o sea, el doble del ángulo que forman los ejes x y x'. Ambos ángulos se miden también, según se indica, en el mismo sentido. La trigonometría del círculo corrobora la concordancia de las ecuaciones A.9, A.9*a* y A.10 con lo expuesto.

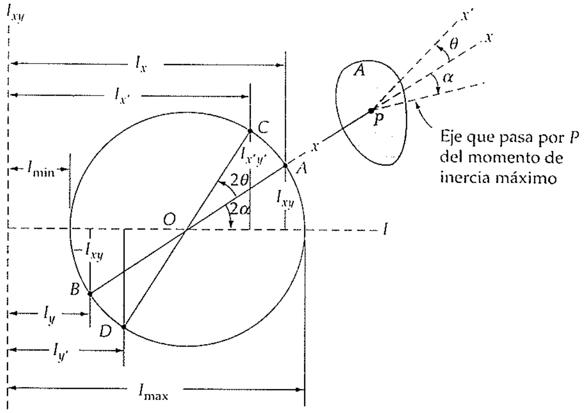
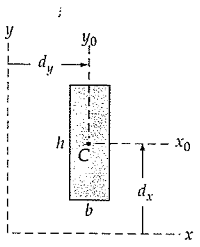


Figura A.7

PROBLEMA TIPO A.8

Hallar la expresión del producto de inercia de la superficie rectangular de centroide C respecto a los ejes x-y paralelos a sus lados.



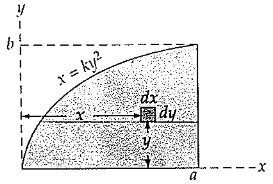
Solución. Como el producto de inercia I_{xy} respecto a los ejes x_0 e y_0 es cero por simetría, el teorema de Steiner nos da

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \qquad I_{xy} = d_x d_y bh \qquad \textit{Resp.}$$

En este ejemplo, tanto d_x como d_y se representan como positivas. Ha de ponerse cuidado en respetar los sentidos definidos para d_x y d_y de forma que se observen sus signos correctos.

PROBLEMA TIPO A.9

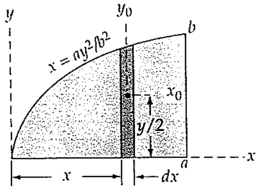
Determinar el momento de inercia respecto a los ejes x-y de la superficie encerrada bajo la parábola.



Solución. Haciendo $x = a$ para $y = b$, la ecuación de la curva es $x = ay^2/b^2$.

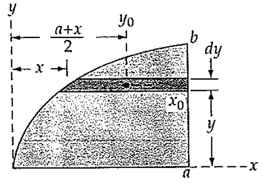
Solución I. Si partimos de un elemento de segundo orden $dA = dx\,dy$, tenemos $dI_{xy} = xy\,dx\,dy$. La integración sobre toda la superficie nos da

$$I_{xy} = \int_0^b \int_{(ay^2)/b^2}^a xy\;dx\;dy = \int_0^b \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{a^2y^4}{b^4}\right) y\;dy = \tfrac{1}{6}a^2b^2 \qquad \textit{Resp.}$$



Solución II. Otra posibilidad es emplear una franja como elemento diferencial de primer orden, con lo que haciendo uso de los resultados del problema tipo ① A.8 nos ahorramos una integración. Una franja vertical $dA = y\,dx$ nos da $dI_{xy} = 0 + (\frac{1}{2}y)(x)(y\,dx)$, donde las distancias a los ejes centroidales son $dx = y/2$ y $dy = x$. Entonces tenemos

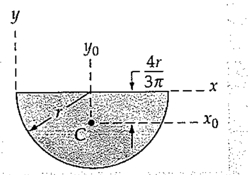
$$I_{xy} = \int_0^a \frac{y^2}{2}\,x\;dx = \int_0^a \frac{xb^2}{2a}\,x\;dx = \frac{b^2}{6a}\,x^3\Big]_0^a = \tfrac{1}{6}a^2b^2 \qquad \textit{Resp.}$$



① Si hubiéramos tomado una franja horizontal, habría resultado la expresión $dI_{xy} = y\frac{1}{2}(a + x)[(a - x)\;dy]$, que una vez integrada nos daría, desde luego, el mismo resultado.

PROBLEMA TIPO A.10

Determinar el producto de inercia de la superficie semicircular respecto a los ejes x-y.



① ***Solución.*** Podemos emplear el teorema de Steiner (ec. A.8) para escribir

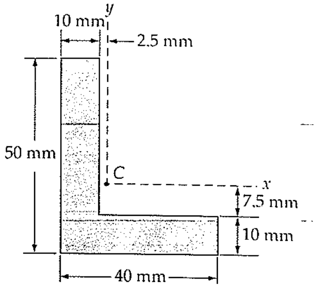
$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \qquad I_{xy} = 0 + \left(-\frac{4r}{3\pi}\right)(r)\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = -\frac{2r^4}{3} \qquad \textit{Resp.}$$

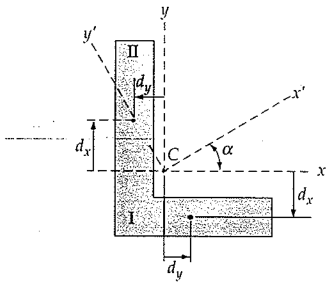
donde las coordenadas x e y del centroide C son $d_x = +r$ y $d_y = -4r/(3\pi)$. Como uno de los ejes centroidales es eje de simetría, $\bar{I}_{xy} = 0$.

① Empleando adecuadamente el teorema de Steiner se ahorra una cantidad de trabajo considerable en el cálculo de los momentos de inercia.

PROBLEMA TIPO A.11

Situar los ejes centroidales principales de inercia y hallar los correspondientes momentos de inercia máximo y mínimo para el perfil angular representado.





También podríamos haber empleado la ecuación A.11 para obtener los valores de I_{max} e I_{min}, o bien construido el círculo de Mohr con los valores calculados de I_x, I_y e I_{xy}. En la representación gráfica estos valores se utilizan para situar los puntos A y B, que son los extremos del diámetro del círculo. El ángulo 2α e I_{max} e I_{min} se obtienen tal como se indica en la figura.

Solución. La posición del centroide C se determina fácilmente y se indica en la figura.

Productos de inercia. Por simetría, el producto de inercia de cada rectángulo respecto a sus ejes centroidales paralelos a los ejes x e y es nulo. Entonces, el producto de inercia de la parte I respecto a los ejes x-y será

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \qquad I_{xy} = 0 + (-12{,}5)(+7{,}5)(400) = -3{,}75(10^4)\ \text{mm}^4$$

donde $\qquad d_x = -(7{,}5 + 5) = -12{,}5$ mm

y $\qquad d_y = +(20 - 10 - 2{,}5) = 7{,}5$ mm

Igualmente, para la parte II

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \qquad I_{xy} = 0 + (12{,}5)(-7{,}5)(400) = -3{,}75(10^4)\ \text{mm}^4$$

donde $\quad d_x = +(20 - 7{,}5) = 12{,}5$ mm, $\qquad d_y = -(5 + 2{,}5) = -7{,}5$ mm

Y para el perfil completo

$$I_{xy} = -3{,}75(10^4) - 3{,}75(10^4) = -7{,}50(10^4)\ \text{mm}^4$$

Momentos de inercia. Los momentos de inercia de la parte I respecto a los ejes x e y son

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_x = \tfrac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(12{,}5)^2 = 6{,}583(10^4)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(10)(40)^3 + (400)(7{,}5)^2 = 7{,}583(10^4)\ \text{mm}^4$$

y los de la parte II respecto a esos mismos ejes son

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_x = \tfrac{1}{12}(10)(40)^3 + (400)(12{,}5)^2 = 11{,}583(10^4)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(7{,}5)^2 = 2{,}583(10^4)\ \text{mm}^4$$

Así pues, para el perfil completo tenemos

$$I_x = 6{,}583(10^4) + 11{,}583(10^4) = 18{,}167(10^4)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = 7{,}583(10^4) + 2{,}583(10^4) = 10{,}167(10^4)\ \text{mm}^4$$

Ejes principales. La ecuación A.10 nos da la inclinación de los ejes principales de inercia; es decir

$$\left[\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right] \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(-7{,}50)}{10{,}167 - 18{,}167} = 1{,}875$$

$$2\alpha = 61{,}9° \qquad \alpha = 31{,}0° \qquad \textit{Resp.}$$

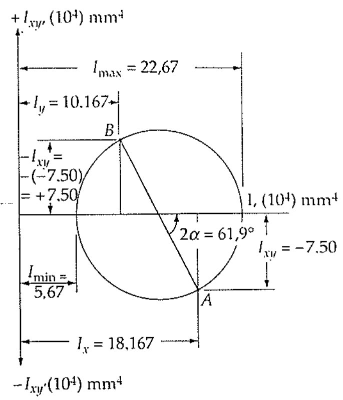
Ahora obtenemos los momentos de inercia principales de la ecuación A.9, sustituyendo por el valor de α el de θ y obtenemos I_{max} de la expresión de $I_{x'}$ e I_{min} de la expresión de $I_{y'}$. O sea

$$I_{max} = \left[\frac{18{,}167 + 10{,}167}{2} + \frac{18{,}167 - 10{,}167}{2}(0{,}4705) + (7{,}50)(0{,}8824)\right](10^4)$$

$$= 22{,}67(10^4)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

$$I_{min} = \left[\frac{18{,}167 + 10{,}167}{2} - \frac{18{,}167 - 10{,}167}{2}(0{,}4705) - (7{,}50)(0{,}8824)\right](10^4)$$

$$= 5{,}67(10^4)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

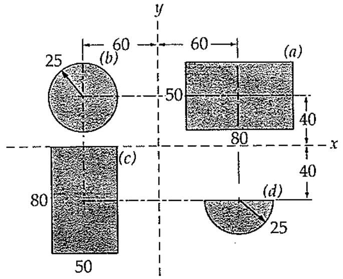


PROBLEMAS

Problemas introductorios

A.55 Hallar el producto de inercia de cada una de las cuatro superficies respecto a los ejes x-y.

Resp. (*a*) y (*c*) $I_{xy} = 9{,}60(10^6)$ mm⁴
(*b*) $I_{xy} = -4{,}71\ (10^6)$ mm⁴
(*d*) $I_{xy} = -2{,}98\ (10^6)$ mm⁴



Cotas en milímetros

Figura Problema A.55

A.56 Hallar el producto de inercia de la superficie rectangular respecto a los ejes x-y. Trátese el caso como si b fuese mucho menor que L.

A.57 Hallar I_x I_y e I_{xy} para la placa rectangular con los tres orificios circulares iguales.

Resp. $I_x = 2{,}44\ (10^8)$ mm⁴ $\qquad I_y = 9{,}80\ (10^8)$ mm⁴
$I_{xy} = -14{,}14\ (10^6)$ mm⁴.

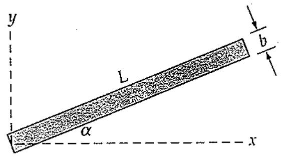
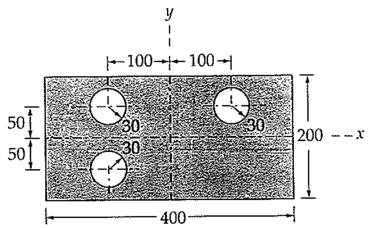


Figura Problema A.56



Cotas en milímetros

Figura Problema A.57

A.58 Hallar el producto de inercia de la superficie del anillo cuartocircular respecto a los ejes x-y. Trátese el caso como si b fuese mucho menor que r.

A.59 Hallar el producto de inercia de la superficie del cuarto de elipse respecto a los ejes x-y.

Resp. $I_{xy} = a^2b^2/8$

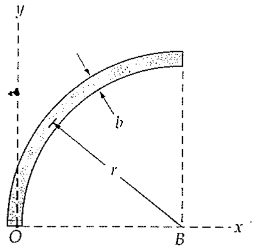


Figura Problema A.58

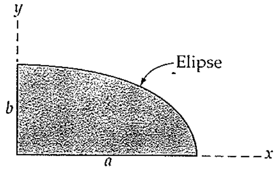


Figura Problema A.59

A.60 Hallar el producto de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x-y.

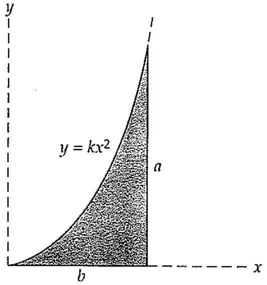


Figura Problema A.60

A.61 Obtener el producto de inercia de la superficie del sector circular respecto a los ejes x-y. Particularizar la expresión general conseguida a los casos de (a) cuadrante y (b) semicírculo.

$$Resp.\ I_{xy} = \frac{r^4}{16}(1 - \cos 2\theta)$$

$$(a) I_{xy} = r^4/8 \qquad (b) I_{xy} = 0$$

A.62 Deducir la expresión del producto de inercia de la superficie del triángulo rectángulo respecto a los ejes x-y y respecto a los ejes centroidales x_0-y_0.

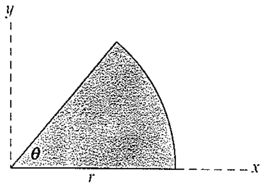


Figura Problema A.61

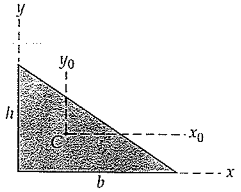


Figura Problema A.62

A.63 Deducir la expresión del producto de inercia de la superficie del triángulo rectángulo respecto a los ejes x-y. Resuélvase primero por doble integración y, a continuación, por integración simple tomando como elemento de área una franja vertical.

$$Resp.\ I_{xy} = \frac{b^2h^2}{8}$$

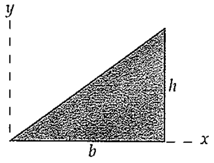


Figura Problema A.63

A.64 Obtener, por dos procedimientos diferentes, el producto de inercia de la superficie semicircular respecto a los ejes x-y.

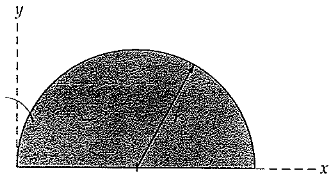


Figura Problema A.64

A.65 Hallar el producto de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x-y.

$Resp.\ I_{xy} = a^2b^2/16$

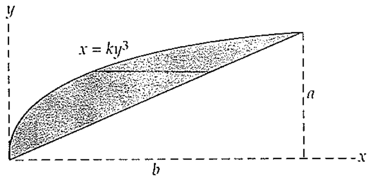


Figura Problema A.65

A.66 Los productos de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x-y y x'-y' son, respectivamente, 8 (10^6) mm^4 y -42(10^6) mm^4. Calcular el área de la figura sabiendo que su centroide es C.

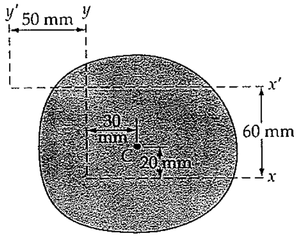
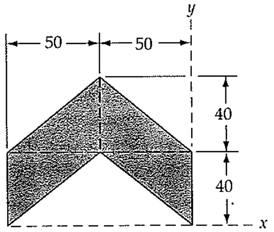


Figura Problema A.66

A.67 Hallar el producto de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes indicados. (*Sugerencia*: Localizar el centroide de la superficie simétrica.)

$Resp.\ I_{xy} = -8(10^6)$ mm^4



Cotas en milímetros

Figura Problema A.67

A.68 Hallar el producto de inercia de la superficie del rombo respecto a los ejes x-y. (*Sugerencia*: Considérese la superficie como una combinación de rectángulos y triángulos y aprovéchense los resultados del problema A.63.)

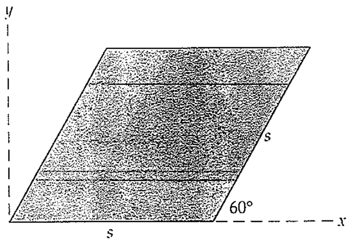


Figura Problema A.68

A.69 Calcular el producto de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x-y. (*Sugerencia*: Hágase uso del teorema de Steiner.)

$Resp.\ I_{xy} = -769\ (10^6)$ mm^4

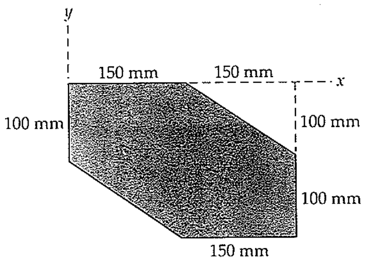


Figura Problema A.69

A.70 Hallar los momentos y el producto de inercia de la superficie del cuadrante de círculo respecto a los ejes x'-y'.

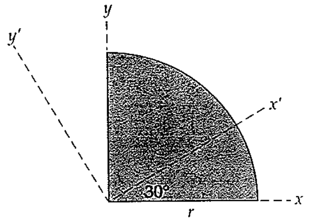


Figura Problema A.70

A.71 Hallar los momentos y el producto de inercia de la superficie del triángulo equilátero respecto a los ejes x'-y'.

Resp. $I_{x'} = 0.0277b^4$ $I_{y'} = 0.1527b^4$ $I_{x'y'} = 0.0361b^4$

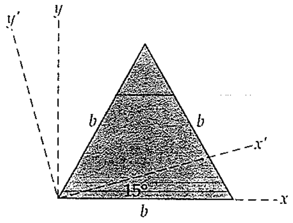


Figura Problema A.71

A.72 Si es $I_x = I_y$ para una superficie que sea simétrica respecto al eje x o al y, demostrar que el momento de inercia será el mismo y el producto de inercia será nulo respecto a todos los ejes que pasen por el origen.

A.73 Determinar las proporciones de la superficie rectangular para las cuales el momento de inercia respecto a un eje x' que pase por el punto medio C del lado mayor tenga un valor constante independiente de θ. (Véase el problema A.72.)

Resp. $a = 2b$

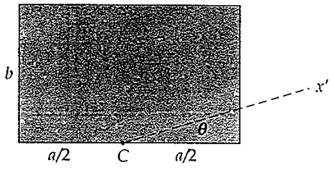


Figura Problema A.73

A.74 Dibujar el círculo de Mohr correspondiente a cada una de las cuatro superficies rectangulares cuyas proporciones y posiciones son las de la figura. Indicar sobre cada diagrama el punto A de coordenadas I_x, I_{xy} y el ángulo 2α, donde α es el ángulo que forma el eje x con el eje de momento de inercia máximo.

A.75 Para la superficie sombreada hallar los momentos de inercia máximo y mínimo respecto a los ejes indicados de origen O y determinar el ángulo θ que identifica al eje de momento de inercia mínimo.

Resp. $I_{\max} = 0{,}976a^4$ $I_{\min} = 0{,}476a^4$ con $\theta = \pi/4$

A.76 Para la superficie sombreada hallar I_x e I_y y comprobar que los eje x e y son ejes principales de inercia.

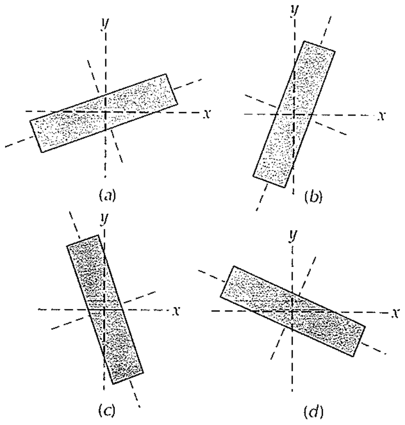


Figura Problema A.74

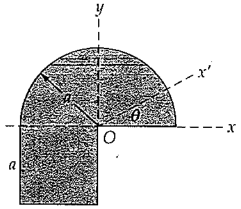


Figura Problema A.75

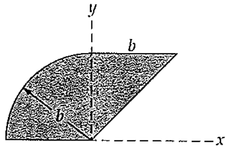


Figura Problema A.76

A.77 Determinar los momentos de inercia máximo y mínimo respecto a los ejes centroidales que pasan por C de la figura compuesta por las dos superficies rectangulares representadas. Hallar el ángulo α medido desde el eje x al eje de momento de inercia máximo.

Resp. $I_{\min} = 0{,}505a^4$ $I_{\max} = 6{,}16a^4$ $\alpha = 112{,}5°$

A.78 Demostrar que el valor del producto de inercia se puede obtener con la relación

$$I_{xy} = \sqrt{I_x I_y - I_{\max} I_{\min}}$$

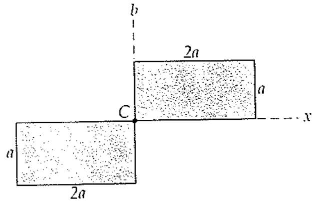


Figura Problema A.77

A.79 Para la superficie triangular de la figura hallar el momento de inercia máximo respecto a los ejes que pasan por O y el ángulo α correspondiente a ese eje de momento de inercia máximo. Dibujar además el círculo de Mohr para el punto O.

Resp. $I_{\max} = 71.7\ (10^6)\ \text{mm}^4$ $\alpha = -16{,}85°$

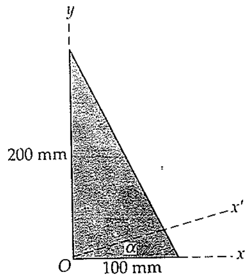


Figura Problema A.79

A.80 Los momentos de inercia centroidales máximo y mínimo de la superficie sombreada son, respectivamente, $12(10^6)\ \text{mm}^4$ y $2(10^6)\ \text{mm}^4$, siendo C el centroide y $4(10^6)\ \text{mm}^4$ el producto de inercia para la pareja de ejes x e y indicados. Utilizando el producto de inercia con el signo correcto, calcular I_x y el ángulo α, medido en sentido antihorario del eje x, al eje de momento de inercia máximo.

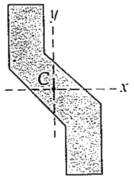


Figura Problema A.80

A.81 Los momentos y productos de inercia de una superficie respecto a los ejes x-y son $I_x = 7\ \text{m}^4$, $I_y = 12\ \text{m}^4$ e $I_{xy} = 6\ \text{m}^4$. Dibujar el círculo de Mohr y emplearlo para determinar los momentos principales de inercia y el ángulo α que forma el eje de momento de inercia máximo con el eje x.

Resp. $I_{\max} = 16\ \text{m}^4$
$I_{\min} = 3\ \text{m}^4$
$\alpha = 56{,}3°$ (H)

A.82 Calcular los momentos de inercia máximo y mínimo del perfil de la figura respecto a ejes que pasen por el canto A y hallar el ángulo α, medido en sentido antihorario, que forma el eje x con el de inercia máxima. Despréciense los pequeños radios y el acuerdo.

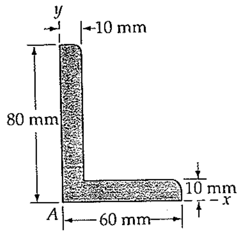


Figura Problema A.82

*PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

*A.83 Representar gráficamente en función de θ el momento de inercia respecto al eje x' de la superficie sombreada, desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 180°$. Obtener de la gráfica los valores máximo y mínimo de $I_{x'}$ y los correspondientes de θ. Comprobar esos valores con los que se obtienen con las ecuaciones A.10 y A.11.

Resp. $I_{\max} = 0{,}655b^4$ para $\theta = 45°$
$I_{\min} = 0{,}405b^4$ para $\theta = 135°$

*A.84 Representar gráficamente en función de θ el momento de inercia respecto al eje x' de la superficie sombreada, desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 90°$, y determinar el valor mínimo de $I_{x'}$ y el valor correspondiente de θ.

*A.85 Representar gráficamente en función de θ el momento de inercia respecto al eje x' del perfil en Z, desde $\theta = 0°$ hasta

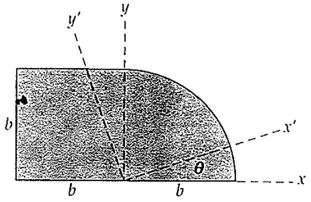


Figura Problema A.83

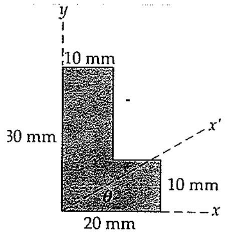


Figura Problema A.84

$\theta = 90°$. Obtener de la gráfica el valor máximo de $I_{x'}$ y el valor correspondiente de θ y verificar esos valores con los que se obtienen con las ecuaciones A.10 y A.11.

Resp. $I_{max} = 1{,}820(10^6)$ mm^4 para $\theta = 30{,}1°$

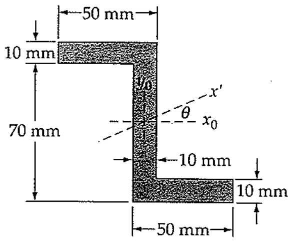


Figura Problema A.85

*A.86 Representar gráficamente en función de θ el momento de inercia respecto al eje x', desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 90°$ y determinar el valor máximo de $I_{x'}$ y el valor correspondiente de θ.

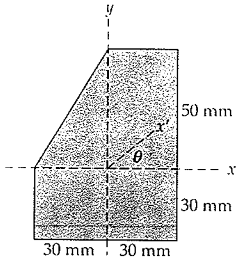


Figura Problema A.86

*A.87 Representar gráficamente en función de θ el momento de inercia respecto al eje x' de la superficie sombreada, desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 180°$. Determinar los valores máximo y mínimo de $I_{x'}$ y los valores correspondientes de θ.

Resp. $I_{max} = 0{,}2860b^4$, con $\theta = 131{,}1°$
$I_{min} = 0{,}0547b^4$, con $\theta = 41{,}1°$

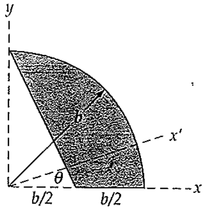
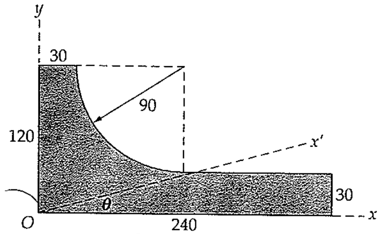


Figura Problema A.87

*A.88 Para la superficie sombreada, determinar, en función de θ, el momento de inercia respecto al eje x' que pasa por O y representar gráficamente la expresión obtenida en el intervalo $0° \leq \theta \leq 180°$. Buscar los valores máximo y mínimo y los ángulos θ correspondientes.



Cotas en milímetros

Figura Problema A.88

Apéndice B: Momentos de inercia de masas

En el apéndice B del *tomo* II, *Dinámica*, se presenta un tratamiento completo, teórico y práctico, del tema de los momentos de inercia de masas. Si bien esta magnitud física juega un papel de primera importancia en el estudio de la Dinámica del sólido rígido, en Estática no interviene para nada y, por ello, en este tomo sólo presentamos una breve definición de la misma para que el lector pueda apreciar las diferencias entre los momentos de inercia de superficies y de masas.

Consideremos el cuerpo tridimensional de masa m de la figura B.1. Por definición, su momento de inercia respecto al eje O-O es

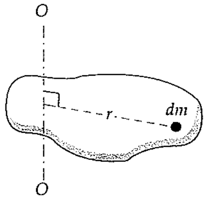


Figura B.1

$$I = \int r^2\, dm$$

donde r es la distancia al eje O-O de cada elemento de masa dm y la integración se extiende a todo el cuerpo. Para un cuerpo rígido dado, su momento de inercia másico constituye una medida de cómo está distribuida su masa con relación al eje de que se trate, y para tal eje es una propiedad invariable del cuerpo. Adviértase que sus dimensiones son (masa)(longitud)^2, o sea, kg · m^2 en unidades SI, mientras que las dimensiones del momento de inercia de una superficie son (longitud)^4, en, m^4 o bien mm^4 en unidades SI.

Apéndice C: Temas escogidos de matemáticas

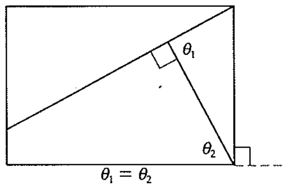
C.1 INTRODUCCIÓN

Este apéndice C contiene un resumen y formulario abreviado de temas fundamentales de matemáticas de aplicación frecuente en Mecánica. Las relaciones se trascriben sin demostración. Los estudiantes de Mecánica tendrán ocasiones frecuentes de utilizar muchas de estas relaciones y se encontrarán en desventaja si no las dominan perfectamente. Existen también otras materias que aquí no se incluyen que son asimismo necesarias de vez en cuando.

Cuando el lector repase y aplique sus conocimientos matemáticos, debe tener presente que la Mecánica es una ciencia aplicada que describe cuerpos materiales y movimientos reales. Por tanto, las interpretaciones geométrica y física de la matemática aplicada en cada caso deben tenerse presentes con toda claridad durante el desarrollo de la teoría y durante el planteo y resolución de los problemas.

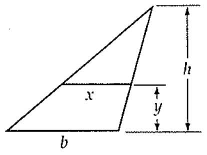
C.2 GEOMETRÍA PLANA

1. Cuando dos rectas que se cortan son respectivamente perpendiculares a otras dos rectas, los ángulos formados por cada pareja de rectas son iguales.



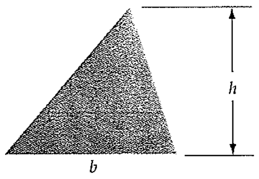
2. Triángulos semejantes

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

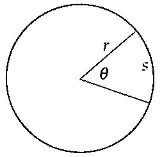


3 Para todo triángulo

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}bh$$

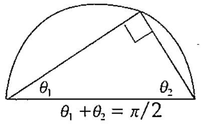


4. Círculo



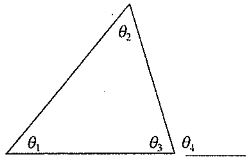
Perímetro = $2\pi r$
Área = πr^2
Longitud de arco $s = r\theta$
Área del sector = $\frac{1}{2}r^2\theta$

5. Todo triángulo inscrito en un semicírculo es rectángulo.



6. Ángulos de un triángulo

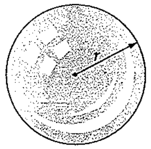
$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180°$$
$$\theta_4 = \theta_1 + \theta_2$$



C.3 GEOMETRÍA DEL ESPACIO

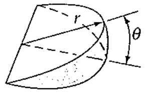
1. Esfera

Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$
Área de la superficie = $4\pi r^2$



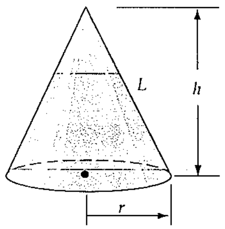
2. Cuña esférica

Volumen = $\frac{2}{3}r^3\theta$



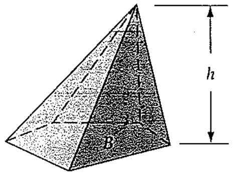
3. Cono circular recto

Volumen = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Área lateral = πrL
L = $\sqrt{r^2 + h^2}$



4. En toda pirámide o cono

Volumen = $\frac{1}{3}Bh$
donde B = área de la base



C.4 ÁLGEBRA

1. Ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ b^2 \geq 4ac \text{ si las raíces son reales}$$

2. Logaritmos

$b^x = y, x = \log_b y$

Logaritmos naturales
$b = e = 2{,}718282$
$e^x = y, x = \log_e y = \ln y$
$\log(ab) = \log a + \log b$
$\log(a/b) = \log a - \log b$
$\log(1/n) = -\log n$
$\log a^n = n \log a$
$\log 1 = 0$
$\log_{10} x = 0{,}4343 \ln x$

3. Determinantes

2° orden

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

3° orden

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} +a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 \\ -a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \end{array}$$

4. Ecuación de tercer grado

$x^3 = Ax + B$
Sea $p = A/3, q = B/2$

Caso I: $q^2 - p^3$ es negativo (tres raíces reales y distintas)

$$\cos u = q/(p\sqrt{p}), 0 < u < 180°$$
$$x_1 = 2\sqrt{p}\cos(u/3)$$
$$x_2 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 120°)$$
$$x_3 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 240°)$$

Caso II: $q^2 - p^3$ es positivo (una raíz real y dos imaginarias)

$$x_1 = (q + \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3} + (q - \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3}$$

Caso III: $q^2 - p^3 = 0$ (tres raíces reales, de las que dos son iguales)

$$x_1 = 2q^{1/3}, x_2 = x_3 = -q^{1/3}$$

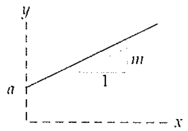
En el caso de una ecuación general de tercer grado

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

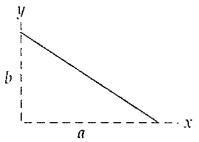
se hace el cambio $x = x_0 - a/3$ y se obtiene $x_0^3 = Ax_0 + B$. A continuación se procede como antes y se determina x_0 y después $x = x_0 - a/3$.

C.5 GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Línea recta

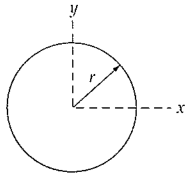


$y = a + mx$

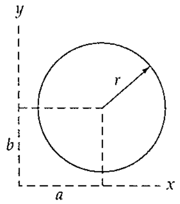


$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2. Círculo

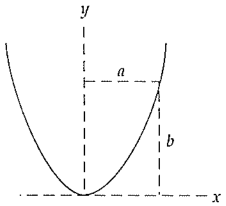


$x^2 + y^2 = r^2$

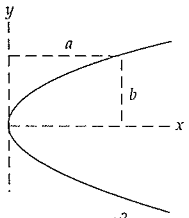


$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

3. Parábola

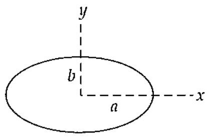


$y = b\frac{x^2}{a^2}$



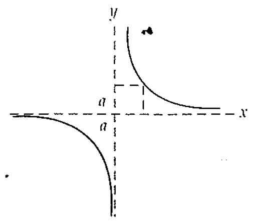
$x = a\frac{y^2}{b^2}$

4. Elipse

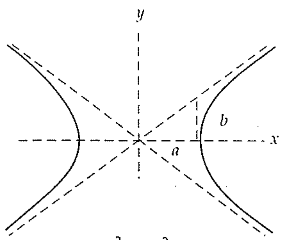


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

5. Hipérbola



$xy = a^2$

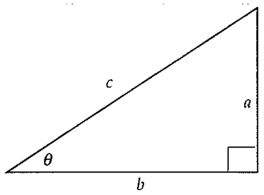


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

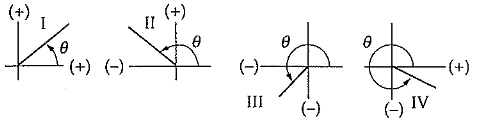
C.6 TRIGONOMETRÍA

1. Definiciones

$\operatorname{sen} \theta = a/c$	$\csc \theta = c/a$
$\cos \theta = b/c$	$\sec \theta = c/b$
$\operatorname{tg} \theta = a/b$	$\cot \theta = b/a$



2. Signos en los cuatro cuadrantes



	I	II	III	IV
$\operatorname{sen} \theta$	+	+	–	–
$\cos \theta$	+	–	–	+
$\operatorname{tg} \theta$	+	–	+	–
$\csc \theta$	+	+	–	–
$\sec \theta$	+	–	–	+
$\cot \theta$	+	–	+	–

3. Fórmulas varias

$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos \theta)}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos \theta)}$$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

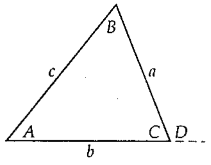
$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$

$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

4. Teorema del seno

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$



5. Teorema del coseno

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos D$

C.7 ÁLGEBRA VECTORIAL

1. Notación. Las magnitudes vectoriales se imprimen en negrita y las magnitudes escalares en cursiva común. Así, el módulo del vector **V** se escribe *V*. En la escritura ordinaria, las magnitudes vectoriales deben representarse por símbolos como $\underline{V}$ o $\vec{V}$ para distinguirlas de las escalares.

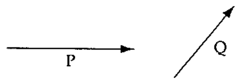
2. Adición

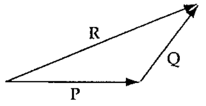
Triángulo de vectores **P** + **Q** = **R**

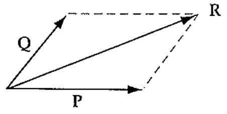
Paralelogramo de vectores **P** + **Q** = **R**

Conmutatividad **P** + **Q** = **Q** + **P**

Asociatividad **P** + (**Q** + **R**) = (**P** + **Q**) + **R**

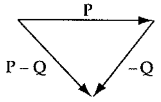






3. Resta

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$$



4. Vectores unitarios **i**, **j**, **k**

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$

donde $|V| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

5. ***Cosenos directores.*** *l*, *m* y *n* son los cosenos de los ángulos que forma **V** con los ejes *x*, *y* y *z*. Entonces

$$l = V_x/V \qquad m = V_y/V \qquad n = V_z/V$$

por lo que $\mathbf{V} = V(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$

y $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

6. ***Producto escalar***

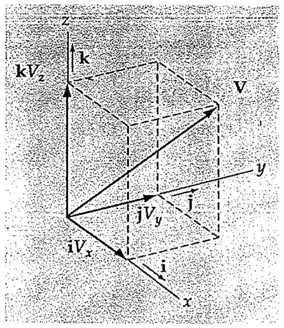
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta$$

Este producto puede considerarse como el producto del módulo de **P** por la componente *Q* cos θ de **Q** según la dirección de **P** o como el módulo de **Q** por la componente *P* cos θ de **P** según la dirección de **Q**.

Propiedad conmutativa $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$

De la definición de producto escalar

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\
\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 \\
\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} &= (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \cdot (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}) \\
&= P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \\
\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} &= P_x^2 + P_y^2 + P_z^2
\end{aligned}$$



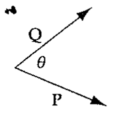
De la definición de producto escalar se deduce que dos vectores **P** y **Q** serán perpendiculares cuando se anule su producto escalar, **P** · **Q** = 0.

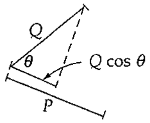
El ángulo θ que forman dos vectores $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ puede hallarse a partir de la expresión $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = P_1P_2 \cos \theta$ de su producto escalar y se tiene

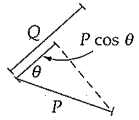
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{P_1P_2} = \frac{P_{1_x}P_{2_x} + P_{1_y}P_{2_y} + P_{1_z}P_{2_z}}{P_1P_2} = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

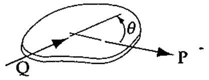
donde *l*, *m* y *n* son los respectivos cosenos directores de los vectores. Se observa también que dos vectores serán perpendiculares cuando sus cosenos directores cumplan la relación $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

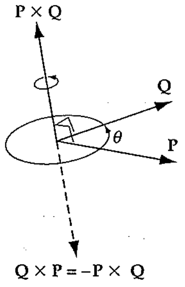
Propiedad distributiva $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R}$











7. *Producto vectorial.* El producto vectorial **P** × **Q** de los dos vectores **P** y **Q** es, por definición, un vector de módulo

$$|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}| = PQ \text{ sen } \theta$$

cuya dirección y sentido quedan definidos por la regla de la mano derecha tal como se indica en la figura. Invirtiendo el orden de los vectores y aplicando la regla de la mano derecha resulta **P** × **Q** = −**Q** × **P**.

Propiedad distributiva $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R}$

De la definición de producto vectorial resulta que para *todo sistema de coordenadas directo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

Con ayuda de estas identidades y de la propiedad distributiva, el producto vectorial puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}) \\ &= (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

El producto vectorial puede también escribirse en forma de determinante

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

8. *Otras relaciones*

Producto mixto (**P** × **Q**) · **R** = **R** · (**P** × **Q**). El punto y el aspa pueden intercambiarse mientras se conserve el orden de los vectores. El paréntesis es superfluo puesto que **P** × (**Q** · **R**) carece de sentido ya que no es posible multiplicar vectorialmente un vector **P** por un escalar **Q** · **R**. Así pues, la expresión puede escribirse

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$$

El producto mixto puede desarrollarse en forma de determinante

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Doble producto vectorial $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{R} = -\mathbf{R} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$
$= \mathbf{R} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{P})$

En este caso es necesario el uso del paréntesis ya que la expresión **P** × **Q** × **R** sería ambigua por no especificar qué vectores hay que multiplicar vectorialmente. Puede demostrarse que el doble producto vectorial equivale a

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{PQ} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{QP}$$

o bien $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{RQ} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{QR}$

El primer término de la primera expresión, por ejemplo, es el producto escalar **R** · **P**, que es un escalar, multiplicado por el vector **Q**.

9. *Las derivadas de los vectores* cumplen las misma reglas que las de los escalares

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k}$$
$$\frac{d(\mathbf{P}u)}{dt} = \mathbf{P}\dot{u} + \dot{\mathbf{P}}u$$
$$\frac{d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{Q}$$
$$\frac{d(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}$$

4. *Integración de vectores.* Si es **V** una función de x, y y z y es $d\tau = dx\,dy\,dz$ un elemento de volumen, la integral de **V** extendida a un volumen puede escribirse como suma vectorial de las tres integrales

$$\int \mathbf{V} d\tau = \mathbf{i}\int V_x\, d\tau + \mathbf{j}\int V_y\, d\tau + \mathbf{k}\int V_z\, d\tau$$

C.8 SERIES

(La expresión entre corchetes a continuación de la serie indica el dominio de convergencia.)

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots \qquad [x^2 < 1]$$

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{donde } a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

[Desarrollo de Fourier para $-l < x < l$]

C.9 DERIVADAS

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \qquad \frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} \Delta x = \operatorname{sen} dx = \operatorname{tg} dx = dx$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos \Delta x = \cos dx = 1$$

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x, \qquad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d \operatorname{senh} x}{dx} = \cosh x, \qquad \frac{d \cosh x}{dx} = \operatorname{senh} x, \qquad \frac{d \operatorname{tgh} x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

C.10 INTEGRALES

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sqrt{a+bx} \, dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x\sqrt{a+bx} \, dx = \frac{2}{15b^2}(3bx-2a)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx} \, dx = \frac{2}{105b^3}(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}} \, dx = -\sqrt{a+x}\sqrt{b-x} + (a+b)\operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{a+x}{a+b}}$$

$$\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a + bx - a \ln(a+bx)]$$

$$\int \frac{xdx}{(a+bx)^n} = \frac{(a+bx)^{1-n}}{b^2}\left(\frac{a+bx}{2-n} - \frac{a}{1-n}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{ab}}{b} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{1}{\sqrt{-ab}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \ln(a+bx^2)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2} \, dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2} \, dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2} \, dx = -\tfrac{1}{5}(x^2 + \tfrac{2}{3}a^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)$$

$$\text{o bien} \qquad = \frac{-1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \tfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x$$

$$\int \operatorname{tgh} x \, dx = \ln \cosh x$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} px\,dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} px - p\cos px)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax}\cos px\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos px + p\operatorname{sen} px)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(a\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(a\cos^2 x + \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen} 2x - \cos 2x\right)$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{3}(2+\operatorname{sen}^2 x)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{3}(2+\cos^2 x)$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x$$

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{sen} x - x\cos x$$

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\operatorname{sen} x$$

$$\int x^2\operatorname{sen} x\,dx = 2x\operatorname{sen} x - (x^2-2)\cos x$$

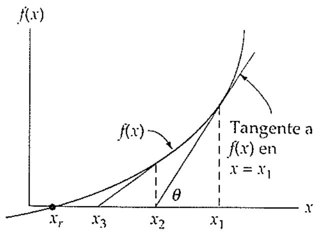
$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2-2)\operatorname{sen} x$$

$$\text{Radio de curvatura}\begin{cases} \rho_{xy} = \dfrac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \\[2ex] \rho_{r\theta} = \dfrac{\left[r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}} \end{cases}$$

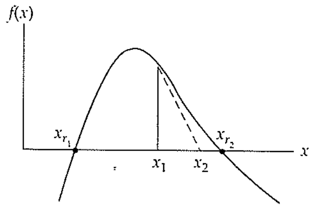
C.11 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR EL MÉTODO NUMÉRICO DE NEWTON

Muchas veces, al aplicar las leyes fundamentales de la Mecánica se llega a una ecuación algebraica o transcendente no soluble (o no fácilmente soluble) en forma exacta. En estos casos, algún método iterativo, como el de Newton por ejemplo, puede ser una potente herramienta para obtener con buena aproximación la raíz o raíces de la ecuación.

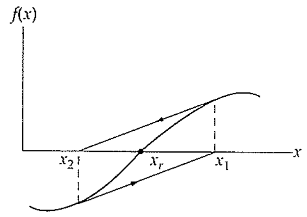
La ecuación a resolver la ponemos en la forma $f(x) = 0$. En la parte (*a*) de la figura que se acompaña se representa una función cualquiera $f(x)$ en las proximidades de la raíz buscada x_r. Obsérvese que x es simplemente el valor de x al que la función cruza el eje x. Supongamos que se dispone (quizá mediante una representación gráfica hecha a mano) de un primer valor aproximado x_1 de esa raíz. Con tal que x_1 no esté cerca de un máximo o un mínimo de la función $f(x)$, podemos aproximarnos más a la raíz x_r prolongando la tangente a $f(x)$ en x_1 hasta que corte al eje en x_2. Observando la figura se ve que



(*a*)



(*b*)



(*c*)

$$\operatorname{tg}\theta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

donde $f'(x_1)$ es la derivada de $f(x)$ respecto a x particularizada en $x = x_1$. Despejando x_2 resulta

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

El término $-f(x_1)/f'(x_1)$ es una corrección al primer valor aproximado x_1. Una vez calculado el valor x_2, el proceso puede repetirse para obtener x_3, y así sucesivamente.

Por tanto, la expresión anterior puede generalizarse así

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

donde

x_{k+1} = $(k+1)$-ésima aproximación a la raíz buscada x_r
x_k = k-ésima aproximación a la raíz buscada
$f(x_k)$ = función $f(x)$ particularizada en $x = x_k$
$f'(x_k)$ = derivada de la función particularizada en $x = x_k$

La fórmula se aplica repetidamente hasta que $f(x_{k+1})$ se acerque suficientemente a cero y $x_{k+1} \cong x_k$. El lector deberá comprobar que la fórmula es válida para todas las posibles combinaciones de signos de x_k, $f(x_k)$ y $f'(x_k)$.

Proceden algunas advertencias:

1. Es evidente que $f'(x_k)$ no debe ser cero ni próxima a cero. Ello supondría, como se condicionó antes, que x_k corresponde exacta o aproximadamente a un mínimo o a un máximo de $f(x)$. Si la pendiente $f'(x_k)$ es nula, su prolongación no cortará nunca al eje x. Si la pendiente $f'(x_k)$ es pequeña, la corrección a x_k podría ser tan grande que x_{k+1} fuese una aproximación a la raíz

peor que x_k. Por esta razón, la experiencia aconseja limitar el valor del término correctivo o sea que si el valor absoluto de $f(x_k)/f'(x_k)$ es mayor que un valor máximo prefijado, se emplea ese valor máximo.

2. Si la ecuación $f(x) = 0$ posee varias raíces, debemos estar en las proximidades de la raíz buscada x_r para que el algoritmo converja realmente hacia esa raíz. En la parte (*b*) de la figura se representa una situación en la que la aproximación inicial x_1 produce la convergencia hacia x_{r_2} y no hacia x_{r_1}.
3. Puede tener lugar una oscilación de un lado a otro de la raíz si, por ejemplo, la función es antisimétrica respecto a una raíz que sea un punto de inflexión. Para evitar este efecto, que se representa en la parte (*c*) de la figura, suele bastar con emplear la mitad del término correctivo.

Ejemplo. Comenzando con un valor aproximado inicial $x_1 = 5$, aproximar la raíz única de la ecuación $e^x - 10 \cos x - 100 = 0$.

En la tabla siguiente se resume la aplicación del método de Newton a la ecuación dada. El proceso iterativo se dio por terminado cuando el valor absoluto de la corrección $-f(x_k)/f'(x_k)$ se hizo inferior a 10^{-6}.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1} - x_k = -\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
1	5,000 000	45,576 537	138,823 916	−0,328 305
2	4,671 695	7,285 610	96,887 065	−0,075 197
3	4,596 498	0,292 886	89,203 650	−0,003 283
4	4,593 215	0,000 527	88,882 536	−0,000 006
5	4,593 209	$-2(10^{-8})$	88,881 956	$2,25(10^{-10})$

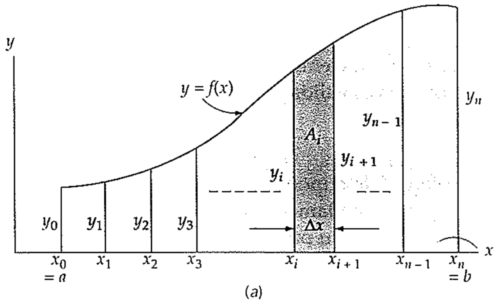
C.12 TÉCNICAS ESCOGIDAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

1. Determinación de una área. Consideremos el problema de determinar el área de la superficie sombreada, que se indica en la parte (*a*) de la figura, limitada por la curva $y = f(x)$ y las abscisas $x = a$ y $x = b$ y que no sea factible la integración analítica. La función debe conocerse, bien en forma tabular por mediciones empíricas, bien en forma analítica; además, se supone que es continua en el intervalo $a < x < b$. La superficie podemos dividirla en n franjas verticales, de anchura $\Delta x = (b - a)/n$ cada una y luego sumar las áreas de todas las franjas para obtener $A = \int y\, dx$. En la figura se muestra con un sombreado más oscuro una franja representativa de área A_i. Se exponen brevemente tres procedimientos muy útiles de aproximación numérica. En todos ellos, cuanto mayor sea el número de franjas, mayor será la precisión que geométricamente proporcione la aproximación. Como regla general, puede comenzarse con un número de franjas relativamente pequeño y aumentar ese número hasta que las consiguientes variaciones en el valor aproximado del área ya no mejore la precisión deseada.

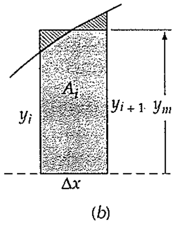
I. *Aproximación por rectángulos* [figura (*b*)] Se supone que las franjas son de superficie rectangular, tal como se muestra mediante la franja representativa, cuya altura y_m se toma a ojo de tal modo que las pequeñas superficies rayadas tengan unas áreas lo más iguales posible. Entonces, formamos la suma Σy_m de las alturas efectivas y multiplicamos por Δx. Si la función se conoce en forma analítica, para emplearla en la suma puede calcularse cada y_m como valor de la función en el punto medio $x_i + \Delta x/2$ de la base de cada rectángulo.

II. *Aproximación trapezoidal* [figura (*c*)] Se supone que las franjas son de superficie trapezoidal, tal como se muestra mediante la franja representativa. El área A_i de ésta es igual a la altura media $(y_i + y_{i+1})/2$ multiplicada por Δx. Sumando las áreas de todas las franjas se obtiene el valor aproximado del área tal como figura en la tabla. Para nuestro caso, si la curvatura es como se representa, la aproximación resultará por defecto. Si la curvatura fuese la contraria, la aproximación resultaría por exceso.

III. *Aproximación parabólica* [figura (*d*)] En este caso, la superficie comprendida entre la cuerda y la curva (que se desprecia en la aproximación trapezoidal)



(*a*)

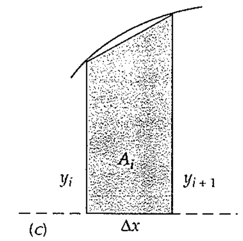


(*b*)

Rectángulo

$$Ai = y_m \Delta x$$

$$A = \int y\, dx \cong \Sigma y_m \Delta x$$

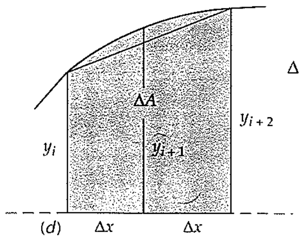


(*c*)

Trapezoidal

$$A_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta x$$

$$A = \int y\, dx \cong \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \Delta x$$



(*d*)

Parabólica

$$\Delta A = \frac{1}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) \Delta x$$

$$A = \int y\, dx \cong \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \Delta x$$

puede tenerse en cuenta aproximando la curva mediante una parábola definida por tres valores sucesivos de y. El área de esa superficie puede calcularse a partir de la geometría de la parábola y sumarse al área del trapezoide formado por la pareja de franjas, obteniéndose así el área ΔA de la pareja tal como se expone en la figura. Al sumar todas las áreas ΔA resulta la tabla que se muestra, conocida como regla de Simpson. Para aplicar la regla de Simpson, el número n de franjas ha de ser par.

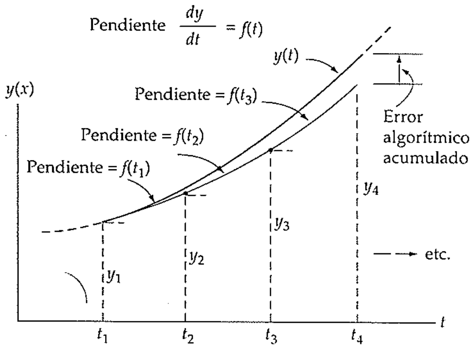
Ejemplo: Determinar el área de la superficie limitada por la curva $y = x\sqrt{1 + x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 2$. (Como ejemplo se toma una función integrable para que puedan compararse los tres valores aproximados con el valor exacto, que es

$$A = \int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \tfrac{1}{3}(5\sqrt{5}-1) = 3{,}393\,447.)$$

NÚMERO DE SUBINTERVALOS	APROXIMACIÓN RECTÁNGULOS	TRAPEZOIDAL	PARABÓLICA
4	3,361 704	3,456 731	3,392 214
10	3,388 399	3,403 536	3,393 420
50	3,393 245	3,393 850	3,393 447
100	3,393 396	3,393 547	3,393 447
1000	3,393 446	3,393 448	3,393 447
2500	3,393 447	3,393 447	3,393 447

Obsérvese que el error del peor valor aproximado es inferior al 2 por ciento incluso con sólo cuatro franjas.

2. Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Es frecuente que la aplicación de las leyes fundamentales de la Mecánica de por resultado relaciones diferenciales. Consideremos una de primer orden tal como $\frac{dy}{dt} = f(t)$, donde la función $f(t)$ no sea inmediatamente integrable o se conozca sólo en forma tabular. Podemos proceder a su integración numérica recurriendo a una técnica sencilla por proyección de pendientes, conocida como método de integración de Euler, que se ilustra en la figura.



A partir de t_1, donde conocemos el valor y_1, proyectamos la pendiente sobre un intervalo horizontal o incremento $(t_2 - t_1)$ y vemos que, $y_2 = y_1 + f(t_1)(t_2 - t_1)$. Este proceso podemos repetirlo en y_2 y luego sucesivamente hasta llegar al valor deseado de t. La expresión general será, pues,

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Si y en función de t fuese lineal, es decir, si $f(t)$ fuese constante, el método daría un resultado exacto y no habría necesidad de la aproximación numérica en tal caso. Pero la variación de la pendiente dentro de cada intervalo introduce un error. Para el caso representado, el valor estimado y_2 es evidentemente inferior al valor de la función $y(t)$ para $t = t_2$. Hay técnicas de integración más precisas (como el método de Runge-Kutta) que tienen en cuenta la variación de la pendiente en los subintervalos y, por ello, dan unos resultados mejores.

Al tratar con funciones analíticas, al igual que al determinar áreas, la experiencia es muy valiosa para elegir la longitud de los intervalos o incrementos. Como regla muy general, se recomienda empezar con un intervalo relativamente grande y, luego, reducirlo paulatinamente hasta que la variación en el valor resultante de la integral sea muy inferior a la precisión deseada. Ahora bien, un intervalo demasiado pequeño puede producir un aumento en el error a causa de que el número de operaciones realizadas por el ordenador resulte muy elevado. Este tipo de error se conoce generalmente como "error de redondeo", mientras que el error debido a un intervalo grande se conoce como error algorítmico.

Ejemplo: Para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 5t$, con la condición inicial $y(0) = 2$, hallar $y(4)$.

Aplicando el método de Euler se obtienen los resultados siguientes:

NÚMERO DE SUBINTERVALOS	LONGITUD DEL INTERVALO	y en $t = 4$	ERROR PORCENTUAL
10	0,4	38	9,5
100	0,04	41,6	0,95
500	0,008	41,92	0,19
1000	0,004	41,96	0,10

Este es un caso sencillo que es posible integrar analíticamente y cuyo resultado exacto es $y = 42$.

Apéndice D: Tablas útiles

TABLA D.1 PROPIEDADES FISICAS

Densidad (kg/m^3)

	kg/m^3		kg/m^3
Aceite (med.)	900		
Acero	7 830	Madera (blanda,pino)	480
Agua (dulce)	1 000	(dura, roble)	800
(salada)	1 030	Mercurio	13 570
Aire*	1,2 062	Oro	19 300
Aluminio	2 690	Plomo	11 370
Cobre	8 910	Tierra (húm. med.)	1 760
Hielo	900	(seca. med.)	1 280
Hierro (colado)	7 210	Titanio	3 080
Hormigón (med.)	2 400	Vidrio	2 590

*A 20 °C y presión atmosferica

Valores típicos del coeficiente de rozamiento[1]

Superficies en contacto	Estático, μ_e	Cinético μ_c
Acero sobre acero (seco)	0,6	0,4
Acero sobre acero (engrasado)	0,1	0,05
Teflón sobre acero	0,04	0,04
Acero sobre metal blanco (seco)	0,4	0,3
Acero sobre metal blanco (engrasado)	0,1	0,07
Latón sobre acero (seco)	0,5	0,4
Forro de frenos sobre fundición	0,4	0,3
Neumáticos de caucho sobre pavimento (seco)	0,9	0,8
Cable sobre polea de hierro (seco)	0,2	0,15
Cuerda de cáñamo sobre metal	0,3	0,2
Metal sobre hielo		0,02

---

[1] (Los coeficientes de la tabla siguiente representan valores típicos sólo en condiciones ordinarias de trabajo. Los verdaderos coeficientes correspondientes a una situación dada dependerán de la naturaleza exacta de las superficies en contacto. Puede esperarse una variación del 25% o más respecto a estos valores en las aplicaciones prácticas, según sean las condiciones de limpieza, pulido de la superficie, presión, lubricación y velocidad.)

TABLA D.2 CONSTANTES DEL SISTEMA SOLAR

CUERPO	DISTANCIA MEDIA AL SOL, km	EXENTRICIDAD DE LA ORBITA, *e*	PERIODO DE LA ÓRBITA días solares	DIÁMETRO MEDIO, km	MASA RELATIVA A LA TIERRA	GRAVEDAD EN LA SUPERFICIE m/s^2	VELOCIDAD DE ESCAPE km/s
Sol	—	—	—	1 392 000	333 000	274	616
Luna	384 398 †	0,055	27,32	3 476	0,0123	1,62	2,37
Mercurio	$5{,}73 \times 10^6$	0,206	87,97	5 000	0,054	3,47	4,17
Venus	108×10^6	0,0068	224,70	12 400	0,815	8,44	10,24
Tierra	$149{,}6 \times 10^6$	0,0167	365,26	12 742 ††	1,000	9,821 †††	11,18 †††
Marte	$227{,}9 \times 10^6$	0,093	686,98	6 788	0,107	3,73	5,03

Constante de la Gravitación Universal	G = 6,673(10-11) $m^3/(kg{\cdot}s^2)$
Masa de la Tierra	m = 5,976 (10 24) kg
Periodo de rotación de la Tierra (1 día sidéreo)	= 23 h 56 min 4 s
Velocidad angular de la Tierra	ω = 0,7292(10^{-4}) rad/s
Velocidad angular del radio vector Tierra-Sol	ω' = 0,1991(10^{-6}) rad/s
Velocidad media del centro de la Tierra respecto al Sol	= 107 200 km/h

† Distancia media a la Tierra (entre centros)

†† Diámetro de la esfera de igual volumen, basado en una Tierra esferoidal con un diámetro polar de 12714 km y un diámetro ecuatorial de 12756 km

††† Para una Tierra esférica sin rotación, equivalente al valor absoluto al nivel del mar y una latitud de 37,5°

TABLA D.3 PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS

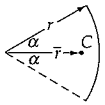
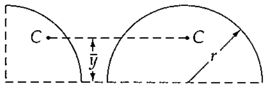
FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
Arco de circunferencia 	$\bar{r} = \dfrac{r \text{ sen } \alpha}{\alpha}$	—
Cuadrante y semicircunferencia 	$\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$	—

TABLA D.3 PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS (continuación)

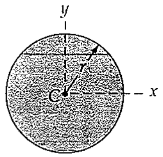
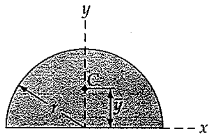
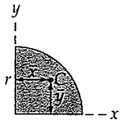
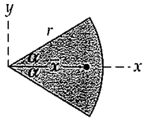
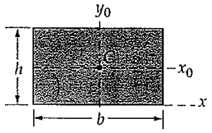
FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
Círculo 	—	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{4}$
Semicírculo 	$\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{8}$
Cuadrante circular 	$\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{8}$
Sector circular 	$\bar{x} = \dfrac{2}{3}\dfrac{r \text{ sen } \alpha}{\alpha}$	$I_x = \dfrac{r^4}{4}(\alpha - \frac{1}{2} \text{ sen } 2\alpha)$ $I_x = \dfrac{r^4}{4}(\alpha + \frac{1}{2} \text{ sen } 2\alpha)$ $I_z = \dfrac{1}{2} r^4 \alpha$
Superficie rectangular 	—	$I_x = \dfrac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \dfrac{bh}{12}(b^2 + h^2)$

TABLA D.3 PROPIEDADES DE TAFIGURAS PLANAS (continuación)

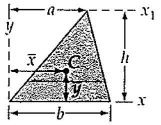
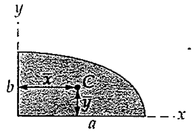
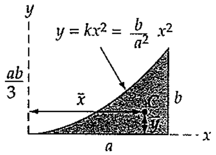
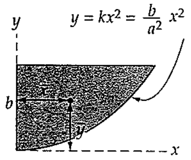
FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
Superficie triangular  a x_1 y $\bar{x}$ C h $\bar{y}$ x b	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $\bar{I}_z = \frac{bh^3}{4}$
Superficie de cuadrante elíptico  y b $\bar{x}$ C $\bar{y}$ a x	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{16}, \bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)ab^3$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}, \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)a^3 b$ $I_z = \frac{\pi ab}{16}(a^2 + b^2)$
Superficie subparabólica Área $A = \frac{ab}{3}$  y $y = kx^2 = \frac{b}{a^2}\ x^2$ $\bar{x}$ C b $\bar{y}$ x a	$\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3b}{10}$	$I_x = \frac{ab^3}{21}$ $I_y = \frac{a^3 b}{5}$ $I_z = ab\left(\frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{21}\right)$
Superficie parabólica Área $A = \frac{2ab}{3}$  y $y = kx^2 = \frac{b}{a^2}\ x^2$ b $\bar{x}$ $\bar{y}$ x	$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3b}{5}$	$I_x = \frac{2ab^3}{7}$ $I_y = \frac{2a^3 b}{15}$ $I_z = 2ab\left(\frac{a^2}{15} + \frac{b^2}{7}\right)$

TABLA D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS

(m = masa del cuerpo representado)

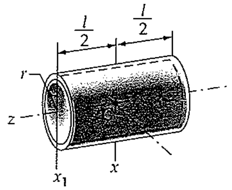
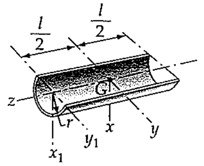
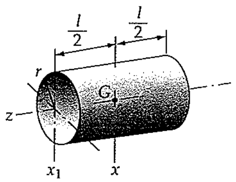
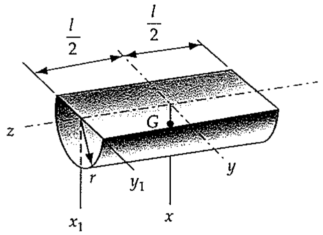
CUERPO	CENTRO DE MASA	MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
Cáscara cilíndrica de revolución  $\frac{l}{2}$ $\frac{l}{2}$ r z G x_1 x	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
Cáscara semicilíndrica de revolución  $\frac{l}{2}$ $\frac{l}{2}$ z G r y_1 x y x_1	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$
Cilindro de revolución  $\frac{l}{2}$ $\frac{l}{2}$ r G z x_1 x	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
Semicilindro  $\frac{l}{2}$ $\frac{l}{2}$ z G y r y_1 x_1 x	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$

TABLA D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS (continuación)

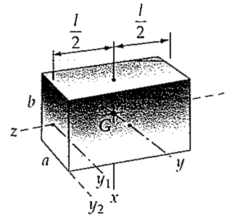
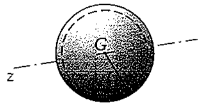
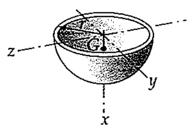
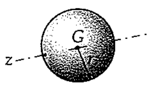
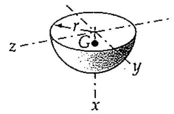
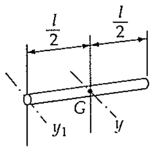
CUERPO	CENTROS DE MASA	MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
Paralelepípedo rectangular  $\frac{l}{2}$ $\frac{l}{2}$ b G z a y y_1 x y_2	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2+l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2+l^2)$
Cáscara esférica  	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
Cáscara hemisférica  	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{5}{12}mr^2$
Esfera  	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
Semiesfera  	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$
Varilla delgada uniforme  	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{3}ml^2$

TABLA D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS (continuación)

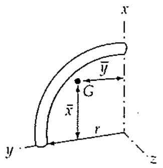
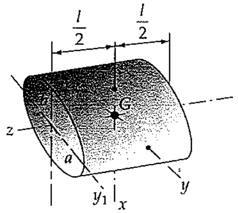
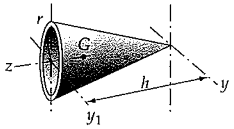
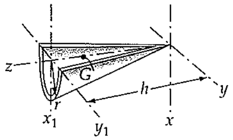
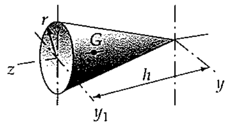
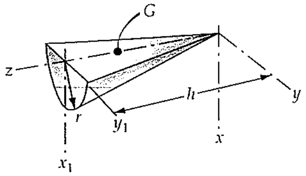
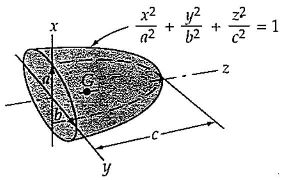
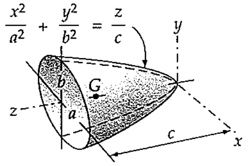
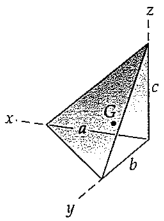
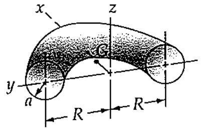
CUERPO	CENTROS DE MASA	MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
Varilla cuarto circular  	$\bar{x} = \bar{y}$ $= \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
Cilindro elíptico  $\frac{l}{2}$ $\frac{l}{2}$ G z a b y_1 x y	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{4}mb^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}m(a^2+b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mb^2+\frac{1}{3}ml^2$
Cáscara cónica  	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{2}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{18}mh^2$
Cáscara semicónica  	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{2}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
Cono circular recto  	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{5}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2+\frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{80}mh^2$

TABLA D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS (continuación)

(m = masa del cuerpo representado)

CUERPO	CENTROS DE MASA	MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
Semicono  	$\bar{x} = \frac{r}{\pi}$ $\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2$
Semielipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ x z G a b c y	$\bar{z} = \frac{3c}{8}$	$I_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + \frac{19}{64}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + \frac{19}{64}c^2)$
Paraboloide elíptico  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ y b G z a c x	$\bar{z} = \frac{2c}{3}$	$I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{6}m(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{6}m(a^2 + \frac{1}{3}c^2)$
Tetraedro rectangular  	$\bar{x} = \frac{a}{4}$ $\bar{y} = \frac{b}{4}$ $\bar{z} = \frac{c}{4}$	$I_{xx} = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{10}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{3}{80}m(b^2 + c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{80}m(a^2 + c^2)$ $\bar{I}_{zz} = \frac{3}{80}m(a^2 + b^2)$
Semitoro  	$\bar{x} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz} = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

Principios de capítulo

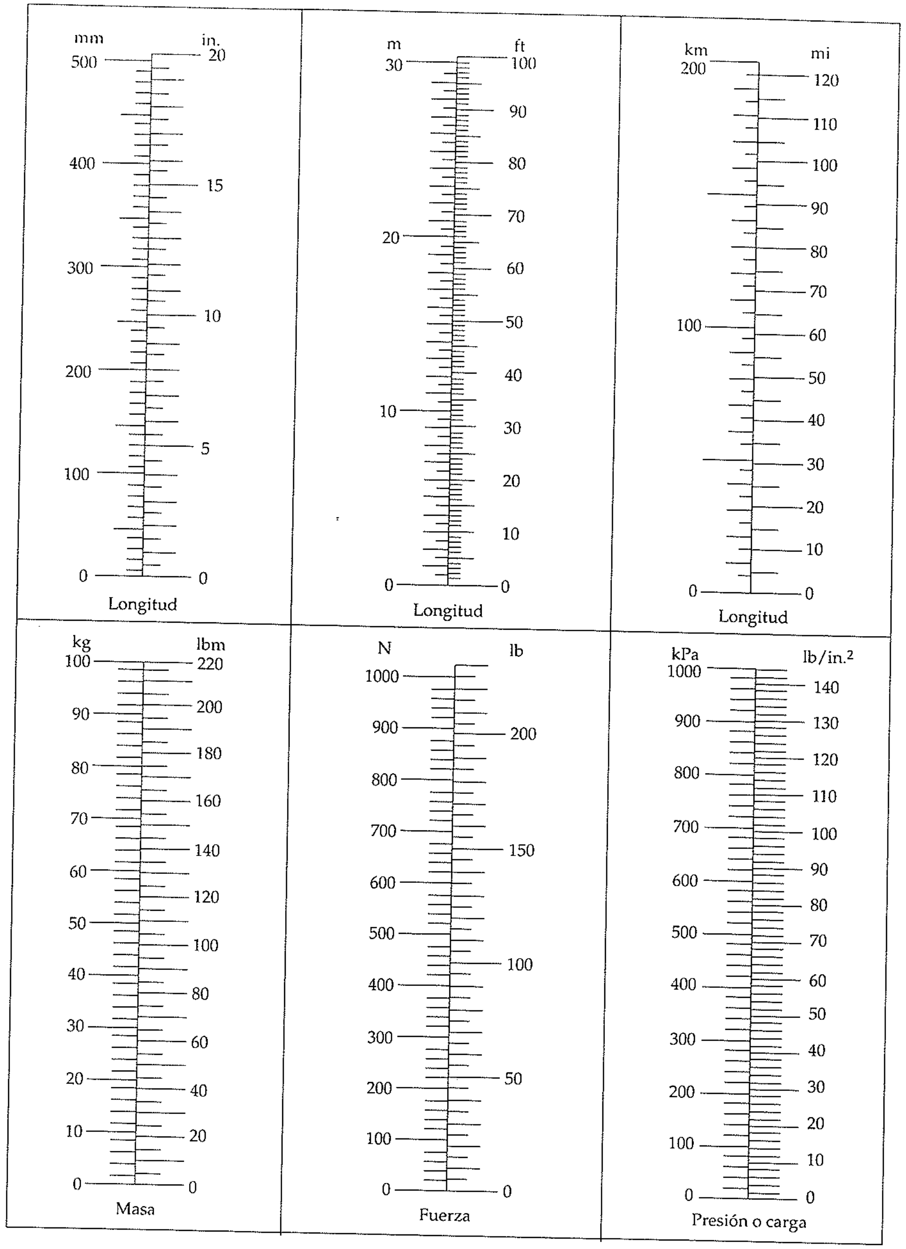
CAPÍTULO 1: Michele Burgess/The Stock Market.
CAPÍTULO 2: Robert Isaacs/Photo Researchers.
CAPÍTULO 3: Peeter Vilms/Jeroboam, Inc.
CAPÍTULO 4: Dan Chidester/The Image Works.
CAPÍTULO 5: Jeff Albertson/Stock, Boston.
CAPÍTULO 6: Grafton Marshall Smith/The Image Bank.
CAPÍTULO 7: Chris Sorensen/The Stock Market.

Índice alfabético

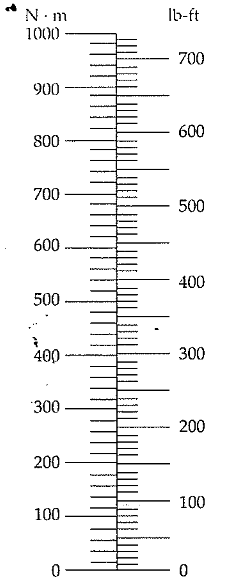
Acción 6, 17
Aceleración gravitatoria 8
Adición escalar 4
Adición vectorial 4
Aerostática 252
Aislamiento de un sistema mecánico 85
Ángulo de reposo 283
Ángulo de rozamiento 306
Ángulo de rozamiento estático 281
Aproximaciones 10
Armadura especial 159
Armadura plana 140
Armadura simple 141, 182
Brazo 28
Cable flexible 240, 313
  ecuación diferencial 241
  relaciones 240
Cable parabólico 241
Carga 230
Categorías de equilibrio 94
Categorías de equilibrio en tres dimensiones 117
Catenaria 243
Centro de gravedad 191
Centro de masa 191, 193
Centro de masa en un cuerpo compuesto 208
Centro de masa en una figura compuesta 208
Centro de presión 253, 256
Centroide 193
Centroide de líneas 194
Centroide de superficies 194
Centroide de volúmenes 194
Círculo de Mohr 389
Círculo de rozamiento 306
Coeficiente de rozamiento cinético 281
Coeficiente de rozamiento estático 280
Coeficiente de rozamiento por rodadura 315
Cojinetes de apoyo 306
Cojinetes de empuje 307
  rozamiento circular 307
Componente escalar 18
Componente rectangular 5, 18, 49
Componente vectorial 18
Conceptos fundamentales de la mecánica 2
Condiciones de equilibrio 94
Cono de rozamiento 282
Constante de gravitación 8
Constante recuperadora 347
Construcción de diagramas de sólido libre 87
Cortadura 229
Coseno director 5, 50
Coulomb 279
Cuerpo rígido 3
Cuña 297
Derivadas 408
Desplazamiento 330
Desplazamiento virtual 332
Diagrama de fuerza cortante 230
Diagrama de las fuerzas activas 335
Diagrama de momento flector 230
Diagrama de sólido libre 13, 84
Diagrama de sólido libre tridimensional 116
Distribución de las fuerzas internas 190
Ecuación de la energía 349
Ecuaciones de equilibrio 280
Ecuaciones, resolución por le método de Newton 411
Ejes principales de inercia 389
Elementos infinitesimales para la integración 194
Empuje 256
Energía potencial 347
Energía potencial elástica 347
Energía potencial gravitatoria 348
Energía potencial y estabilidad 347

Entramado 165, 183
Equilibrio 333, 351
Equilibrio de cuerpos rígidos interconectados 166
Equilibrio de un cuerpo rígido 333
Equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos 334
Equilibrio de una partícula 333
Equilibrio en dos dimensiones 84
Equilibrio en tres dimensiones 115
Equilibrio hiperestático 97
Equilibrio isostático 97
Equilibrio tridimensional 115
Esfuerzo 190
Espacio 2
Estabilidad 347, 351
Estabilidad del equilibrio 350
Estática de fluidos 252
Estructura 140
  casos particulares 144
Estructura isostática 140
Euler, método de integración 414
Filete de tornillo 299
Filete cuadrado de tornillo 299
Flexión 229
Fuerza 3, 16
  distribución cúbica 191
  distribución lineal 190
  distribución superficial 190
Fuerza activa 16, 334
Fuerza colineal 142
Fuerza concentrada 17
Fuerza concurrente 68
Fuerza cortante 229, 230
Fuerza de contacto 17
Fuerza másica 17, 191
Fuerza neta 334
Fuerza paralela 68
Fuerza reactiva 16, 334
Fuerzas coplanarias 68
Fuerzas en dos dimensiones 86
Fuerzas iguales 142
Fuerzas opuestas 142
Grados de libertad 335
Hidrostática 252
Inestabilidad 351
Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden 414
Integración de Euler 414
Integración numérica 412
  determinación de una área 412
Integrales 408
Isostaticidad 96
Joule 332, 348, 349
Kilogramo 7
Ley de gravitación 8
Ley de Pascal 252
Leyes de Newton 6
Ligadura 96
Ligadura e isostaticidad 119
Ligadura adecuada 98, 118
Ligadura impropia 98, 118
Ligadura parcial 98, 118
Ligadura redundante 97, 118
Ligadura superabundante 97, 98, 118
Límites 10
Longitud 7
Magnitud escalar 3
Magnitud vectorial 3
Máquina 165, 183
Masa 3, 7
Matemáticas 401-415
  fundamentos aplicación Mecánica 401
  fundamentos aplicación Mecánica álgebra 402
  fundamentos aplicación Mecánica álgebra vectorial 404
  fundamentos aplicación Mecánica geometría analítica 403
  fundamentos aplicación Mecánica geometría del espacio 402
  fundamentos aplicación Mecánica geometría plana 401
  fundamentos aplicación Mecánica trigonometría 404
Mecánica 2
Mecanismo de rozamiento 279
Método de las secciones 151
Método de Newton 411
Metro 7
Miembro de dos fuerzas 141
Miembro multifuerza 165
Miembro redundante 141
Miembro superabundante 141
Mohr, círculo 389
Momento 28, 56
Momento de inercia 367-398
  traslación ejes 370
  unidades 369
Momento de inercia polar 368
Momento de inercia, superficie compuesta 381
Momento de torsión 229
Momento de un par 58
Momento estático de primer orden 194
Momento estático de segundo orden 368
Momento flector 229, 230
Momentos de inercia de masas 399
Momentos de inercia de una superficie 367
Momentos de inercia rectangulares 368
Morin 279
Movimiento inminente 282
Newton, Isaac 6
Newton, método 411
Notación vectorial 167
Nudos, análisis 142
Nudos-secciones, análisis combinado 152
Par 36, 58
Partícula 3
Pascal 190
Peso 9
Peso específico 191
Polígono de fuerzas 43
Precisión 10
Presión 190
Presión en un fluido 252
Presión hidrostática 253
Presión hidrostática sobre superficies cilíndricas 254
Presión manométrica 253
Primera ley de Newton 6
Principio de acción 166
Principio de momentos 44
Principio de reacción 166
Principio de transmisibilidad 16
Producto escalar 51
Producto de inercia 387
Radio de giro 369
Reacción 6, 17
Recta soporte definida por dos ángulos 50
Recta soporte definida por dos puntos 50
Rendimiento mecánico 336-337
Resistencia a la rodadura 315
Resolución ecuaciones por el método de Newton 411
Resultante 43, 67
Rigidez 347
Rodadura 315
Rotación de los ejes 387, 388
Rozamiento 278
  tipos de problemas 282
  aplicación en máquinas 297
Rozamiento cinético 280
Rozamiento circular 307
Rozamiento de Coulomb 278
Rozamiento estático 280
Rozamiento fluido 279
Rozamiento interno 279
Rozamiento seco 278, 279
Sección, análisis 151
Segunda ley de Newton 6
Segundo 8
Serie, desarrollos 407
Sistema de fuerzas 16, 43
Sistema de fuerzas bidimensionales 18
Sistema de fuerzas tridimensionales 49
Sistemas fuerza-par 37
Suma escalar 4
Superficie compuesta 381
Sustracción vectorial 5
Teorema de los ejes paralelos 371
Teorema de Pappo 218
Teorema de Steiner 371
Teorema de Varignon 30, 58
Tercera ley de Newton 6, 17
Tiempo 3, 8
Tipos de rozamiento 278
Tornillo 299
Torsión 229
Torsor 69
Trabajo 330
Trabajo de un par de fuerzas 331
Trabajo de una fuerza 330
Trabajo virtual 329, 332, 335
Traslación de los ejes 388
Unidad patrón de fuerza 17
Unidades SI 6, 7
Unidades SI de momentos 29
Vector deslizante 4, 16, 59
Vector fijo 4
Vector libre 3, 59
Viga 223-235
  tipos 223
Viga hiperestática 223
Viga isostática 223
Viga-efectos externos 223
Viga-efectos internos 229
Viscosidad 279

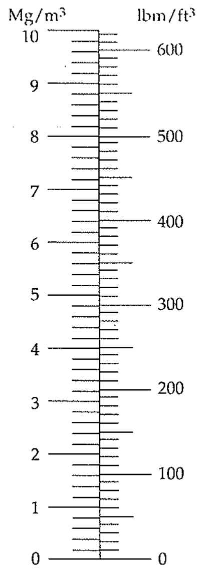
NOMOGRAMAS PARA LA CONVERSIÓN ENTRE LAS UNIDADES SI Y LAS U. S. CUSTOMARY UNITS


mm
in.
500
400
300
200
100
0
20
15
10
5
0
Longitud
m
ft
30
20
10
0
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Longitud
km
mi
200
100
0
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Longitud
kg
lbm
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Masa
N
lb
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
200
150
100
50
0
Fuerza
kPa
lb/in.²
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Presión o carga

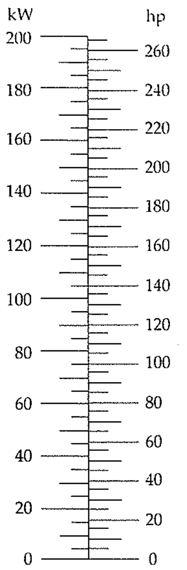
NOMOGRAMAS (CONTINUACIÓN)



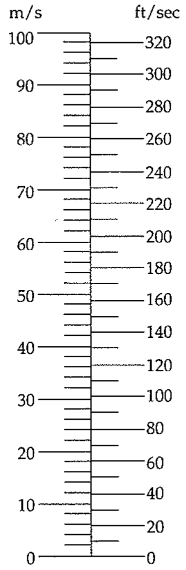
Momento de fuerza o torque



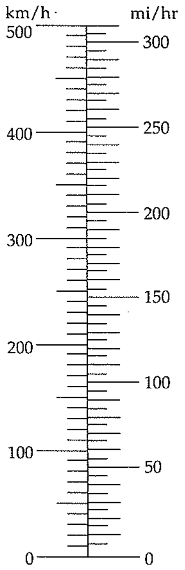
Densidad



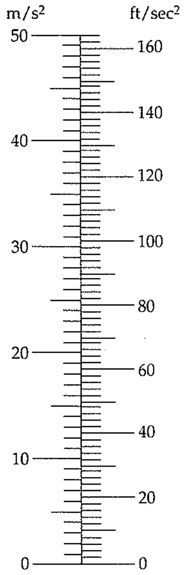
Potencia



Velocidad



Velocidad



Aceleración